dieſes Durchſchnitts gleich dem der ſchiefen Ebene, ſo wie ſein Streichen = dem der ſeigern Ebene iſt.

31. Zwey Ebenen die winkelrechtes Streichen und gleiches Fallen haben, ſchneiden einander in einer Linie, die mit den Ebenen einerley Neigung hat.

32. Der Durchſchnitt zweyer ſchiefen nicht parallel ſtreichenden Ebenen iſt ſchief.

33. Ebenen die einerley Fallen und Streichen haben, ſind gleichlaufend.

34. Werden zwey und mehrere Ebenen, die einerley Streichen und Fallen haben, von einer andern durchſchnitten; ſo ſind die Durchſchnittslinien gleichlaufend.

Ebene des Anſteigens, ſiehe Ausſtreichen der Gänge und Floze II. Die Neigung und das Streichen derſelben zu finden. Ebend. III.

Ebene, Diametral- heißt diejenige Ebene, welche einen Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile theilet.

Ebene, krumlinichte, ſiehe Figuren krumlinichte.

Ebene, ſeigere, heißt eine ſolche, die auf dem Horizonte perpendikular ſtehet. Wie ſolche abzuſtecken, ſiehe: Linie gerade abzuſtecken.

Ebene Figur, ſiehe Figur.

Ebene Fläche, heißt eine ſolche, auf welcher ſich nach allen möglichen Gegenden gerade Linien ziehen laſſen. Die Oberfläche z. E. eines Cylinders iſt daher nicht eben, weil man zwar der Länge nach, aber nicht der Breite nach gerade Linien auf derſelben ziehen kann. Von dergleichen Ebenen oder ebenen Flächen lehrt die Geometrie den Inhalt ausrechnen, ſie betrachtet ihren Urſprung durch Bewegung gewiſſer Linien, ihre Stellung und Lagen gegen einander, ſie betrachtet ſie als Durchſchnitte gewiſſer Körper. Z. E. des Kegels, und unterſucht ihre Geſtalt, beſtimmt ihren Schwerpunkt u. d. gl.

Ebene Fläche, Neigung gegen eine andere ebene Fläche; Inclinatio plani ad planum; iſt der Winkel, den zwey gerade Linien mit einander machen, die auf der Linie des Durchſchnittes der beyden Ebenen perpendikular ſtehen.

1. Der Fuß einer geraden Linie iſt der Punkt, wo die gerade Linie eine Fläche erreicht.

2. Eine gerade Linie iſt auf einer Ebene ſenkrecht oder perpendikular, wenn ſie perpendikular iſt, auf allen geraden Linien, die durch ihren Fuß in der Ebene gezogen werden können.

Z. E. Fig. 901 AB iſt perpendikular auf der Ebene CD, wenn ſie perpendikular iſt auf EF, GH, IK, die in der Ebene CD durch den Fuß der Linie AB gezogen ſind.

3. Eine Ebene iſt auf einer Ebene ſenkrecht oder perpendikular, wenn jede gerade Linie, die man in der einen Ebene ziehet, ſo daß ſie auf dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte beyder Ebenen ſenkrecht ſtehe, auch auf der andern Ebene ſenkrecht ſtehet.

Z. E. Es ſey Fig. 902 AG der gemeinſchaftliche Durchſchnitt der Ebenen CD und AB. In der Ebene AB ſey die gerade Linie EF perpendikular auf AG. Iſt nun EF auch perpendikular auf der Ebene CD, das iſt, auf allen geraden Linien, die durch F in der Ebene CD gezogen werden können: ſo ſagt man, die Ebene AB ſey ſenkrecht auf der Ebene CD.

14. Nimmt man nun auf der Linie OM Fig. 930. einen Punkt P an, und man findet, daß alle Punkte z. E. M über dem angenommenen gegen Morgen, unter ihm aber z. E. O, gegen Abend liegen: ſo heißt dieſe Linie MO, recht fallend, aber widerſinnig fallend, wenn alle Punkte über P gegen Abend, und unter P gegen Morgen liegen.

15. Einer recht fallenden Linie Neigung wird durch den ſpitzigen Winkel, den ſie mit der durch ihren Anfangspunkt gehenden ſöhligen Ebene macht, ausgedrückt; durch den ſtumpfen und jenen zu 180° aber, wenn ſie widerſinnig fällt.

16. Eine Ebene heißt recht- oder widerſinnig fallend nachdem es ihre Falllinie iſt.

17. Der (15.) findet auch bey (16) ſtatt.

18. Unter allen geraden Linien, die in einer ſchiefen oder ſeigern Ebene gezogen werden, macht keine mit einer ſöhligen Ebene einen gröſſern Winkel, als ihre Falllinie.

In der 931. Figur ſey CD der Ebene AB Falllinie, aber QE, HG, FR, andere in der Ebene AB gezogene Linien, ſo iſt der Winkel CDL, den CD mit der ſöhligen Ebene IK macht, größer als die Winkel QEP, HGN, FRM aller andern Linien, QE, HG, FR, die ſie mit K begränzen.

19. Keine andere von der Falllinie verſchiedene Linie hat alſo mit der zugehörigen Ebene einerley Fallen.

20. Ebenen ſtreichen parallel, wenn ſie einerley Streichen haben; oder ihre Durchſchnitte mit einer ſöhligen Ebene, folglich ihre in einerley ſöhligen Ebene liegenden Streichlinien parallel ſind.

21. Die Falllinien zweyer ſolchen Ebenen (20) liegen entweder in einer und derſelben Fallebene, oder in gleichlaufenden Fallebenen.

22. Die Streichlinien zweyer nicht parallel ſtreichenden Ebenen machen mit einander einen Winkel, der gleich dem Winkel iſt, den die Fallebenen dieſer nicht parallel ſtreichenden Ebenen begränzen.

23. Aus den Streichen zweyer Ebenen den Winkel ihrer Fallebenen zu finden.

Aufl. Man ſuche aus dem gegebenen Streichen den Winkel, den beyder Ebenen Streichlinien mit einander machen (22. 10). Wäre der einen Ebene Streichen $= \beta$, und der andern ihres $= \gamma$, und kleiner als β: ſo iſt der verlangte Winkel $= \beta - \gamma$.

24. Eine Linie oder Ebene hat in Rückſicht einer andern Linie oder Ebene winkelrechtes Streichen, wenn beyder Streichen von einander um 6 Stunden unterſchieden iſt.

25. Die Streichlinie der Fallebene heißt jede ſöhlige Linie in der Fallebene.

26. Dieſe Linie hat in Rückſicht der der Fallebene zugehörigen Ebene winkelrechtes Streichen.

27. Der (22. 23.) läßt ſich auch auf die Streichlinien der Fallebenen anwenden.

28. Wenn zwey Ebenen parallel ſtreichen, dabey aber verſchiedene Neigungen haben; ſo ſchneiden ſie einander in einer ſöhligen Linie.

29. Der Durchſchnitt zweyer ſeigern nicht parallel ſtreichenden Ebenen iſt ſeiger.

30. Der Durchſchnitt einer ſeigern Ebene mit einer ſchiefen winkelrecht ſtreichenden Ebene iſt ſchief, und zwar iſt der Neigungswinkel die-

dieſes Durchſchnitts gleich dem der ſchiefen Ebene, ſo wie ſein Streichen = dem der ſeigern Ebene iſt.

31. Zwey Ebenen die winkelrechtes Streichen und gleiches Fallen haben, ſchneiden einander in einer Linie, die mit den Ebenen einerley Neigung hat.

32. Der Durchſchnitt zweyer ſchiefen nicht parallel ſtreichenden Ebenen iſt ſchief.

33. Ebenen die einerley Fallen und Streichen haben, ſind gleichlaufend.

34. Werden zwey und mehrere Ebenen, die einerley Streichen und Fallen haben, von einer andern durchſchnitten; ſo ſind die Durchſchnittslinien gleichlaufend.

Ebene des Anſteigens, ſiehe Ausſtreichen der Gänge und Floze II. Die Neigung und das Streichen derſelben zu finden. Ebend. III.

Ebene, Diametral- heißt diejenige Ebene, welche einen Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile theilet.

Ebene, krumlinichte, ſiehe Figuren krumlinichte.

Ebene, ſeigere, heißt eine ſolche, die auf dem Horizonte perpendikular ſtehet. Wie ſolche abzuſtecken, ſiehe: Linie gerade abzuſtecken.

Ebene Figur, ſiehe Figur.

Ebene Fläche, heißt eine ſolche, auf welcher ſich nach allen möglichen Gegenden gerade Linien ziehen laſſen. Die Oberfläche z. E. eines Cylinders iſt daher nicht eben, weil man zwar der Länge nach, aber nicht der Breite nach gerade Linien auf derſelben ziehen kann. Von dergleichen Ebenen oder ebenen Flächen lehrt die Geometrie den Inhalt ausrechnen, ſie betrachtet ihren Urſprung durch Bewegung gewiſſer Linien, ihre Stellung und Lagen gegen einander, ſie betrachtet ſie als Durchſchnitte gewiſſer Körper. Z. E. des Kegels, und unterſucht ihre Geſtalt, beſtimmt ihren Schwerpunkt u. d. gl.

Ebene Fläche, Neigung gegen eine andere ebene Fläche; Inclinatio plani ad planum; iſt der Winkel, den zwey gerade Linien mit einander machen, die auf der Linie des Durchſchnittes der beyden Ebenen perpendiknlar ſtehen.

1. Der Fuß einer geraden Linie iſt der Punkt, wo die gerade Linie eine Fläche erreicht.

2. Eine gerade Linie iſt auf einer Ebene ſenkrecht oder perpendikular, wenn ſie perpendikular iſt, auf allen geraden Linien, die durch ihren Fuß in der Ebene gezogen werden können.

Z. E. Fig. 901 AB iſt perpendikular auf der Ebene CD, wenn ſie perpendikular iſt auf EF, GH, IK, die in der Ebene CD durch den Fuß der Linie AB gezogen ſind.

3. Eine Ebene iſt auf einer Ebene ſenkrecht oder perpendikular, wenn jede gerade Linie, die man in der einen Ebene ziehet, ſo daß ſie auf dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte beyder Ebenen ſenkrecht ſtehe, auch auf der andern Ebene ſenkrecht ſtehet.

Z. E. Es ſey Fig. 902 AG der gemeinſchaftliche Durchſchnitt der Ebenen CD und AB. In der Ebene AB ſey die gerade Linie EF perpendikular auf AG. Iſt nun EF auch perpendikular auf der Ebene CD, das iſt, auf allen geraden Linien, die durch F in der Ebene CD gezogen werden können: ſo ſagt man, die Ebene AB ſey ſenkrecht auf der Ebene CD.

14. Nimmt man nun auf der Linie OM Fig. 930. einen Punkt P an, und man findet, daß alle Punkte z. E. M über dem angenommenen gegen Morgen, unter ihm aber z. E. O, gegen Abend liegen: ſo heißt dieſe Linie MO, recht fallend, aber widerſinnig fallend, wenn alle Punkte über P gegen Abend, und unter P gegen Morgen liegen.

15. Einer recht fallenden Linie Neigung wird durch den ſpitzigen Winkel, den ſie mit der durch ihren Anfangspunkt gehenden ſöhligen Ebene macht, ausgedrückt; durch den ſtumpfen und jenen zu 180° aber, wenn ſie widerſinnig fällt.

16. Eine Ebene heißt recht- oder widerſinnig fallend nachdem es ihre Falllinie iſt.

17. Der (15.) findet auch bey (16) ſtatt.

18. Unter allen geraden Linien, die in einer ſchiefen oder ſeigern Ebene gezogen werden, macht keine mit einer ſöhligen Ebene einen gröſſern Winkel, als ihre Falllinie.

In der 931. Figur ſey CD der Ebene AB Falllinie, aber QE, HG, FR, andere in der Ebene AB gezogene Linien, ſo iſt der Winkel CDL, den CD mit der ſöhligen Ebene IK macht, größer als die Winkel QEP, HGN, FRM aller andern Linien, QE, HG, FR, die ſie mit K begränzen.

19. Keine andere von der Falllinie verſchiedene Linie hat alſo mit der zugehörigen Ebene einerley Fallen.

20. Ebenen ſtreichen parallel, wenn ſie einerley Streichen haben; oder ihre Durchſchnitte mit einer ſöhligen Ebene, folglich ihre in einerley ſöhligen Ebene liegenden Streichlinien parallel ſind.

21. Die Falllinien zweyer ſolchen Ebenen (20) liegen entweder in einer und derſelben Fallebene, oder in gleichlaufenden Fallebenen.

22. Die Streichlinien zweyer nicht parallel ſtreichenden Ebenen machen mit einander einen Winkel, der gleich dem Winkel iſt, den die Fallebenen dieſer nicht parallel ſtreichenden Ebenen begränzen.

23. Aus den Streichen zweyer Ebenen den Winkel ihrer Fallebenen zu finden.

Aufl. Man ſuche aus dem gegebenen Streichen den Winkel, den beyder Ebenen Streichlinien mit einander machen (22. 10). Wäre der einen Ebene Streichen $= \beta$, und der andern ihres $= \gamma$, und kleiner als β: ſo iſt der verlangte Winkel $= \beta - \gamma$.

24. Eine Linie oder Ebene hat in Rückſicht einer andern Linie oder Ebene winkelrechtes Streichen, wenn beyder Streichen von einander um 6 Stunden unterſchieden iſt.

25. Die Streichlinie der Fallebene heißt jede ſöhlige Linie in der Fallebene.

26. Dieſe Linie hat in Rückſicht der der Fallebene zugehörigen Ebene winkelrechtes Streichen.

27. Der (22. 23.) läßt ſich auch auf die Streichlinien der Fallebenen anwenden.

28. Wenn zwey Ebenen parallel ſtreichen, dabey aber verſchiedene Neigungen haben; ſo ſchneiden ſie einander in einer ſöhligen Linie.

29. Der Durchſchnitt zweyer ſeigern nicht parallel ſtreichenden Ebenen iſt ſeiger.

30. Der Durchſchnitt einer ſeigern Ebene mit einer ſchiefen winkelrecht ſtreichenden Ebene iſt ſchief, und zwar iſt der Neigungswinkel die-

dieſes Durchſchnitts gleich dem der ſchiefen Ebene, ſo wie ſein Streichen = dem der ſeigern Ebene iſt.

31. Zwey Ebenen die winkelrechtes Streichen und gleiches Fallen haben, ſchneiden einander in einer Linie, die mit den Ebenen einerley Neigung hat.

32. Der Durchſchnitt zweyer ſchiefen nicht parallel ſtreichenden Ebenen iſt ſchief.

33. Ebenen die einerley Fallen und Streichen haben, ſind gleichlaufend.

34. Werden zwey und mehrere Ebenen, die einerley Streichen und Fallen haben, von einer andern durchſchnitten; ſo ſind die Durchſchnittslinien gleichlaufend.

Ebene des Anſteigens, ſiehe Ausſtreichen der Gänge und Flöze II. Die Neigung und das Streichen derſelben zu finden. Ebend. III.

Ebene, Diametral- heißt diejenige Ebene, welche einen Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile theilet.

Ebene, krumlinichte, ſiehe Figuren krumlinichte.

Ebene, ſeigere, heißt eine ſolche, die auf dem Horizonte perpendikular ſtehet. Wie ſolche abzuſtecken, ſiehe: Linie gerade abzuſtecken.

Ebene Figur, ſiehe Figur.

Ebene Fläche, heißt eine ſolche, auf welcher ſich nach allen möglichen Gegenden gerade Linien ziehen laſſen. Die Oberfläche z. E. eines Cylinders iſt daher nicht eben, weil man zwar der Länge nach, aber nicht der Breite nach gerade Linien auf derſelben ziehen kann. Von dergleichen Ebenen oder ebenen Flächen lehrt die Geometrie den Inhalt ausrechnen, ſie betrachtet ihren Urſprung durch Bewegung gewiſſer Linien, ihre Stellung und Lagen gegen einander, ſie betrachtet ſie als Durchſchnitte gewiſſer Körper. Z. E. des Kegels, und unterſucht ihre Geſtalt, beſtimmt ihren Schwerpunkt u. d. gl.

Ebene Fläche, Neigung gegen eine andere ebene Fläche; Inclinatio plani ad planum; iſt der Winkel, den zwey gerade Linien mit einander machen, die auf der Linie des Durchſchnittes der beyden Ebenen perpendikular ſtehen.

1. Der Fuß einer geraden Linie iſt der Punkt, wo die gerade Linie eine Fläche erreicht.

2. Eine gerade Linie iſt auf einer Ebene ſenkrecht oder perpendikular, wenn ſie perpendikular iſt, auf allen geraden Linien, die durch ihren Fuß in der Ebene gezogen werden können.

Z. E. Fig. 901 AB iſt perpendikular auf der Ebene CD, wenn ſie perpendikular iſt auf EF, GH, IK, die in der Ebene CD durch den Fuß der Linie AB gezogen ſind.

3. Eine Ebene iſt auf einer Ebene ſenkrecht oder perpendikular, wenn jede gerade Linie, die man in der einen Ebene ziehet, ſo daß ſie auf dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte beyder Ebenen ſenkrecht ſtehe, auch auf der andern Ebene ſenkrecht ſtehet.

Z. E. Es ſey Fig. 902 AG der gemeinſchaftliche Durchſchnitt der Ebenen CD und AB. In der Ebene AB ſey die gerade Linie EF perpendikular auf AG. Iſt nun EF auch perpendikular auf der Ebene CD, das iſt, auf allen geraden Linien, die durch F in der Ebene CD gezogen werden können: ſo ſagt man, die Ebene AB ſey ſenkrecht auf der Ebene CD.

Encyklopädie
aller
mathematiſchen Wiſſenſchaften
ihre
Geſchichte und Literatur
in alphabetiſcher Ordnung.

Erſte Abtheilung.

Vierter Band,

---

enthaltend:

die reine Mathematik und praktiſche Geometrie,

das iſt:

Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie, Analyſis, Feldmeßkunſt, Forſtgeometrie und Markſcheidekunſt.

Herausgegeben
von
G. E. Roſenthal.
Herzogl. Sachſen-Gothaiſchen Berg-Commiſſarius, der Churfürſtl. Mainz. Akademie nützlicher Wiſſenſchaften, und mehrerer andern, Mitglied.

E. F.

Mit Kupfern.

Gotha,
bey Carl Wilhelm Ettinger 1796.

Encyklopädie
der
reinen Mathematik
und
praktiſchen Geometrie,
das iſt:
Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie, Analyſis, Feldmeßkunſt, Forſtgeometrie und Markſcheidekunſt,
ihre
Geſchichte und Literatur
in alphabetiſcher Ordnung.

Herausgegeben
von

G. E. Roſenthal,
Herzogl. Sachſen - Gothaiſchen Berg - Commiſſarius, der Churfürſtl. Mainz. Akademie nützlicher Wiſſenſchaften, und mehrerer andern, Mitglied.

Vierter Band.

E. F.

Mit Kupfern.

Gotha,
bey Carl Wilhelm Ettinger, 1796.

Eben, heißt bey Flächen, was gerade bey Linien heißt, ſiehe: ebene Fläche.

Ebene. (Markſcheidekunſt).

1. Der Winkel HBD. Fig. 928. den eine Ebene AB mit einer ſöhligen CD macht, heißt in der Markſcheidekunſt die **Neigung** jener **Ebene** AB, auch ihr **Neigungs-Winkel**.

2. Das **Fallen** oder die **Donlege** einer Ebene AB iſt ihre Ausdehnung in die Tiefe.

3. Man ſchätzt ſelbiges nach ihrem Neigungswinkel HBD. Daher wird ſelbiger auch ihr Fallen oder Donlege genannt.

4. Das **Streichen** einer **Ebene** AB iſt ihre Ausdehnung nach einer ſöhligen Länge.

5. Man beſtimmt ſelbiges nach dem Streichen, das dem Durchſchnitte CB der Ebene AB mit einer ſöhligen CD zukömmt; oder auch, welches einerley iſt, nach dem Streichen, das die durch CB gehende ſeigere Ebene FB hat.

6. Folglich iſt der Ebene AB obſervirtes Streichen der Winkel BCN, den CB mit der Magnetlinie NS macht, oder auch der Winkel EFL, den FB mit der Magnetebene LS begränzt. Wäre NS die Mittagslinie, LS die Mittagsfläche: ſo iſt LFE = NCB der Ebene AB reducirtes Streichen.

7. Streichen und Fallen einer Ebene beſtimmen ihre Lage.

8. Was in dem bisherigen Vortrage von dem Streichen und Fallen einer Linie, oder der durch ſie gehenden ſeigern Ebene geſagt worden iſt, gilt auch von jeder andern Ebene.

9. Die Streichlinie oder die Linie des Streichens einer Ebene AB iſt jede auf ihr gezogene ſöhlige Linie ab, AH, CB ꝛc.

10. Sie hat daher mit der Ebene ſelbſt einerley Streichen.

11. Wenn eine Ebene AB von einer ſeigern Ebene QP in MQ dergeſtalt geſchnitten wird, daß beyder Ebenen Durchſchnitt MQ auf der Ebene AB Streichlinie ab ſenkrecht ſtehet, ſo heißt die ſeigere Ebene QP die Fallebene, und der Durchſchnitt MQ die Fallinie der Ebene AB; dieſe Ebene AB ſelbſt aber die der Falllinie MQ oder Fallebene QP zugehörige Ebene AB.

12. Die Falllinie hat alſo mit der ihr zugehörigen Ebene einerley Neigung, aber ein Streichen, das von dem der Ebene um 6 Stunden unterſchieden iſt. Ein ſolches Streichen hat auch eine Fallebene.

13. Von einem Punkte D der ſchiefen Linie AB Fig. 929. ſey auf die untere D durch A gehende ſöhlige Ebene EF das Loth DC gefällt, und AC gezogen; nach welcher Weltgegend ſich nun die ſöhlige Linie CA erſtreckt, nach der zu, ſagt man, daß auch die Punkte der AB unter D liegen, oder die BA dahin zu falle, und folglich nach der entgegen geſetzten Weltgegend aufſteige. Z. E. Sieht CA nach Abend, ſo ſagt man auch, daß die Linie BA nach Abend falle, und nach Morgen aufſteige; oder daß die Punkte der AB unter D nach Abend zu und die über D nach Morgen zu liegen.

14. Nimmt man nun auf der Linie OM Fig. 930. einen Punkt P an, und man findet, daß alle Punkte z. E. M über dem angenommenen gegen Morgen, unter ihm aber z. E. O, gegen Abend liegen: ſo heißt dieſe Linie MO, recht fallend, aber widerſinnig fallend, wenn alle Punkte über P gegen Abend, und unter P gegen Morgen liegen.

15. Einer recht fallenden Linie Neigung wird durch den ſpitzigen Winkel, den ſie mit der durch ihren Anfangspunkt gehenden ſöhligen Ebene macht, ausgedrückt; durch den ſtumpfen und jenen zu 180° aber, wenn ſie widerſinnig fällt.

16. Eine Ebene heißt recht- oder widerſinnig fallend nachdem es ihre Falllinie iſt.

17. Der (15.) findet auch bey (16) ſtatt.

18. Unter allen geraden Linien, die in einer ſchiefen oder ſeigern Ebene gezogen werden, macht keine mit einer ſöhligen Ebene einen gröſſern Winkel, als ihre Falllinie.

In der 931. Figur ſey CD der Ebene AB Falllinie, aber QE, HG, FR, andere in der Ebene AB gezogene Linien, ſo iſt der Winkel CDL, den CD mit der ſöhligen Ebene IK macht, größer als die Winkel QEP, HGN, FRM aller andern Linien, QE, HG, FR, die ſie mit K begränzen.

19. Keine andere von der Falllinie verſchiedene Linie hat alſo mit der zugehörigen Ebene einerley Fallen.

20. Ebenen ſtreichen parallel, wenn ſie einerley Streichen haben; oder ihre Durchſchnitte mit einer ſöhligen Ebene, folglich ihre in einerley ſöhligen Ebene liegenden Streichlinien parallel ſind.

21. Die Falllinien zweyer ſolchen Ebenen (20) liegen entweder in einer und derſelben Fallebene, oder in gleichlaufenden Fallebenen.

22. Die Streichlinien zweyer nicht parallel ſtreichenden Ebenen machen mit einander einen Winkel, der gleich dem Winkel iſt, den die Fallebenen dieſer nicht parallel ſtreichenden Ebenen begränzen.

23. Aus den Streichen zweyer Ebenen den Winkel ihrer Fallebenen zu finden.

Aufl. Man ſuche aus dem gegebenen Streichen den Winkel, den beyder Ebenen Streichlinien mit einander machen (22. 10). Wäre der einen Ebene Streichen $= \beta$, und der andern ihres $= \gamma$, und kleiner als β: ſo iſt der verlangte Winkel $= \beta - \gamma$.

24. Eine Linie oder Ebene hat in Rückſicht einer andern Linie oder Ebene winkelrechtes Streichen, wenn beyder Streichen von einander um 6 Stunden unterſchieden iſt.

25. Die Streichlinie der Fallebene heißt jede ſöhlige Linie in der Fallebene.

26. Dieſe Linie hat in Rückſicht der der Fallebene zugehörigen Ebene winkelrechtes Streichen.

27. Der (22. 23.) läßt ſich auch auf die Streichlinien der Fallebenen anwenden.

28. Wenn zwey Ebenen parallel ſtreichen, dabey aber verſchiedene Neigungen haben; ſo ſchneiden ſie einander in einer ſöhligen Linie.

29. Der Durchſchnitt zweyer ſeigern nicht parallel ſtreichenden Ebenen iſt ſeiger.

30. Der Durchſchnitt einer ſeigern Ebene mit einer ſchiefen winkelrecht ſtreichenden Ebene iſt ſchief, und zwar iſt der Neigungswinkel

dieſes Durchſchnitts gleich dem der ſchiefen Ebene, ſo wie ſein Streichen = dem der ſeigern Ebene iſt.

31. Zwey Ebenen die winkelrechtes Streichen und gleiches Fallen haben, ſchneiden einander in einer Linie, die mit den Ebenen einerley Neigung hat.

32. Der Durchſchnitt zweyer ſchiefen nicht parallel ſtreichenden Ebenen iſt ſchief.

33. Ebenen die einerley Fallen und Streichen haben, ſind gleichlaufend.

34. Werden zwey und mehrere Ebenen, die einerley Streichen und Fallen haben, von einer andern durchſchnitten; ſo ſind die Durchſchnittslinien gleichlaufend.

Ebene des Anſteigens, ſiehe Ausſtreichen der Gänge und Floze II. Die Neigung und das Streichen derſelben zu finden. Ebend. III.

Ebene, Diametral- heißt diejenige Ebene, welche einen Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile theilet.

Ebene, krumlinichte, ſiehe Figuren krumlinichte.

Ebene, ſeigere, heißt eine ſolche, die auf dem Horizonte perpendikular ſtehet. Wie ſolche abzuſtecken, ſiehe: Linie gerade abzuſtecken.

Ebene Figur, ſiehe Figur.

Ebene Fläche, heißt eine ſolche, auf welcher ſich nach allen möglichen Gegenden gerade Linien ziehen laſſen. Die Oberfläche z. E. eines Cylinders iſt daher nicht eben, weil man zwar der Länge nach, aber nicht der Breite nach gerade Linien auf derſelben ziehen kann. Von dergleichen Ebenen oder ebenen Flächen lehrt die Geometrie den Inhalt ausrechnen, ſie betrachtet ihren Urſprung durch Bewegung gewiſſer Linien, ihre Stellung und Lagen gegen einander, ſie betrachtet ſie als Durchſchnitte gewiſſer Körper. Z. E. des Kegels, und unterſucht ihre Geſtalt, beſtimmt ihren Schwerpunkt u. d. gl.

Ebene Fläche, Neigung gegen eine andere ebene Fläche; Inclinatio plani ad planum; iſt der Winkel, den zwey gerade Linien mit einander machen, die auf der Linie des Durchſchnittes der beyden Ebenen perpendikular ſtehen.

1. Der Fuß einer geraden Linie iſt der Punkt, wo die gerade Linie eine Fläche erreicht.

2. Eine gerade Linie iſt auf einer Ebene ſenkrecht oder perpendikular, wenn ſie perpendikular iſt, auf allen geraden Linien, die durch ihren Fuß in der Ebene gezogen werden können.

Z. E. Fig. 901 AB iſt perpendikular auf der Ebene CD, wenn ſie perpendikular iſt auf EF, GH, IK, die in der Ebene CD durch den Fuß der Linie AB gezogen ſind.

3. Eine Ebene iſt auf einer Ebene ſenkrecht oder perpendikular, wenn jede gerade Linie, die man in der einen Ebene ziehet, ſo daß ſie auf dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte beyder Ebenen ſenkrecht ſtehe, auch auf der andern Ebene ſenkrecht ſtehet.

Z. E. Es ſey Fig. 902 AG der gemeinſchaftliche Durchſchnitt der Ebenen CD und AB. In der Ebene AB ſey die gerade Linie EF perpendikular auf AG. Iſt nun EF auch perpendikular auf der Ebene CD, das iſt, auf allen geraden Linien, die durch F in der Ebene CD gezogen werden können: ſo ſagt man, die Ebene AB ſey ſenkrecht auf der Ebene CD.

4. Die Neigung einer geraden Linie gegen eine Ebene, oder der Winkel, welchen eine gerade Linie mit einer Ebene macht, iſt der Winkel, welchen die gegebene mit einer andern macht, die durch deren Fuß gehet, und durch den Fuß der Perpendikularlinie, welche von einem willkührlich angenommenen Punkte der gegebenen Linie auf die Ebene fällt. Fig. 903.

Zum Exempel. Es ſey die gegebene Linie AB, deren Fuß A in der Ebene CD iſt. Aus einem Punkte B der Linie AB falle BE ſenkrecht auf die Ebene CD. In der Ebene werde gezogen AE: ſo iſt der Winkel BAE die Neigung der Linie AB gegen die Ebene CD.

5. Die Neigung zweyer Ebenen gegen einander, oder der Winkel, den ſie machen, iſt der Winkel, welcher entſtehet, wenn man aus einem willkührlichen Punkte des Durchſchnittes auf jeder Ebene, eine gerade Linie ziehet, die auf der Durchſchnittslinie perpendikular ſey. Fig. 904.

Z. E. es ſey AC der Durchſchnitt der Ebenen AD und AB. In der Ebene AB ſey gezogen EF perpendikular an AC. In der Ebene AD ſey gezogen EG ebenfalls perpendikular auf AC: ſo iſt GEF die Neigung oder der Winkel beyder Ebenen AB und AD.

6. Zwey Ebnen ſind parallel, wenn ſie einander nie begegnen können, ſo weit man ſie auch beyderſeits ausdehnen mag; oder wenn ſie an allen Orten in gleicher Entfernung von einander ſind.

7. Eine gerade Linie iſt mit einer Ebene parallel, wenn ſie die Ebene nie erreichen kann, ſo weit man ſie auch verlängern mag; oder wenn ſie an allen Orten von der Ebene gleichweit entfernt iſt.

8. Wenn ein Stück einer geraden Linie in einer Ebene liegt, oder wenn zwey Punkte einer geraden Linie in einer Ebene liegen, ſo liegt die ganze Linie in der Ebene.

Denn könnten einige Punkte einer geraden Linie in der Ebene, andere aber auſſer derſelben liegen, ſo wäre die Ebene nicht eine Ebene, welches widerſprechend iſt.

9. Zwey gerade Linien, die einander ſchneiden, liegen in derſelben Ebene, oder man kann ſich eine Ebene vorſtellen, worinnen ſie beyde liegen.

Fig. 905. Unter allen möglichen Ebenen, in der die gerade Linie EB liegen kann, ſey eine Ebene, die zugleich durch den Punkt D gehet. Da nun die Punkte C und D in der Ebene liegen, ſo liegt auch die ganze gerade Linie DCA darinnen; alſo liegen beyde gerade Linien darinnen

10. Jedes geradlinichte Dreyeck liegt in einer Ebene, oder man kann ſich allemal eine Ebene vorſtellen, worinnen ſowohl die drey Punkte, als auch die drey Seiten, und die Fläche des Dreyecks liegen.

Fig. 906. Unter allen möglichen Ebenen, worinnen die gerade Linie AB liegen kann, ſey eine Ebene, die zugleich durch den Punkt C gehet; da alſo die Punkte A und C, B und C in der Ebne liegen, ſo liegen auch die Linien AC und BC darin, und die Fläche des Dreyecks ABC iſt ein Theil gedachter unbeſtimmter Ebene.

Drey Punkte beſtimmen alſo völlig die Lage einer Ebene.

11. Die Durchſchnittslinie zweyer Ebenen liegt in beyden Ebenen; und wenn eine Linie in zweyen Ebenen lieget, ſo iſt ſie die Durchſchnittslinie der Ebenen.

12. Der Durchſchnitt zweyer Ebenen, iſt allemal eine gerade Linie.

Fig.

Fig. 907. Geſetzt die Ebenen CD und BE ſchneiden einander in AB. Ziehe von A zu B eine gerade Linie AB. Weil A und B in der Ebne CD liegen, ſo liegt die gerade Linie AB in der Ebene CD (8). Weil die Punkte A und B auch in der Ebene EB liegen, ſo liegt die gerade Linie AB zugleich in der Ebene EB. Alſo iſt die gerade Linie AB die Durchſchnittslinie beyder Ebenen (11).

13. Wenn eine gerade Linie auf zwey geraden Linien ſenkrecht ſtehet, die in einer Ebene liegen, ſo iſt die erſte auch auf der Ebene ſenkrecht, d. h. ſie iſt auf jeder andern geraden Linie ſenkrecht, die durch ihren Fuß gehet, und in derſelben Ebene liegt.

Fig. 908. Geſetzt es ſtehet HG perpendikular ſowohl auf AB als auch auf CD, die in der Ebene IK liegen. Mache GB = GA, GC = GD, ziehe AD, CB. So iſt Dreyeck CGB $\cong$ Δ DGA, weil die Wechſelwinkel in G gleich ſind, und GC = GD, GA = GB. Alſo iſt < C = < D, < B = < A.

Ziehe durch den Punkt G irgend eine andere gerade Linie EF in der nämlichen Ebene, ſo iſt Δ DGE $\cong$ Δ CGF, weil die Wechſelwinkel in G gleich ſind. Desgleichen < D = < C, und GD = GC. Alſo iſt GF = GE, FC = ED.

In den Dreyecken HGA, und HGB iſt der Winkel in G, beyderſeits ein rechter, GH = GH und GB = GA, folglich auch HB = HA. Und eben ſo wird bewieſen, daß in den Dreyecken HGC und HGD, HC = HD.

Da nun HB = HA, HC = HD, und CB = DA, ſo iſt auch in den Dreyecken HBC und HAD, < D = < C.

In den Dreyecken HCF und HDE iſt alſo FC = DE, HC = HD, und < C = < D. Folglich iſt HF = HE.

In den Dreyecken HGF und HGE iſt HG = HG, GF = FE, HF = HE. Folglich < HGF = < HGE. Da nun dieſe beyde Nebenwinkel einander gleich ſind, ſo ſind ſie rechte, folglich ſtehet HG, ſenkrecht auf der Linie EF.

14. Wenn eine gerade Linie auf drey andern, die ſich in ihrem Fuße vereinigen, perpendikular ſtehet, ſo ſind ſolche drey Linien in einer Ebene.

Fig. 909. Es ſey AB perpendikular auf BE, auf BD und auf BC. Geſetzt es ſey möglich, daß BC über die Ebene IF falle, in der BE und BD liegen.

So ſtelle man ſich eine andere Ebene BG vor, die durch die Linien AB und BC gehet. Dieſe Ebene BC ſcheidet nun die andere IF in einer geraden Linie BH.

Alſo wären BE, BD, BH, in der Ebene IF, und BA, BC, BH, in der Ebene BG. Nun iſt AB perpendikular auf BE und BD, folglich auch auf BH. (13).

Alſo iſt ABH ein rechter Winkel. Es war aber auch angenommen, daß ABC ein rechter Winkel ſey. Folglich wäre der ganze Winkel, ABH gleich einem Theile ABC, welches widerſprechend iſt.

15. Wenn zwey gerade Linien auf derſelben Ebene perpendikular ſtehen, ſo ſind ſie parallel.

Fig. 910. Es ſeyen AB und CD perpendikular auf der Ebene FG.

Man ziehe BD und mache in der Ebene FG die Linie DE = AB, und ſenkrecht auf BD. Man ziehe auch BE, AE, AD.

CD iſt perpendikular auf der Ebene, alſo auch auf DB und DE (2). Ebenfalls iſt AB perpendikular aus BD und BE.

In den Dreyecken ABD und EDB ſind alſo in B und in D rechte Winkel. Es iſt auch AB = DE und BD iſt beyden gemein. Daher iſt AD = BE.

In den Dreyecken ABE und ADE, iſt DE = AB, AD = BE,, AE = AE, folglich auch < ADE = < ABE = R.

Es iſt alſo ED aus DA ſenkrecht. Es iſt aber auch ED auf DB und DC ſenkrecht.

Folglich liegen die Linien DB, DA, DC in einer Ebene (14). Auch lieget AB als Seite des Dreyecks ABD in der nämlichen Ebene (10).

Es ſind ABD und CDB rechte Winkel. Da alſo AB und CD in einer Ebene liegen, und beyde auf BD ſenkrecht ſtehen, ſo ſind ſie parallel.

16. Wenn zwey gerade Linien parallel ſind, und es wird von der einen zur andern eine dritte gerade Linie gezogen, ſo lieget dieſe mit den Parallellinien in einer Ebene Fig. 911.

Geſetzt es liegen die Parallellinien AB und CD in der Ebene GH, und es wird von der einen zur andern eine gerade Linie EF gezogen, ſo liegt der Punkt E und der Punkt F in der Ebene, folglich auch die ganze Linie EF (8).

17. Wenn von zwey Parallellinien die eine auf einer Ebene ſenkrecht ſtehet, ſo ſtehet auch die andere auf derſelben Ebene ſenkrecht. Fig. 910.

Es ſey AB ſenkrecht aus der Ebene FG, und parallel mit CD. Ziehe CD; ziehe DE ſenkrecht aus BD in der Fläche FG, und mache DE = AB. Ziehe BE, AE, AD, ſo ſind die Linien BD und AD mit AB und CD in einer Ebene (16).

Weil AB auf der Ebene FG ſenkrecht ſtehet, ſo ſind ABD und ABE rechte Winkel. Weil AB und CD parallel ſind, ſo ſind < ABD + < BDC = 2R. Da nun < ABD = R., ſo iſt auch < BDC = R. In den Dreyecken ABD und BDE iſt BD = BD, DE = AB, und < ABD = < BDE = R. Alſo iſt auch AD = BE.

In den Dreyecken ABE und EDA iſt AE = AE, DE = AB, AD = BE, folglich < EDA = < ABE = R.

Da nun ED auf DB und auf DA ſenkrecht ſtehet, ſo iſt ED ſenkrecht auf der Ebene, die durch DB und DA gehet (2). Alſo iſt auch ED ſenkrecht auf DC, die in der nämlichen Ebene lieget (13) oder umgekehrt, es iſt CD ſenkrecht auf DE. Da nun bewieſen, daß CD auch auf DB ſenkrecht iſt, ſo iſt CD ſenkrecht aus der Ebene FG, worin DB und DE liegen.

18. Wenn zwey gerade Linien mit einer dritten parallel ſind, ſollten auch alle 3 Linien nicht in einer Ebene liegen, ſo ſind ſie dennoch mit einander parallel.

Fig. 912. Es ſeyen BA und DC parallel unter ſich, und jede ſey auch parallel mit FE, die nicht in derſelben Ebene lieget. Nimm an, es gehe eine Ebene durch BA und FE, und eine andere durch DC und FE. Nimm in FE den willkürlichen Punkt G. In der Ebene, die durch BA und FG gehet, errichte GH ſenkrecht aus FE. Desgleichen in der Ebene, die durch DC und FE gehet, errichte GI ſenkrecht auf FE.

Stellet man ſich ferner eine Ebene vor, die durch GH und GI gehet, ſo iſt EF ſenkrecht auf derſelben (13.) Nun ſind AB und CD mit EF parallel. Alſo ſind AB und CD auch ſenkrecht auf der Ebene, die durch GH und GI gehet (17) und folglich parallel (15).

19. Wenn

19. Wenn zwey gerade Linien in einer Ebene einen Winkel machen, und zwey gerade Linien in einer andern, mit beyden vorigen parallel ſind, ſo entſtehen auf beyden Ebenen gleiche Winkel. Fig. 913.

Geſetzt die beyden Ebenen GH und IK liegen nicht in einer Ebene, ſo daß ſie nicht eine in die andere fallen, wenn man ſie weiter ausdehnet.

Nun ſey AB mit DE und BC mit EF parallel. Mache DE = AB, BC = EF. Ziehe AC, DF, AD, BE, CF.

Weil AB mit DE gleich und parallel iſt, ſo iſt auch AD mit BE gleich und parallel. Ferner weil BC mit EF gleich und parallel iſt, ſo iſt auch CF mit BE gleich und parallel. Weil AD und FC mit EB gleich und parallel ſind, ſo iſt auch AD mit CF gleich und parallel.

Deswegen iſt auch AC mit DF gleich und parallel. Da nun AC = DF, AB = DE, EF = BC, ſo iſt Δ ABC = Δ DEF. Folglich < ABC = < DEF.

20. Aufgabe. Wenn ein Punkt auſſerhalb einer Ebene gegeben iſt, eine gerade Linie ſtellen, die von dieſem Punkte ſenkrecht auf die Ebene falle. Fig. 914.

Es ſey gegeben die Ebene IK, und auſſerhalb derſelben der Punkt A.

In der Ebene ziehe willkürlich die gerade Linie BC. Aus A falle auf BC die ſenkrechte Linie AD. Iſt dieſe AD zugleich auf der Ebene ſenkrecht, ſo iſt das Verlangte geſchehen.

Iſt dieſes nicht, ſo errichte in der Ebene auf BC die ſenkrechte Linie DE vom Punkte D aus.

Aus A fälle auf DE die Linie AF ſenkrecht, ſo iſt AF die verlangte Linie, welche auf der Ebene IK ſenkrecht ſtehet.

Beweis. Ziehe durch F in der Ebene IK die GH mit BC parallel.

Vermöge der Conſtruktion iſt BC perpendikular ſowohl auf DA als auf DE, folglich auf der Ebene, die durch DA und DE geführet werden kann. Auf derſelben Ebene iſt alſo auch GH ſenkrecht, weil GH mit BC parallel iſt (17).

Weil GH auf der Ebene, die durch DA und DF gehet, perpendikular iſt, ſo iſt ſie auch perpendikular auf der geraden Linie AF, die in gedachter Ebene lieget, oder AF iſt auf GH perpendikular. AF iſt auch, vermöge der Conſtruktion auf DE perpendikular. Alſo iſt AB auf der Fläche IK perpendikular, worin DE und GH liegen (13).

Gegenwärtige Aufgabe läßt ſich geſchwinder auf eine mechaniſche Art auflöſen. Fig. 915.

Es ſeyen die Ebene EF und der Punkt A gegeben. Lege zwey Winkelhaken an einander, ſo daß jeder mit einem Rande auf der Ebene anliege, die beyden übrigen Ränder aber aneinander ſtoßen und aufrecht ſtehen. So bilden ſie eine Figur wie ABC, ABD, Rücke ſie in ſolcher Stellung, bis die beyden Rände AB den Punkt A berühren. Merke den Punkt B, wo die Ecken der Winkelhaken an einander ſtoßen.

Durch die Punkte A und B errichte einen dünnen Stift, ſo ſtellet er eine gerade Linie vor, die auf der Ebene EF ſenkrecht ſtehet.

Denn vermöge der Beſchaffenheit der Winkelhaken iſt AB perpendikular auf BC und auf BD, folglich auf der Ebene EF (13).

21. Auf-

21. Aufgabe. Ueber einem Punkte A Fig. 916, der in einer Ebene gegeben iſt, eine gerade Linie errichten, die auf der Ebene ſenkrecht ſtehe.

Auflöſung. Nimm auſſer der Ebene einen willkürlichen Punkt C, und von demſelben fälle auf die Ebene den Perpendikel CB. Trifft nun dieſer Perpendikel den gegebenen Punkt A, ſo iſt das Verlangte geſchehen.

Wo nicht, ſo ziehe durch A eine gerade Linie AD mit BC parallel. Dieſe AD wird auf der Ebene ſenkrecht ſtehen, weil ſie mit der ſenkrechten BC parallel iſt (17).

Mechaniſch wird die Aufgabe leicht durch zwey Winkelhaken aufgelöſet, die man, wie in voriger Aufgabe verbindet, auf die gegebene Ebene ſtellet, und an den Punkt A anrückt. Die verbundenen Ränder beyder Winkelhaken ſtellen alsdann das Perpendikel auf der gegebenen Ebene durch den Punkt A vor.

22. Auf einer Ebene können nicht über dem nämlichen Punkte zwey ſenkrechte gerade Linien errichtet werden. Fig. 917.

Geſetzt es könnten beyde Linien AD und AE über derſelben Ebne ſenkrecht ſtehen, ſo ſtelle man ſich eine andere Ebene vor, die durch AD und AE gehe. Dieſe wird die erſte in einer geraden Linie BC ſchneiden.

Ferner, da AD auf der Ebene FG ſenkrecht iſt, ſo iſt ſie auch auf BC, die in der Ebene lieget, ſenkrecht (2).

Da nun auch AE auf der Ebene FG ſenkrecht ſeyn ſoll, ſo muß ſie ebenfalls auf BC ſenkrecht ſeyn.

Folglich wären BAD und BAE beyde rechte Winkel, und einander gleich, welches unmöglich iſt.

23. Aus einem Punkte, der auſſerhalb einer Ebene lieget, können nicht zwey verſchiedene Perpendikel auf die Ebene fallen.

Fig. 918. Geſetzt aus dem Punkte E könnten auf die Ebene FG zwey Perpendikel EB und EC fallen, ſo ziehe durch B und C in der Ebene FG die gerade Linie AD, und ſtelle dir vor, es gehe eine Ebene durch EB, EC, BC, (10). Weil EB und EC auf der Ebene FG ſenkrecht ſind, ſo ſind ſie ſenkrecht auf AD (2). Alſo wären im Dreyecke EBC zwey rechte Winkel in B und in C, welches unmöglich iſt.

24. Wenn eine gerade Linie auf zwey Ebenen ſenkrecht iſt, ſo ſind beyde Ebenen parallel.

Fig. 919. Es ſey AB ſenkrecht aus den Ebenen CD und EF. Wir wollen annehmen, es könnten beyde Ebenen, wenn ſie hinlänglich ausgedehnet würden, irgendwo zuſammen treffen, ſo müßten ſie einander in einer geraden Linie GH ſchneiden. In dieſer nehme ich einen Punkt I, und ziehe auf den Ebenen CD und EF die geraden Linien AI und BI. Weil AB auf beyden Ebenen ſenkrecht ſtehet, ſo ſtehet ſie auch auf AI und BI ſenkrecht (2). Alſo wären im Dreyecke AIB zwey rechte Winkel, in A und B, welches unmöglich iſt.

25. Wenn in zwey Ebenen beyderſeits zwey zuſammen treffende Linien parallel ſind, ſo ſind beyde Ebenen auch parallel.

Fig. 920. In den Ebenen AB und CD ſey GE parallel mit HF und IE parallel mit KF. Von E fälle den Perpendikel EL auf die Ebene CD, und ziehe darin LM parallel mit FH.

Da nun EG parallel war mit FH, und LM parallel gezogen iſt mit FH, ſo iſt EG parallel mit LM (18), und EL, EG, LM, liegen in einer Ebene (16).

Weil

Weil EL auf CD ſenkrecht iſt, ſo iſt ELM ein rechter Winkel, und weil LM und EG parallel ſind, ſo ſind < ELM + < LEG = 2 R, folglich iſt < LEG = R.

Ziehe LN parallel mit FK, ſo iſt wiederum LN parallel mit EI, weil beyde mit FK parallel ſind. Ferner iſt EL ſenkrecht aus LN, weil ſie auf der Ebene CD ſenkrecht iſt (2). Da nun LN und EI parallel ſind, ſo ſind < ELN + < LEI = 2 R, folglich < LEI = R.

Es iſt alſo LE ſenkrecht ſowohl auf EI als auf EG, folglich auf der Ebene AB. Da nun auch EL auf die Ebene CD ſenkrecht gefället worden, ſo ſind beyde Ebenen AB und CD parallel (24).

26. Wenn zwey parallele Ebenen von einer dritten Ebene geſchnitten werden, ſo ſind die Durchſchnittslinien parallel.

Fig. 921. Geſetzt die Ebenen AB und CD werden von einer dritten Ebene GEFHG geſchnitten, dieſe letzte mag nun ſenkrecht oder ſchief gegen die beyden geſchnittenen ſtehen.

So ſind die Durchſchnitte EF und GH gerade Linien (12), die in der ſchneidenden Ebene GEFHG liegen. Sollten dieſe Linien EF und GH irgendwo zuſammen treffen, ſo müßten auch die Ebenen AB und CD, in denen ſie liegen, zuſammen treffen, welches aber nicht ſeyn kann, da die Ebenen AB und CD parallel ſind. Alſo können auch die geraden Linien EF und GH, die in einer Ebene EH liegen, nicht zuſammen treffen, und ſind daher parallel.

27. Wenn zwey gerade Linien von drey parallelen Ebenen geſchnitten werden, ſo ſind die abgeſchnittenen Theile proportioniret.

Fig. 922. Es ſeyen die geraden Linien AB und CD von den parallelen Ebenen GH, IK, LM geſchnitten in den Punkten A, E, B, C, F, D.

Ziehe AC und BD. Ziehe AD, welche in einem Punkte N durch die Ebene IK gehen wird. Ziehe EN und NF. Weil die Ebne IK mit LM parallel iſt, und das Dreyeck ABD beyde Ebenen ſchneidet, ſo iſt EN parallel mit BD. Ferner weil die Ebene IK mit der Ebne GH parallel iſt, und weil das Dreyeck DAC beyde Ebenen ſchneidet, ſo iſt NF parallel mit AC (26).

Alſo im Dreyecke ABD: AE : EB = AN : ND
und im Dreyeck DAC
iſt CF : FD = AN : ND.
Daher iſt AE : EB = CF : FD
oder auch AE : (AE + EB) = CF : (CF + FD).
Das iſt AE : AB = CF : CD.

28. Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene ſenkrecht ſtehet; ſo ſtehen alle Ebenen, die durch die ſenkrechte Linie geführet werden können, auf der erſten Ebene ſenkrecht.

Fig. 923. Es ſey AB ſenkrecht aus der Ebene CD. Durch AB werde willkürlich eine Ebene EH geführet, welche die Ebene CD irgendwo in einer geraden Linie EI ſchneiden wird. Aus einem Punkte F errichte über EI in der Ebene EH einen Perpendikel FG.

Da nun AB auf der Ebene CD ſenkrecht iſt, ſo iſt ſie auf der Linie EI ſenkrecht (2). Auf der nämlichen EI iſt auch FG ſenkrecht. Alſo ſind AB und FG parallel (41). Da AB aus der Ebene CD ſenkrecht iſt, ſo iſt auch ihre Parallele FG auf derſelben Ebene ſenkrecht (17). Und da jede gerade Linie wie FG in der Ebene EH, auf der Ebene CD ſenkrecht iſt, ſo iſt die Ebene EH auf der Ebene CD ſenkrecht (3).

29) Wenn zwey ſich ſchneidende Ebenen beyde auf einer dritten Ebene ſenkrecht ſind, ſo iſt auch die Durchſchnittslinie beyder erſten Ebenen auf der dritten Ebene ſenkrecht. Fig. 924.

Es ſeyen die Ebenen AB und CD beyde ſenkrecht auf der Ebene EF, und GH ſey die Durſchnittslinie der Ebenen AB und CD.

Geſetzt es wäre GH nicht ſenkrecht auf der Ebene EF, folglich auch nicht auf den Durchſchnittslinien AG und CG. So errichte aus dem Punkte G in der Ebene AB die GI ſenkrecht auf GA, und in der Ebene CD die GK ſenkrecht auf CG.

Da nun die Ebenen AB und CD auf der Ebene EF ſenkrecht ſind, ſo müſſen auch GI und GK, welche in den Ebenen liegen, und auf den Durchſchnitten ſenkrecht ſind, auf der nämlichen Ebene EF ſenkrecht ſtehen (3). Alſo ſtänden über dem Punkte G auf der Ebene EF zwey ſenkrechte Linien, welches unmöglich iſt (22).

30. Wenn zwey parallele Ebenen gegeben ſind, und es werden von ſo viel Punkten der einen Ebene als man will, auf die andere Ebene Perpendikel gefället, ſo ſind alle dieſe Perpendikel gleich. Fig. 930.

Man nehme in der Ebene AB die Punkte E und G, und ziehe EF und GH ſenkrecht auf die Ebene CD, welche mit AB parallel iſt, ſo ſind GH und EF parallel (15). Es gehe durch GH und EF eine Ebene, und ſchneide die beyden andern in EG und EH, ſo ſind dieſen beyden Linien EC und FH parallel (26).

Alſo iſt EH ein Parallelogramm, und folglich iſt GH = EF.

Eben ſo läßt ſich von allen möglichen ſenkrechten Linien, die von einer der parallelen Ebenen auf die andere gefället werden, beweiſen, daß ſie gleich ſind.

II. Aus den Neigungen von zwey geraden Linien in einer ſchiefen Ebene, und derſelben Winkel die Neigung der Ebene zu finden. Fig. 932. (Käſtner geom. Abh. 2. Samml. S. 1).

1) Die Linien ſind OH; OG ihr Winkel HOG = m;

2) Man nehme an, die ſchiefe Ebene, in welcher dieſe beyden Linien ſind, werde von einer horizontalen Ebene in GH geſchnitten. Auf die horizontale Ebene falle OK vertical, und KI ſenkrecht von K auf GH.

3) Die Neigungen der Linie ſind OGK = p; OHK = q;

Unmittelbar iſt nichts gegeben als die genannten drey Winkel.

4) Man nenne OK = u;

5) Alſo OG = u. coſec p; OH = u. coſec q
KG = u. cot p; KH = u. cot q.

6) Die geſuchte Neigung iſt OIK = x.

7) Man nehme u nach Gefallen an.

Dieſes iſt verſtattet; weil man die horizontale Ebene (2) ſo nahe an O oder ſo weit als man will davon legen darf, und u dieſer Ebene Abſtand von O iſt; allemal iſt HG horizontal.

Selbſt wenn man die horizontale Ebene durch O legte, wäre u = o und die Linien in (5) jede auch = o; weil G, H, K, zuſammen in O fielen.

Dieſen Fall bey Seite geſetzt, hat man im Dreyecke HOG, den genannten Winkel (1) und ſeine Schenkel (5).

Alſo Winkel OGH, OHG; und Grundlinie GH.

Und

Und Höhe OI aus Winkeln an der Grundlinie, und den Schenkeln. Folglich $\frac{OK}{OI} = \sin x$.

8) Auch im Dreyecke HKG, den genannten Winkel, und die beyden KHG; KGH; aus den drey Seiten.

9) Folglich den horizontalen Winkel HKG, welcher dem HOG in der ſchiefen Ebene gehört.

10) Das alles läßt ſich aus angenommenen u, durch die gemeine Trigonometrie finden.

11) Eigentlich geht u aus der Rechnung weg, es hat nur gedient trigonometriſche Linien zu berechnen. So beſtätiget auch die Rechnung, daß man dafür annehmen kann was man will (7).

12) Formeln ſtellen den Gang der Rechnung ſo dar:

13) $HG^2 = u^2.(\operatorname{coſec} p^2 + \operatorname{coſec} q^2 - 2.\operatorname{coſec} p.\operatorname{coſec} q.\operatorname{coſ} m)$.

Ferner

$$\operatorname{tang} OHG = \frac{u.\operatorname{coſec}.p.\sin m}{u.\operatorname{coſec} q - u.\operatorname{coſec} p.\operatorname{coſ} m} = \frac{\operatorname{coſec} p.\sin m}{\operatorname{coſec} q - \operatorname{coſec} p.\operatorname{coſ} m}.$$

Und, nur p und q verwechſelt

$$\operatorname{tang} OGH = \frac{\operatorname{coſec} q.\sin m}{\operatorname{coſec} p - \operatorname{coſec} q.\operatorname{coſ} m}.$$

14) Nun $OI = u.\operatorname{coſec} p.\sin OGH$
$= u.\operatorname{coſec} q.\sin OHG$.

15) Und $\sin x = \frac{u}{OI}$.

16) Aus (14) folgt, daß $\operatorname{coſec} p.\sin OGH = \operatorname{coſec} q.\sin OHG$ ſeyn muß, wenn nicht zwiſchen den drey Winkeln (1; 3) eine Gleichung ſtatt finden ſoll, die alsdann nicht erlaubte alle drey wie man wollte anzunehmen, ſondern durch zwey den dritten beſtimmte.

Es iſt aber

$$\begin{aligned} OK : OH &= 1 : \operatorname{coſec} q \\ OH : OG &= \sin OGH : \sin OHG \\ OG : OK &= \operatorname{coſec} p : 1 \\ \hline 1 : 1 &= \operatorname{coſec} p.\sin OGH = \operatorname{coſec} q.\sin OHG. \end{aligned}$$

alſo das wahr, was im Anfange dieſes Abſatzes erfodert wird.

17) Aus (15) hat man

$$\sin IOG = \frac{OI}{OG} = \frac{\sin x}{\operatorname{coſec} p} \text{ und}$$

$$\sin IOH = \frac{\sin x}{\operatorname{coſec} q} = \sin x \sin q$$

für die Linie welche mit der Ebene einerley Neigung hat.

Für $p = q$.

18) Iſt in (13)

$$\text{tang } OHG = \frac{\text{ſin } m}{1 - \text{coſ } m} = \text{tang } OGH = \frac{\text{ſin } m}{2. \text{ ſin } \frac{1}{2} m^2} = \frac{\text{coſ } \frac{1}{2} m}{\text{ſin } \frac{1}{2} m}$$

$= \text{cot } \frac{1}{2} m$

wie gehörig, weil dann OG = OH (4).

Alſo (14) $OI = u. \text{ coſec } p. \text{ coſ } \frac{1}{2} m$ und (15) $\text{ſin } x = \frac{\text{ſin } p}{\text{coſ} \frac{1}{2} m}$.

Rückkehr zum Allgemeinen.

19) Man braucht eigentlich nichts zu berechnen als eine der beyden Tangenten (13); aus ihnen giebt ſich x (15).

20) Die Coſecanten durch die Sinus weggeſchafft, hat man

$$\text{tang } G = \frac{\text{ſin } m}{\frac{\text{ſin } q}{\text{ſin } p} - \text{coſ } m}$$

$$\text{tang} = H \frac{\text{ſin } m}{\frac{\text{ſin } p}{\text{ſin } q} - \text{coſ } m}$$

und nun $\text{ſin } x = \frac{\text{ſin } p}{\text{ſin } G} = \frac{\text{ſin } q}{\text{ſin } H}$.

21) Exempel. $p = 30°$; $9 = 20°$; $m = 50°$;

$\log \text{ſin } q = 9,5340517$
$\log \text{ſin } p = 9,6989700$

$\log \left(\frac{\text{ſin } q}{\text{ſin } p}\right) = 0,8350817 - 1$

gehört zu $= 0,68404$
$- \text{coſ } m = - 0,6427876$

$0,0411524$
$\log \text{ſin } m = 9,8842540$
$\log 0,041252 = 0,6154450 - 2$

$\log \text{tang } G = 11,2688090$
$G = 86° 55' 10'' -$
$10 + \log \text{ſin } p = 19,6989700$
$\log \text{ſin } G = 9,9993720$

$\log \text{ſin} x = 9,6995980$
$x = 30° 2' 50'' +$

22) Ich gebe aus Gardiners Tafeln die Winkel innerhalb 10″ an, und nenne die Decade von Secunden, welcher der Winkel am nächſten kömmt; er mag mehr oder weniger betragen, welches ich durch + oder — anzeige.

23) Dieſe Rechnung iſt doch ſo kurz und bequem, daß man ſich lieber mit ihr bekannt machen als die Mühe anwenden ſollte, zwey Linien auf der Ebene zu ſuchen, die gleiche Neigung haben, und dann freylich eine kürzere Rechnung geben (18).

24) Noch

24) Noch hat man für das Exempel (21) nach (17).

$$\log \sin x = 9,6995980$$
$$\log \sin q = 9,5340517$$
$$\log \sin IOH = 9,2336497$$
$$IOH = 9^\circ\, 51'\, 40'' -$$
$$IOG = 40\ \ 8\ \ 20\ +$$

25) Die Figur ſtellt die horizontale Ebene durch HG unter O, des gegebenen Winkels Spitze vor. Ginge ſie durch O, ſo dürfte man ſich nur GO, HO in OL, OM verlängert vorſtellen, ſo hätte, gegen die horizontale Ebene durch O, noch OL die Neigung p; OM die Neigung q, (3) und es wäre LOM = m.

26) Nun iſt aus Betrachtung der Figur ohne Rechnung deutlich, daß die Ebene LOM gegen den Horizont durch O, vollkommen die Neigung haben muß, welche die Ebene HOG, einerley mit jener, gegen den parallelen Horizont durch HG hat.

27) Wenn im Horizonte durch O, die Punkte H, I, K, G, alle in O zuſammenfallen, (7) ſo giebt es freylich keine ſolche Figur mehr, wie gezeichnet iſt. Begreiflich aber kann man anfangs einen Horizont in einer willkürlichen Entfernung unter O legen, und nun ſich ſelber parallel näher und näher an O rücken laſſen, die Figur OKHIG bleibt ſich immer ähnlich, wie daraus erhellet, daß u willkürlich iſt (7; 11), alſo wenn ſie verſchwindet, alles in O zuſammen fällt, ſo verſchwinden die Linien und Winkel noch in den unveränderlichen durch p, q, m, gegebenen Verhältniſſen, welche die Formeln darſtellen. Man kann alſo nach (20) tang G, tang H, berechnen, wenn gleich das Dreyeck OGH in den Punkt O zuſammen gegangen iſt, und es alſo keine ſolche Winkel mehr giebt. Auch enthalten die Formeln für dieſe Tangenten, die Linien OG, OH, nicht, und bleiben alſo völlig dieſelben, wenn dieſe Linien verſchwinden.

Daß dieſe Schlüſſe aus der dargeſtellten Figur noch bleiben, wenn auch die Figur nicht mehr ſtatt findet, ſchiene mir bey dieſer Veranlaſſung bemerkungswerth. Es findet allemal ſtatt, wenn die Figur ſich ſelbſt immer ähnlich, bis zum Verſchwinden kleiner wird.

Wer ſich in dieſe Subtilität nicht einlaſſen will, der ſiehet aus (26) wie die Neigung der Ebene LOM gegen den Horizont durch O, gefunden wird.

Ein mehreres von ſchiefen Ebenen findet man in Käſtners aſtronomiſchen Abhandl. 1. Samml. S. 51 — 62.

Ebener geradlinichter Winkel, ſiehe Winkel.

Ebener Ort, (Locus planus) heißt der Ort an einem Cirkel; ſiehe d.

Eccentricität heißt im allgemeinſten Verſtande, die Entfernung der Mittelpunkte zweyer einander ganz oder zum Theil einſchlieſſender Rundungen, Kreiſe, Kugeln.

Eccentriſche Cirkel, ſiehe Cirkel.

Ecke iſt die Spitze eines Winkels, wo 2 Linien zuſammenſtoßen. Man kann aber entweder das innere und alſo den eigentlichen Winkel, oder auch die äuſſere Schärfe und Spitze darunter verſtehen.

Ecke, körperliche, ſiehe Winkel, körperlicher.

Eckicht coniſche Körper, eckichte Kegel, ſo heißen diejenigen Körper, die man unter den Nahmen Pyramiden betrachtet.

Eckicht ellipſoidiſche Körper, ſiehe ellipſoidiſche Körper.

Eckicht ſphäriſche Körper, ſiehe Körper ſphäriſche.
Eckichte cylindriſche Körper, eckichte Walzen, iſt der Nahme des Prisma.
Eckichte Spitzſäulen, ſiehe Pyramiden.
Eckichte Walzen, ſiehe Prisma.
Eckichter Kegel, ſiehe Pyramide.
Eckichter Körper, ſiehe Körper eckichter.
Eckſäule, ſiehe Prisma.
Efficienten heißen bey der Multiplication die gegebenen Zahlen, die man eigentlich die Faktoren nennt.
Effectio geometrica, ſiehe Conſtruktion der Gleichungen.
Eichen, ſiehe Aychen.
Eigenſchaften der Linien einer jeden Ordnung, ſiehe krumme Linien.
Eigenſchaften der Zahlen, ſiehe Zahlen ihre Eigenſchaften.
Eilfeck, *Hendecagonum*, heißt eine Figur, die, die von eilf graden Linien eingeſchloſſen iſt; und zwar wird es, wenn alle Seiten und Winkel gleich ſind, ein reguläres, im gegentheiligen Falle aber ein irreguläres genannt. Die Summe aller Winkel deſſelben beträgt 9. 180° = 1620°; alſo hält einer im regulären $147\frac{3}{11}$, und der Winkel am Mittelpunkte deſſelben $32\frac{8}{11}$ Grad. Aus dieſen Winkeln, und entweder der Seite oder dem Halbmeſſer des Kreiſes, worinnen es beſchrieben wird, iſt das reguläre Eilfeck ſo leicht als jede andere Figur zu beſchreiben. Man ſehe: Vielecke in den Cirkel VI; und Vielecke über eine Linie zu beſchreiben IX. die geometriſche Auflöſung aber ſetzt die Conſtruktion einer Gleichung vom 11ten Grade voraus. Das Verhältniß des Halbmeſſers zur Seite des Eilfecks iſt ſehr nahe
1: 0,56,346511368285.
Einander decken (das), *Congruentia*, bedeutet in der Geometrie die Vereinigung der Gleichheit und Aehnlichkeit zweyer Figuren oder Linien. Daher ſagt man von 2 Figuren, daß ſie beyde einander decken, wenn ſie zugleich einander gleich und ähnlich ſind. Das Zeichen der Congruenz iſt $\cong$.
Einander deckende Figuren, ſiehe Figuren.
Einander entgegen geſetzte Kegelſchnitte, ſiehe Kegelſchnitte.
Einbringen, ſiehe Einbringung.
Einbringung der Oerter bis an einen Gang.

1. Das Einbringen eines Orts bis an einen Gang heißt die Länge, in der das Ort bis an den überſetzenden Gang zu treiben iſt.

2) Das kürzeſte Einbringen iſt die Länge, die vom ganzen Orte bis an den Gang in einem Streichen ſich erſtreckt, das von dem Streichen des Ganges um 6 Stunden unterſchieden iſt.

3. Das Einbringen iſt ſöhlig oder mit gewöhnlicher Röſche, nachdem man die ſöhlige Länge vom ganzen Orte bis an den Gang, oder die in Rückſicht der Röſche zukommende verſteht.

4. Wird das Ort bis an den Gang in dem Streichen, das es ſchon vorher hatte, fortgetrieben: ſo geſchieht das Einbringen nach des Orts Streichen.

5. Auf einem Gange, deſſen Streichen und Fallen bekannt, wird ein Ort getrieben: Man ſoll das ſöhlige Einbringen bis an einen überſetzenden Gang, deſſen Lage man ebenfalls weiß, finden.

Auf-

Auflöſung. Man nehme Vor Ort auf ſeines Ganges einem Saalbande einen Punkt A an, und verrichte bis in einen höhern Punkt B auf dem gleichnamigem Saalbande des überſetzenden Ganges einen Zug.

Daraus erhält man die Data, die zu Findung des Geſuchten nöthig ſind; und ſelbiges wird eben ſo gefunden, als ob man die ſöhlige Entfernung eines Punktes der Kreuzlinie von dem Punkte A zu ſuchen hätte.

6. Das Einbringen des Orts im (5) mit gewöhnlicher Röſche zu finden.

Auflöſung.

I. Man ſuche nach (5) das ſöhlige Einbringen des Orts;

II. Dann zu 80 Zolle ſöhliger Länge, der Anzahl Zolle der ihr zukommenden Röſche, (welche entweder = 1 Zoll oder = 2 Zoll iſt) und zu dem ſöhligen in Zollen ausgedrückten Einbringen die vierte geometriſche Proportionalzahl.

III. Nun multiplicire man das ſöhlige Einbringen in den Coſinus des Röſchenwinkels, und dieſes Produkt in den Coſinus des vorliegenden Ganges Fallen;

IV. Dividire, was man ſo erhält, durch den Sinus der Differenz des überſetzenden Ganges Neigungswinkels und des Röſchenwinkels;

V. Dieſen Quotienten addire man zu der in II gefundenen Proportionalzahl, wenn der Gang dem Orte zufällt; oder man ſubtrahire ihn davon, wenn der Gang dem Orte entfällt:

VI. So hat man das Verlangte.

7. Ein Ort wird in einem gegebenen Streichen nach einem bekannten vorliegenden Gange getrieben:

Man ſoll das ſöhlige Einbringen beſtimmen.

Auflöſung.

I. Vor Ort, etwa auf der Sohle, nehme man einen Punkt A an;

II. Verrichte von dieſem bis in einen höhern Punkt B auf dem vorliegenden Gange einen Zug, und noch durch etliche, auf ihm liegende Punkte, wenn es angeht.

III. Berechne der AB Streichen, Sohle und Seigerteufe,

IV. Auch des Ganges Lage, wenn man auf ihm 3 nicht in gerader Linie liegende Punkte hat beſtimmen können, ſonſt muß man mittelſt Compaß und Gradbogen des Ganges Streichen und Fallen zu erfahren ſuchen;

V. Ferner berechne man aus des Ganges und der AB Streichen einen ſöhligen Winkel = μ; (ſiehe Winkel ſöhliger 1. oder 4.)

VI. Ingleichen einen, = ν, aus des Orts Streichen und dem der AB.

VII. Nun multiplicire man S. AB in ſin μ;

VIII. Hernach mache man wieder ein Produkt, deſſen Faktoren Sg. AB, tg. μ und die Cotangente des Ganges Fallen ſind.

IX. Fällt nun der Gang dem Orte zu: ſo ziehe man von jenem Produkte (VII) dieſes (VIII) ab;

X. Entfällt der Gang aber dem Orte: ſo addire man beyde Produkte zuſammen:

XI. Was IX oder X giebt, dividire man durch den Sinus der Differenz der in V und VI berechneten Winkel:

XII. So hat man das Verlangte.

XIII. Vorſtehende Regeln in eine Formel zuſammen zu ziehen.

Da

Da hat man das ſöhlige Einbringen.

$$= \frac{\text{S. AB} \times \sin\mu - \text{Sg. AB} \times \text{tg.}\ \mu \times \text{Cot F}}{\sin(\mu - \nu)}$$

für den Fall im IX Abſatze; aber

$$= \frac{\text{S. AB} \times \sin\mu + \text{Sg. AB} \times \text{tg.}\ \mu \times \text{Cot F}}{\sin(\mu - \nu)}$$

für den Fall im X Abſatze; wo F = des Ganges Neigung.

8. Dieſes Orts (7) Einbringen mit gewöhnlicher Röſche findet ſich wie im (6).

9. Genannten Orts kürzeſtes Einbringen zu finden.

Auflöſung.

I. Man thue, was I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, und X das (7) verlangt:

II. Was man nach IX erhält, iſt das kürzeſte Einbringen, wenn der Gang dem Orte zufällt; was aber X giebt, iſt das Verlangte, wenn der Gang dem Orte entfällt.

III. Auf die Art findet ſich das kürzeſte ſöhlige Einbringen; aber daraus erhält man das kürzeſte mit gewöhnlicher Röſche, wenn wie im (6) verfahren wird.

IV. Die Formel zu jenem iſt im XIII Abſatze des 7 enthalten, wenn man den Nenner wegläßt.

10. Nach nächſt vorſtehenden (9) findet ſich allemal des Ortes Einbringen, bis wo mit deſſen Sohle der Gang erbrochen wird.

11. Heißt e das ſöhlige Einbringen, é, das mit gewöhnlicher Röſche, und ϑ der Röſchenwinkel: ſo iſt

$$\acute{e} = e\left(\sec\vartheta + \text{Coſin}\ \vartheta\ \frac{\text{Coſin F}}{\sin(F - \vartheta)}\right)$$

wenn der Gang dem Orte zufällt; aber

$$\acute{e} = e\left(\sec.\vartheta - \text{Coſin}\ \vartheta\ \frac{\text{Coſin F}}{\sin(F - \vartheta)}\right)$$

in ſo ferne der Gang dem Orte entfällt.

12. Bringt man des vor Ort angenommenen Punkts A (7. I.) Oertung zu Tage aus, und beſtimmt auf des vorliegenden Ganges Ausſtreichen, einen Punkt B: ſo läßt ſich das ſöhlige Einbringen

$e = \text{S. AB} - \text{Sg. AB} \times \text{Cot F}$

finden, wenn der Gang dem Orte zufällt; entfällt er aber ſelbigem; ſo iſt

$e = \text{S. AB} + \text{Sg. AB} \times \text{Cot F.}$

Das Einbringen mit gewöhnlicher Röſche kann man nun nach vorigem (11) oder (6) ſuchen.

13. Bey dieſen Aufgaben kommt ſtillſchweigend die Frage vor: ob denn etwa auch der Gang ſchon mit dem Orte überfahren worden ſey? Die Entſcheidung iſt folgende:

Erſtlich: Wenn der Gang dem Orte zufällt.

Iſt der Gang	und das Streichen von AB (7. II. und 12.)	ſo iſt der Gang ſchon mit dem Orte überfahren.
rechtfallend,	weſtlich:	
widerſinnig,	öſtlich:	

Zweytens: Wenn der Gang dem Orte entfällt.

Iſt der Gang	und das Streichen von AB	ſo hat man ihn ſchon mit dem Orte überfahren.
rechtfallend,	öſtlich:	
widerſinnig,	weſtlich:	

Wo nun der Gang überſetzt hat, kann man beſtimmen, wenn man von A vor Orte ſo viel ſöhlig zurückmißt, als das nach (7) oder (9) oder (12) gefundene ſöhlige Einbringen ausweißt; nämlich: wenn der Gang dem Orte zugefallen iſt, muß man das ſöhlige Einbringen nehmen, das man für den Fall des X Abſatzes in (7) findet, hingegen aber für den Fall des IX Abſatzes (7), wenn der Gang dem Orte entfallen iſt.

14. Beyſpiel zum vorigen und (7).

1) Ein Schacht iſt auf einem edlen rechtfallenden Gange geſunken; man kann aber ſelbigen der Waſſer wegen nicht weiter niederbringen. Indeß wird ein Stolln tiefer, als man abgeſunken hat, nach dieſem Schachte getrieben. Wäre nun mit dieſem der Gang überfahren: ſo könnte man dann mit Auslängen und Ueberſichbrechen auf dieſem Gange den Schacht löſen.

In dieſer Rückſicht hat der Markſcheider anzugeben, I) wo der Gang mit dem Stolln erbrochen iſt oder wird, und II) wie weit man auf dem Gange auszulenken und bis in den Schacht in die Höhe zu brechen habe.

2) Dieſe Angaben nun zu bewerkſtelligen, nimmt man auf der Stollnſohle entweder vor dem Stollorte, oder wenn man Grund hat zu vermuthen, daß der Gang ſchon überfahren iſt, da wo er ſcheint überfahren zu ſeyn, einen Punkt A an, und verrichtet von ſelbigem den Stolln vor und weiter bis in den Schacht in einen Punkt B einen Zug, wie es nach (7) im II. Abſatze verlangt wird.

Geſetzt nun, durch Berechnung des Zuges hätte man gefunden:

Sg. AB = 1,256 Lr.
Strſ. AB = 3,831 „
Strc. AB = −2,988 „

Dann aber ferner durch Berechnung, oder Zeichnung, oder Abnehmung

des Stollns Str. B. A weg = $4^h\ 3\frac{3}{4}$ weſtlich
des Ganges Streichen = $12^h\ 6$, und
des Ganges Fallen = 40° recht.

Nun hat man zu berechnen: Erſtlich der AB Sohle.

$3,831^2 = 14,676561$
$2,988^2 = 8,928144$
Summe = 23,604705
Wurzel = 4,858 Lr. = S. AB.

Zweytens, der AB Streichen

log 3,831 = 0,5833122
log 2,988 = 0,4753806
S. = 0,1079316 = log tg. des Str.

Giebt 52° 3', wenn tang poſitiv wäre. Weil aber Strſ: AB poſitiv, und Strc. AB negativ: ſo iſt die Tangente des Streichens verneint: folglich das Streichen = 180° − 53° 3' = 127° 57' = $8^h\ 4\frac{1}{2}$ öſtlich.

Drittens, den Winkel μ.

$$
\begin{array}{l}
12^h\ 6 \\
\underline{8^h\ 4\tfrac{1}{4}} \\
4^h\ 1\tfrac{3}{4} = 62^\circ\ 20'\ 37\tfrac{1}{2}''
\end{array}
$$

Viertens, den Winkel ν,.

$$
\begin{array}{l}
8^h\ 4\tfrac{1}{4} \\
\underline{4^h\ 3\tfrac{3}{4}} \\
4^h\ 0\tfrac{1}{2} = 60^\circ\ 56\tfrac{1}{4}'.
\end{array}
$$

Daher

$$
\begin{array}{rcl}
\mu & = & 62^\circ\ 20'\ 37\tfrac{1}{2}'' \\
-\nu & = & -60^\circ\ 56'\ 15'' \\
\mu - \nu & = & 1^\circ\ 24'\ 22\tfrac{1}{2}''
\end{array}
$$

Da der AB Streichen öſtlich iſt, und der Gang recht fällt, überdies ſich nach dem Orte zu verflächet: ſo liegt A noch vor dem Gange. Wäre daher A vor ganz Ort: ſo würde der Gang noch zu erbrechen ſeyn. Es ſey aber A nicht vor ganz Ort, ſondern daſſelbe ſey von dieſem Punkte gegen Morgen zu noch 50 Lachter ſöhlig entfernt. Nun zu finden, ob und wo der Gang überſetzt hat, berechne man nach der erſten Formel XIII Abſatz. (7).

Fünftens, das ſöhlige Einbringen des Orts von A weg.

$$
\begin{array}{rcl}
\log S.\ AB & = & 0,6864575 \\
\log \text{ſin}\ \mu & = & 9,9473020 - 10 \\
\hline
M & = & 0,6337595 \\
\log S.\ AB & = & 0,0989896 \\
\log \text{tg.}\ \mu & = & 10,2812135 - 10 \\
\log \text{Cot}\ F & = & 10,0761865 - 10 \\
\hline
N & = & 0,4563896 \\
\log(\mu - \nu) & = & 0,3896818 - 2 = Q \\
\hline
M - Q & = & 2,2440777 \\
\hline
N - Q & = & 2,1667078 \\
M - Q \text{ gehört zu} & & 175,42 \text{ Lr.} \\
N - Q \ldots\ldots & & 146,79 \text{ Lr.} \\
\hline
\text{ſöhl. Einbr.} & = & 28,63 \text{ Lr.} \\
 & = & 28 \text{ Lr. } 5,04 \text{ Achtellr.}
\end{array}
$$

Da das Ort 50 Lachter von A weggetrieben iſt, und das ſöhlige Einbringen nur 28 Lachter, 5,04 Achtellachter beträgt, ſo muß der Gang in nur genannter ſöhligen Länge von A aus ſchon mit dem Orte erbrochen ſeyn. Mißt man daher ſo viel von A weg auf dem Stolln in dem Streichen Oſt $4^h\ 3\tfrac{3}{4}$: ſo wird man den Punkt haben, wo der Gang überſetzen muß. Geſetzt, man ſähe da nichts weiter, als daß Klüfte aus dem liegenden oder der Südoſtſeite des Stollns herauskämen, welche ohngefähr $12^h\ 6$ ſtreichen: ſo läßt ſich nichts anders vermuthen, als daß der Gang da in Klüfften überſetzt hätte, zumal

wenn

wenn weder vor noch nach dem Endpunkte der 28 Lachter kein Gang das Ort durchſchneidet, den man für den zu erbrechenden zu halten Grund hat.

3. Das war die I Angabe. Die II zu bewerkſtelligen, und alſo zu erfahren, wie weit man auszulängen und über ſich zu brechen habe, erinnere man ſich, daß des Stollns Streichen, von A nach dem Orte zu, OR, $4^h\ 3\frac{3}{4}$, und der AB Streichen OR. $8^h\ 4\frac{1}{4}$ war: daher liegt B auf der Südoſtſeite des Stollns: folglich muß da auf dem Gange oder den Klüfften (nachdem nun der Gang ſelbſt oder in Klüfften überſetzt hat) hinausgebrochen werden. Wie viel? findet ſich nach der Formel:

$$\text{Sg. AB Cot F} \times \text{Cot}\,\mu + e \times \frac{\sin v}{\sin \mu},$$

wo die Bedeutung der Buchſtaben eben die iſt, wie ſie im (7) und (11) war.

Es iſt aber

log Sg. AB	=	0,0989896
log Cot F	=	10,0761865 — 10
log Cot μ	=	10,7187865 — 10
		0,8939626
Gehört zu		7,8336
log ſin v	=	9,9415407 — 10
ſin μ	=	9,9473020 — 10
		0,9942387 — 1
log e	=	1,4568213
		1,4510600
Gehört zu		28,253
		7,8336
		36,0866 Lr. = 36 Lr. 0,693 Achtellr.

So viel muß man in dem Streichen OR. 12^h 6 auffahren; dann aber in der Falllinie des Ganges in die Höhe brechen. Wie hoch? berechnet man durch die Formel: $\frac{\text{Sg. AB}}{\sin \text{F}}$, wenn der Punkt B auf der Schachtsſohle angenommen iſt; aber wenn er ſich höher im Schachte befindet, durch $\frac{\text{Sg. AB} - \text{P}}{\sin \text{F}}$, wo P die ſeigere Höhe bedeutet, um welche B über des Schachts Sohle liegt.

Wir wollen annehmen, B läge auf des Schachts Sohle, da denn die Berechnung der flachen Höhe des Ueberſichbrechens folgende iſt:

log Sg. AB	=	10,0989896 — 10
log ſin F	=	9,8080675 — 10
		2,2609221
Gehört zu		1,954 Lr.
	=	1 Lr. 7,632 Achtellr.

So viel hat man ſich bis B nach des Ganges Fallen zu überhauen.

15. Beſtimmung des ſöhligen Einbringens nach Beyers Verfahren in etwas verbeſſert.

Da verrichte man ebenfalls von A bis B (7) einen Zug;

Finde des Ganges Streichen und Fallen;

Rechne den Zug aus;

Lege ihn zu; wie in der 933 Figur ADC vorſtellen mag.

Durch C, als des Punktes B Projektion auf der ſöhligen Ebene der Zulage, ziehe man eine Linie KF in des Ganges Streichen;

Dann durch C auf FK ein Perpendikel QN;

Nun multiplicire man der AB Seigerteufe in die Cotangente des Ganges Fallen.

Nehme auf dem verjüngten Maßſtabe der Zulage eine Linie ab, die ſo viel verjüngte Lachter und Achtellachter enthält, als das nur gefundene Produkt angiebt.

Trage dieſe Linie, wenn der Gang dem Orte zufällt, von C bis G und ziehe durch G eine Linie ML parallel mit KF; entfält er aber dem Orte, ſo trage man die abgenommene Linie von C bis P, und ziehe durch P eine Parallele RP mit FK;

Hierauf ziehe man DR durch A in des Ortes Streichen.

Im erſtern Falle wird DR die LM in E ſchneiden, im letztern aber in R; daher iſt in jenem Falle AE, in dieſem hingegen AR das ſöhlige Einbringen, deren Größe man nun leicht nach dem verjüngten Maßſtabe des Grundriſſes angeben kann; auch die des kürzeſten Einbringens, wenn man von A auf LM oder RP das Loth AH oder Ah fällt.

Fiele der Gang ſeiger: ſo wäre das ſöhlige Einbringen nach des Ortes Streichen = AS, und das kürzeſte = AT.

16. Für dieſen Fall des Ganges Lage kann das ſöhlige Einbringen nach des Orts Streichen durch die Formel: $\frac{\text{S. AB} \times \sin \mu}{\sin (\mu - \nu)}$, und das kürzeſte durch die S. AB $\times$ ſin μ, gefunden werden, (7).

Einer, Fingerzahlen, Digiti. Um eine Menge, vornehmlich eine große Summe, deutlich überſehen zu können, ſammlet man ſie gleichſam in Haufen, die Haufen in größere Haufen, die größeren in noch größere u. ſ. w., und giebt die ganze Menge nachgehends dadurch an, daß man ſagt, wie viele der größten, wie viele der nächſt größten, wie viele der folgenden Haufen u. ſ. w. und endlich wie viele Dinge, die keinen der kleinſten Haufen mehr zuſammen ausmachen, vorhanden ſind. Jede Zahl die eine Menge, welche noch keinen der kleinſten Haufen ausmacht, ausdrückt, heißt im allgemeinſten Verſtande des Worts Einer. Z. B. Wenn wir ſprechen, dreytauſend, fünfhundert, ſiebzig, ſechs, ſo geben wir zu verſtehen, daß, drey der dermaligen größten, fünf der nächſt kleinern, ſieben der kleinſten Haufen, und noch ſechs übrige Dinge vorhanden ſind, die nicht mehr einen der kleinſten Haufen ausmachen. Die Zahl 6 iſt alſo dermalen die Einerzahl. In dieſem Beyſpiele und gewöhnlich, rechnet man zehn auf einen kleinſten Haufen, 10 dieſer Haufen auf einen größern, 10 der größern auf einen abermals größern u. ſ. w. Gewöhnlich heißt man daher die Zahlen, die kleiner ſind als 10, Einer, die Haufen aber Zehner, Hunderter, Tauſender u. ſ. w. Nimmt man eine andere Gränze des Zählens an, wer z. E. Herr Bernouth in ſeiner Centeſimalrechnung (ſiehe Rechnung) die geringſten Haufen aus 100 beſtehen läßt,

läßt, ſo ſind alle Zahlen, die weniger als hundert ausdrücken, Einer. Bey der gewöhnlichen Art, Zahlen zu ſchreiben, bedeutet die erſte Ziffer auf der rechten Hand die Einer, die folgende die kleinſten Haufen, d. i. nach unſerer Art zu zählen, Zehner, die folgende die größern Haufen oder Hunderte ꝛc.

Einerley Verhältniſſe, ſ. ähnliche Verhältniſſe.

Einfach bewegliches Winkelmaß, ſiehe Winkelmaß.

Einfach gekrümmte Linie iſt eine ſolche, die in einer Ebene liegt oder doch liegen kann.

Einfache Cycloide, ſiehe Radlinie.

Einfache Faktoren, ſiehe Faktoren.

Einfache Gleichung, ſiehe Gleichung.

Einfache Größe, ſiehe Größe.

Einfache Irrationalgröße, ſiehe Monomium irrationale.

Einfache Polygonalzahl, ſiehe Polygonalzahl.

Einfache Rationalgröße, ſiehe Größe.

Einfache Wurzeln, ſiehe Wurzel.

Einfache Zahlen, ſiehe Primzahlen.

Einfacher Ort, heißt der Ort an einer geraden Linie ſ. d.

Einfacher Punkt, ſiehe Punkt.

Einfaches Quadrantal-Dreyeck, ſiehe Dreyeck.

Einförmige Funktionen, ſiehe Funktion (7).

Eingebildete Größe, ſiehe Größe.

Eingebildete Wurzel, ſiehe Wurzel.

Eingebrochnes Cirkelinſtrument. Fig. 934. heißt ein ſolcher, deſſen beyde Schenkel in a und b, mit einem Charnier verſehen ſind, um dieſelben perpendikulär ſtellen zu können.

Eingehender Winkel, ſiehe Winkel.

Eingeſchränkte Plätze zu vermeſſen, ſiehe Vermeſſung 55.

Eingeſchriebene Figur, ſiehe Vieleck in dem Kreiſe.

Eingeſchriebenes Dreyeck, ſiehe Dreyeck in Cirkel.

Einheit, *Unitas*, iſt der Begriff, wodurch wir uns Eins vorſtellen. Die Einheit wird gewöhnlicher Weiſe mit einer Linie, einem Strichlein oder einem Finger (I) angedeutet, und da ſich viele Ungeübte aus natürlicher Leichtigkeit im Zählen der Finger bedienen, ſo haben auch bereits die Lateiner die anfänglichen Zahlen Digitos, Fingerzahlen genannt. Auch zeiget man die Einheit durch $\frac{1}{1}$ oder $\frac{2}{2}$, d. iſt überhaupt durch $\frac{n}{n}$, und in Progreſſionen durch d° an.

Einheiten, Einerley, *Unitates homonymae*, oder *homogeneae*, heißen ſolche, bey denen man bloß auf das ſiehet, was ſie mit einander gemein haben; als von den drey Buchſtaben a. a. α klingt einer wie der andere, es ſind alſo, der Ausſprache nach, einerley Einheiten.

Einheiten, Unterſchiedene, *unitates heteronymae*, oder *heterogeneae* ſind ſolche Einheiten, bey denen man auf die Eigenſchaften Rückſicht nimmt, durch welche ſie von einander verſchieden ſind. Z. E. weil das lateiniſche a anders geſchrieben wird als das Griechiſche ſo ſind es, in Rückſicht der Schreibart, verſchiedene Einheiten.

Einheit, Wurzeln derſelben. ſiehe Wurzeln der Einheit.

Einlanglichte Zahlen, ſiehe parellelogrammiſche Zahlen.

Einmaleins, Pythagoriſche Rechentafel, *Abacus Pythagoricus*, dieſes iſt eine Tabelle Fig. 494, worinnen die Produkte aus den Einern in die Einer angezeiget werden. Ihre Verfertigung geſchiehet alſo:

1) Man macht ein Quadrat, und theilt jede Seite in 9 gleiche Theile, und durch die Parallinien, die man ziehet, zertheilt man die Fläche in 91 kleine Quadratflächen.

2) In die äußerſte Horizontalreihe und in die Seitenreihe linker Hand ſchreibt man die neun Zahlen der Einheiten.

3) Man addiret 2 und 2 zuſammen, und das Aggregat 4 ſetzt man unter 2. Man addirt ferner 2 und 4 und ſetzt das Aggregat 6 unter 4. Man addirt weiter 2 und 6 und ſetzt das Aggregat 8 unter 6 u. ſ. f.

4) Wenn die Addition durch die übrigen Zahlen eben ſo fort geſetzt wird, ſo entſtehet der Pythagoriſche Rechentiſch.

Eine andere bequemere Art dieſes Rechentiſches findet man Fig. 495.

Julius Cäſar von Padua. Eine newe Erfindung einer allgemeinen arithmetiſchen Praktik — jetzt wiederum aufs newe durch den Autoren corrigirt und verbeſſert. Nürnberg 1624 16. 6½ Bogen. Strasburg 1582. 1583. 1585. 1592. 1616. 1663. Frkf. 1679.

Iſt nichts weiter als ein großes Einmaleins, und enthält die Produkte aller Zahlen von 1 - 100, dann von 200, 300 bis 1000, und 1 - 100, dann 110, 120, 130, 200. 300 bis 1000.

Tabulae arithmeticae προσθαφαιρεσεως univerſales, quarum ſubſidio Numerus quilibet, ex multiplicatione producendus, per ſolam Additionem: et quotiens quilibet, e diviſione eliciendus, per ſolam ſubtractionem, ſine taedioſa et lubrica Multiplicationis, atque Diviſionis Operatione etiam ab eo, qui arithmetices non admodum ſit gnarus, exacte, celeriter et nullo negotio invenitur. E Muſeo *Ioannis Georgii Herward ab Hohenburg*. V. I. D. ex Offic. Nic. Henrici. Anno Ch. 1610. Ein ſehr großer Foliante 1 Titelbl. 7 Seiten Einleitung 999 S. voller Ziffern, alſo 250 Bogen in allen 11 Alph.

Ein coloßaliſches Einmaleins. Jede Columne iſt in 11 Spalten abgetheilt, welche, die erſte ausgenommen, mit 0, 100, 200, 300 - - 900 überſchrieben. Jede erſte Spalte enthält die erſten hundert Zahlen. Jede 2te die mit Null überſchrieben iſt, fängt ſich mit einer Zahl an, die um 1 größer iſt, als die Seitenzahl, folglich z. E. auf der 99ten mit 100. Alſo enthält von einer ſolchen Spalte die mit 0 überſchriebene Spalte das 1, 2, 3. . . 100fache. Nimmt man nun die Summe von einem hundert, mit welchen eine Spalte überſchrieben iſt, und eine von den erſten 100 Zahlen, die in der erſten Spalte ſtehet, und ſuchet in der ſenkrechten Reihe, der Hunderte abwärts die Zahl in der Reihe auf, welche zu einer der erſten 100 Zahlen gehört: ſo findet man das Vielfache dieſer Zahl, als ſo viel Einheiten die erſte Zahl der mit Null überſchriebenen Spalte, oder die um 1 vermehrte Seitenzahl hat. Es iſt klar daß alle dieſe Produkte durch die Addition gefunden werden. Da nun die größte Seitenzahl 999 iſt, und die größte Summe 900 + 100 oder 1000 beträgt, ſo iſt das größte Produkt ſo dieſe Tafeln geben, eine Million. Will man alſo mit Hülfe dieſer Tafeln z. E. 461235987 mit 789654 multipliciren, ſo nimmt man die Theile des einen Faktors 461000000, 235000, 987 und des andern 798000, 684 und ſuchet auf 987 × 654, 235 × 654,

461 × 654, und dann 987 × 789, 235 × 789, 461 × 789, giebt dieſen Produkten ihren Werth aus der Stelle und addirt ſie. Das Exempel ſiehet daher alſo aus:

```
        461235987
           789654
        ---------
           645498        654 × 987 )
          135690         654 × 235 } 653 Colum.
         301494          654 × 461 )
          778743         789 × 987 )
        184415           789 × 235 } 788 Col.
       363729            789 × 461 )
      ---------------
      364216842078498
```

Dieſes Hülfsmittel war alſo in Trigon. Rechnungen, vor Erfindung der Logarithmen nicht zu verachten.

Ein Diviſions-Exempel ſiehet alſo aus:

```
235987)186348078498| 789654
       (185415         zu 789 a. d. 234 Col.
       (   778743        789 × 987
       ----------
        186193743
       ----------
           154335498 Reſt.
         (1543690
         (    645498   zu 654 a. d. 234 Col.
       ----------
           154335498
       ----------
                   0
```

Multiplications Tabellen, welche die Produkte aller ganzen Faktoren von 1 bis 1000 nebſt allen ganzen Zahlen von 1 bis 100 enthalten. Gr. 4. 1793. Proſt.
Tabulae progreſſionum, oder das große Einmalein, 12. 10 B. 4 ggr.

Einmaleins für die Primzahlen iſt ein von Pell berechnetes Multiplications-Täflein, welches für die Primzahlen von 1 bis 313 die Produkte von 1 bis 9 enthält, und zur Diviſion dienet, wenn man, ſo zu ſagen, ohne Hülfe des Einmaleins dividiren will, und ſich den Tarif dazu nicht ſelbſt verfertigen will. Man findet dieſe Tafel in Lamberts Zuſätzen zu den . . . Tafeln S. 70, wo ſie die 2te Tafel iſt.

Einmaleins für π.

Taf. I. Vielfache der Zahl π.

in 1	=	3,141592	653589	793238	462643
2	=	6,283185	307179	586476	925287
3	=	9,424777	960796	379715	387930
4	=	12,566370	614359	172953	850574
5	=	15,707963	267948	966192	313217
6	=	18,849555	921538	759430	775860
7	=	21,991148	575128	552669	238504
8	=	25,132741	228718	345907	701147
6	=	28,274333	882308	139146	163790

Taf. II. Vielfache der Zahl $\frac{1}{\pi}$.

in 1	=	0,318309	886183	790671	537768
2	=	0,636619	772367	581343	075536
3	=	0,954929	658551	372014	613304
4	=	1,273239	544735	162686	151072
5	=	1,591549	430918	953357	688840
6	=	1,909859	317102	744029	226608
7	=	2,228169	203286	534700	764376
8	=	2,546479	089470	325372	302143
9	=	2,864788	975654	116043	839911

Taf. III. Vielfache von $\frac{1}{4}\pi$.

in 1	=	0,785398	163397	448309	615661
2	=	1,570796	326794	896619	231322
3	=	2,356194	490192	344928	846983
4	=	3,141592	653589	793238	462643
5	=	3,926990	816987	241548	078304
6	=	4,712388	980384	689857	693695
7	=	5,497787	143782	138167	309626
8	=	6,283185	307179	586476	925287
9	=	7,068583	470577	034786	540948

Taf. IV. Vielſache der Zahl $\frac{1}{4\pi}$.

in	1	=	0,079577	471545	947667	884442
	2	=	0,159154	943091	895335	768884
	3	=	0,238732	414637	843003	655326
	4	=	0,318309	886183	790671	537768
	5	=	0,397887	357729	738339	422210
	6	=	0,477464	829275	686007	306652
	7	=	0,557042	300821	633675	191004
	8	=	0,636619	772367	581343	075536
	9	=	0,716197	243913	529010	859978

Tafel V. Vielſache der Zahl $2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

in	1	=	1,128379	167095	512573	896160
	2	=	2,256858	334191	025147	792319
	3	=	3,385137	501286	537721	688479
	4	=	4,513516	668382	050295	584638
	5	=	5,641895	835477	562869	480798
	6	=	6,770275	002573	075443	376958
	7	=	7,898654	169668	588017	273117
	8	=	9,027033	336764	100591	166277
	9	=	10,155412	503859	613165	065436

Taf. VI. Vielſache der Zahl $\frac{1}{12}\pi$.

in	1	=	0,261799	387799	149436	538554
	2	=	0,523598	775598	298873	077107
	3	=	0,785398	163397	448309	615661
	4	=	1,047197	551196	597746	154214
	5	=	1,308996	938995	747182	692768
	6	=	1,570796	326794	896619	231322
	7	=	1,832595	714594	046055	796875
	8	=	2,094395	102393	195492	308429
	9	=	2,356194	490192	334928	846983

Taf. VII. Vielfache der Zahl $\sqrt[3]{(\frac{1}{6}\pi)}$.

in 1	=	0,805995	977008	234820	355
2	=	1,611991	954016	469640	710
3	=	2,417987	931024	704461	065
4	=	3,223983	908032	939281	420
5	=	4,029979	885041	174101	775
6	=	4,835975	862049	408922	130
7	=	5,641971	939057	643742	485
8	=	6,447967	816065	878562	840
9	=	7,253963	793074	113383	195

Taf. VIII. Vielfache der Zahl $\frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{1}{6}\pi)}}$.

in 1	=	1,240700	981798	800033	341
2	=	2,481401	963597	600066	683
3	=	3,722102	945396	400100	624
4	=	4,962803	927195	200133	366
5	=	6,203504	908994	000166	707
6	=	7,444205	890792	800200	048
7	=	8,684906	872591	600233	390
8	=	9,925607	854390	400266	731
9	=	11,166308	836189	200300	073

Taf. IX. Vielfache der Zahl $\frac{1}{6}\pi$.

in 1	=	0,523598	775598	298873	077107
2	=	1,047197	551196	597746	154214
3	=	1,570796	326794	896619	231322
4	=	2,094395	102393	195492	308429
5	=	2,617993	877991	494365	385536
6	=	3,141592	653589	793238	462643
7	=	3,665191	429188	092111	539751
8	=	4,188790	204786	390984	616858
9	=	4,712388	980384	689857	693965

Eine

Einmaleins für die Sinus jeder Grade.

Dieſes enthält folgende Tafel, worinnen die Sinuſſe aller ganzen Grade mit 1, 2. . . . 9 multiplicirt, und in eben ſo viel Columnen vorgeſtellet ſind.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	001745	003490	005236	006981	008726	010471	012217	013962	015707
2	003960	006980	010470	013960	017450	020940	024430	027920	031410
3	005234	010467	015701	020934	026168	031402	036635	041869	047102
4	006976	013951	020927	027903	034878	041854	048830	055805	062781
5	008716	017431	026147	034862	043578	052293	061009	069725	078440
6	010453	020906	031359	041811	052264	062717	073170	083623	094076
7	012187	024374	036561	048778	060935	073122	085309	097495	109782
8	013917	027835	041752	055669	069587	083504	097421	111338	125256
9	015643	031287	046930	062574	078217	093861	109504	125148	140791
10	017365	034730	052094	069459	086824	104189	121554	138919	156283
11	019081	038162	057243	076324	095405	114485	133566	152647	171728
12	020791	041582	062374	083165	103956	124747	145538	166329	187121
13	022495	044990	067485	089980	122476	134971	157466	179961	202456
14	024192	048384	072577	096769	120961	145153	169345	193538	217730
15	025882	051764	077646	103528	129409	155291	181173	207055	232937
16	027564	055128	082691	110255	137819	165382	192946	220510	248074
17	029237	458474	087712	116949	146186	175423	204660	233897	263135
18	030902	061803	092705	123607	154508	185410	216312	247214	278115
19	032557	065114	097670	130227	162784	195341	227898	260455	293011
20	034202	068404	102606	136808	171010	205212	239414	273616	307818
21	035837	071674	107510	143347	179184	215021	250858	286694	322531
22	037461	074921	112382	149843	187303	224764	262224	299685	337146
23	039073	078146	117219	156292	195366	234439	273512	312585	351658
24	040674	081347	122021	162695	203368	244042	284716	325389	366063
25	042262	084524	126785	169047	211309	253571	295833	338095	380356
26	043837	087674	131511	175348	219186	263023	306860	350697	394534
27	045399	090798	136197	181596	226995	272394	317793	363192	408591
28	046947	093894	140841	187789	234736	281683	328630	375577	422524
29	048481	096962	145443	193924	242405	290886	339367	387848	436329
30	050000	100000	150000	200000	250000	300000	350000	400000	450000
31	051504	103008	154511	206015	257519	309023	360527	412030	463534
32	052992	105984	158976	211968	264960	317952	370944	423935	476927
33	054464	108928	163392	217856	272320	326783	381247	435711	490175
34	055919	111839	167758	223677	279597	335516	391435	447355	503274
35	057358	114715	172073	229431	286788	344146	401603	458861	516219
36	058779	117557	176336	235114	293893	352671	411450	470128	529007
37	060181	120363	180544	240726	300905	361089	421270	481452	541633
38	061566	123132	184698	246265	307831	369397	430963	492529	554095
39	062932	125864	188796	251728	314660	377592	440524	503456	566388
40	064279	128558	192836	257115	321394	385673	449951	514230	578509
41	065606	131212	196818	262424	328030	393635	459241	524847	590455
42	066913	133826	200739	267652	334565	401478	468391	535304	602216
43	068200	136400	204600	272799	340999	409199	477399	545599	613799
44	069466	138932	208398	277863	347329	416795	487261	555727	625193
45	070711	141421	212132	282843	353553	424264	494975	565685	636396

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	071934	143868	215802	287736	359670	431604	503538	575472	647406
47	073135	146271	219406	292541	565677	438812	511948	585083	658218
48	074314	148629	222943	297258	371572	445887	520201	594516	668830
49	075471	150942	226413	301884	377355	452826	528297	603768	679239
50	076604	153209	229813	306418	383022	459627	536231	612836	689440
51	077715	155429	233144	310858	388573	466288	544002	621717	699431
52	078801	157602	236403	315204	394405	472806	551607	630409	709210
53	079864	159727	239591	319454	399318	479181	557045	638908	718772
54	080902	161803	242705	323607	404508	485410	566312	647214	728115
55	081915	163830	245746	327661	409576	491491	573406	655322	737237
56	082904	165808	248711	331615	414519	497423	580326	663230	746134
57	083867	167734	251601	335468	419335	503202	587069	670936	754804
58	084805	169610	254414	339219	424024	508828	593634	678438	763243
59	085717	171433	257150	342867	428584	514300	600017	685734	771451
60	086603	173205	259808	346410	433013	519615	606218	692820	779423
61	087462	174924	262386	349848	437310	524772	612234	699696	787158
62	088295	176589	264884	353179	441473	529768	618063	706358	794652
63	089101	178209	267302	356403	445503	534604	623705	712805	801906
64	089879	179759	269638	359518	449397	539276	628156	719035	808915
65	090631	181262	271892	362523	453154	543785	634415	725046	815677
66	091355	182709	274064	365418	456773	548127	639482	730836	822191
67	092050	184101	276151	368202	460252	552303	644353	736404	828454
68	092718	185537	278155	370874	463592	556311	649029	741748	834466
69	093358	186716	280074	373432	466790	560148	653506	746864	840222
70	093969	187939	281908	375877	469846	563816	657785	751754	845723
71	094552	189104	283655	378207	472759	567311	661863	756415	850967
72	095106	190211	285317	380423	475528	570634	665740	760845	855951
73	095630	191261	286891	382522	478152	573783	669413	765044	860674
74	096126	192252	288379	384505	480631	576757	672883	769009	865136
75	096593	193185	289778	386370	482963	579555	676148	772741	869333
76	097030	194059	291089	388118	485148	582177	679207	776237	873266
77	097437	194874	292311	389748	487185	584622	682059	779496	876933
78	097815	195630	293444	391259	489074	586889	684703	782518	880333
79	098163	196325	294488	392651	490814	588976	687139	785302	883464
80	098481	196962	295442	393923	492404	590885	689365	787846	886327
81	098769	197537	296307	395075	493844	592613	691382	790151	888919
82	099027	198054	297080	396107	495134	594161	693188	792214	891241
83	099255	198509	297764	397018	496273	595528	694782	794037	893292
84	099452	198904	298357	397809	497261	596713	696165	795617	895070
85	099619	199239	298858	398478	498097	597717	697336	796956	896575
86	099756	199513	299269	399026	498782	598538	698295	798051	897808
87	099863	199726	299589	399452	499315	599178	699041	798904	898767
88	099939	199878	299817	399756	499695	599634	699574	799513	899452
89	099985	199969	299954	399939	499924	599909	699893	799878	899863
90	100000	200000	300000	400000	500000	600000	700000	800000	900000

Einrechnung, heißt die Vergleichung oder der Abzug einer Summe von einer andern, wenn man nämlich an einer Schuld, welche mit Intereſſen laufet, eine Zahlung auf Abſchlag empfänget, und hievon zugleich den Rückſtand der verfallnen Zinſen abziehet, das Uebrige aber erſt auf das Kapital einrechnet, damit dieſes immer wegen der fortlaufenden Intereſſe, ſeinen reinen Beyſtand behält.

Einrichtung der Brüche, ſiehe Brüche auf einerley Benennung zu bringen.

Einrichtung der Gleichungen, ſiehe Gleichung.

Einröſchepunkt. (Markſcheider) ſiehe Aufſchlage-Waſſer (16).

Eins, Unum, iſt dasjenige, ſo wir von andern abſondern, und ohne Theile darinnen zu beobachten ganz alleine anſehen. Z. B. wenn wir von aaa zum Exemp. das letzte von den 2 erſten abſondern, und es ohne alle Theile nur alleine betrachten, ſo iſt das abgeſonderte ſo viel als Eins.

Cp. L. Hoffmann's Erklärung von Eins. Maynz 1790. 16 S. 8.
A. L. Z. 1790. III. 625. Gött. g. Z. 1791, I. 503.

Einſatz ein Feldmaaß, ſiehe Acker.

Einſchalten, ſiehe Interpoliren.

Einſchreibung der Figuren, ſiehe Vielecke in dem Cirkel.

Es iſt aber zu bemerken, daß man nicht allein in einem Cirkel, ſondern auch in jede andere geradlinichte oder krumlinichte Figuren, andere Figuren einſchreiben kann, ſo daß in die eingeſchriebene Figur ganz in der andern, und ihre Ecken im Umfange derſelben liegen.

Einſpringender Winkel, ſiehe Winkel.

Eintheilige Größe, ſiehe Größe.

Eintheiliger Bruch, heißt ein ſolcher, der die Einheit zum Zähler hat.

Eintheilung der Felder, geometriſche, ſiehe Feld einzutheilen.

Eiſenſcheibe, Stundenſcheibe, Fig. 936. Da bekanntlich das Eiſen die Magnetnadel aus ihrer gewöhnlichen Richtung bringt, und deshalb bey ihrem Gebrauche nichts von Eiſen in der Nähe herum ſeyn darf; ſo iſt der Compaß an den Orten, wo Eiſenerze brechen, nicht zu gebrauchen, wiewohl einige auf die Magnetnadel keine ſo ſtarke Würkung äuſſern. Dafür nun hat man die Eiſenſcheibe, die von andern auch Stundenſcheibe genannt wird, erfunden. Ihre weſentliche Einrichtung wird folgende ſeyn: Eine kreisförmige meſſingene Scheibe iſt in Stunden ꝛc. eingetheilt, und mit die Weltgegenden, wie der Setzcompaß, bezeichnet. In ihrer Ebene läßt ſich um ihren Mittelpunkt eine Regel drehen, die am Ende etwa mit einem Oehre verſehen iſt, um eine Schnur daran zu binden, und nach der Richtung der Regel, alſo nach einer Linie aus dem Mittelpunkte, anziehen zu können.

Zweyte Art. Fig. 939. Eine meſſingene kreisförmige Scheibe iſt aus ihrem Mittelpunkte in vier Quadranten getheilt, wovon jeder, um ihn von dem andern zu unterſcheiden, mit einer beſondern Zahl bemerkt und in 90 Grade vertheilt iſt, welche auf die Art, wie die 939 Figur zeigt, gezählt werden.

Auf dieſer Scheibe iſt ein in ihrem Mittelpunkte bewegliches Richtſcheid angebracht, deſſen Ebene mit der Ebene der Scheibe parallel iſt, und das ſich auf jeden Grad ſtellen läßt, auch mit einer, an deſſen Ende angebundenen Schnur ſo angezogen werden kann, daß es mit dieſer Schnur eine und dieſelbe gerade Linie ausmacht. Nun gehört hierzu ein Geſtelle, deſſen Fuß, auf dem es ganz ſenkrecht aufſtehen muß, an allen Orten aufgeſchraubt werden

kann. Mit dieſem Geſtelle aber wird die gleich vorher beſchriebene Scheibe dergeſtalt durch Gewirbe verbunden. Fig. 940. daß die Scheibe auf demſelben in einer Linie beweglich iſt, deren Endpunkte die ſind, wo aller vier Quadranten 90 Gradpunkt ſteht. Dieſe Linie muß beym Gebrauche allemal eine ſöhlige Lage haben. Ihr ſelbige aber zugeben, iſt auf der untern Seite der Scheibe die Linie auch eingegraben, die durch der Quadranten 0 Gradpunkt geht, und in der Mitte des Geſtelles gerade unter der Scheibe Mittelpunkt ein Perpendikel gehangen; da denn die Eiſenſcheibe gehörig aufgeſchraubt iſt, wenn, nachdem ſie bis an den frey hängenden Perpendikel gewendet worden iſt, ſelbiger auf nur gedachte Linie einſpielet. Zum Gebrauche dieſer Eiſenſcheibe iſt es auch gut, wenn auf dem obern Mittelpunkte ein ſchwacher, kurzer, oben mit einem Knopfe verſehener Stift angebracht iſt, um an ihn die Lachterkette zu hängen, und die aus dieſem Punkte mit der Schnur gezogene Linie auszumeſſen.

Dieſes iſt die erſte Art Eiſenſcheibe des Herrn von Oppels.

Dritte Art. Fig. 941. In einer kreisförmigen meſſingenen Scheibe iſt ſowohl eine dergleichen kleinere in Stunden vertheilte Scheibe, als ein um dieſe gelegter Ring, eingefügt, welche beyde auf der größern Scheibe um ihren gemeinſchaftlichen Mittelpunkt, doch jedes davon für ſich, und ohne das andere aus ſeiner Stellung zu verrücken, beweglich ſind.

Auf der innern eingetheilten Scheibe ſind die Stunden und Weltgegenden in einer umgekehrten Ordnung eingeſchrieben, und mitten auf der zwölften Stundenlinie derſelben eine ſtarke meſſingene, auf ihr winkelrecht ſtehende, Platte befeſtiget, welche ein meſſingenes, an ſeinem äuſſern Ende, mit einem, zu Anlegung einer Schnur dienenden Haken verſehenes, Richtſcheid auf beyden Seiten eingeſchloſſen hält, ſo daß dieſes Richtſcheid um einen, gerade über dem Mittelpunkte der Eiſenſcheibe befindlichen Punkt, auf derjenigen Seite der Eiſenſcheibe, wo SE 12 eingeſchrieben iſt, auf und nieder beweglich iſt. Auf der einen Seite dieſes Punkts, um welchen das Richtſcheid beweglich iſt, befindet ſich ein dergeſtalt vorgerichteter Stift oder Haken, daß an ſelbigem die Lachterkette angehalten werden kann.

Der um die innere Stundenſcheibe bewegliche Ring iſt in ſeine 4 Quadranten eingetheilt, und in ihren Theilungspunkten ſind die vier Hauptweltgegenden in ihrer gehörigen und richtigen Ordnung eingetragen. Und wo auf dieſem Ringe Meridies eingeſchrieben ſeyn ſoll, wird ein von blau angelaufenem Stahle verfertigter Zeiger aufgenietet.

Damit man aber dieſen Zeiger vermittelſt Fortſchiebung des Ringes auf jede Stunde der Scheibe ſtellen könne, ſo ſind hierzu einige kurze Stifte behülflich, welche in dieſen Ring eingeſchraubt werden. Durch den äuſſern Rand der größern Scheibe, in welchen mehr gedachter Ring eingepaſſet iſt, ſind endlich einige Löcher gebohrt, durch welche, mittelſt Pfriemen, man dieſes Inſtrument am beliebigen Orte aufſchrauben kann.

Die 941. Figur ſtellt dieſe Eiſenſcheibe vollſtändig im Proſpekte dar; aber die 942. im ſeigern Durchſchnitte durch die ſechſte Stundenlinie. An beyden Seiten der in der Mitte dieſes Inſtruments aufgerichteten Platte, in welche das Richtſcheid eingefügt worden, iſt ein Perpendikel gehangen, wovon jeder anzeigt, ob die Eiſenſcheibe ſöhlig geſtellt ſey, oder nicht. Denn dieſe Eiſenſcheibe iſt nicht eher für ſöhlig geſtellt zu halten, als bis ein ſolcher Perpendikel nur auf und dieſelbe Linie einſpielt, wenn die Scheibe nach allen Seiten

ten herum gedreht wird. Und eben dieſe Wendungen der Scheibe und Beobachtung des Perpendikels darf man bey jedesmaliger ſöhliger Richtung nicht auſſer Acht laſſen.

Dieſes iſt Herrn von Oppels zweyte Art.

Vierte Art; des Herrn Voigtels Eiſenſcheibe. Durch den Mittelpunkt einer in 360 Grade eingetheilten Scheibe geht ein nicht allzuweit ausgehöhltes Röhrchen, welches ſo lang iſt, als der Durchmeſſer und die Dicke der Scheibe zuſammen; es ſteht auf der Ebene der Scheibe ſenkrecht, und ragt oben und unten gleich viel hervor, nämlich ſo viel, als der Halbmeſſer der Scheibe beträgt. Durch das Röhrchen gehen zwey Fäden, jeder durch die Oeffnung über der Scheibe, und durch die unter der Scheibe heraus; jeder iſt mit ſeinen beyden Enden zuſammen gebunden, ſo daß er gleichſam eine Schlinge macht. Der Fäden ſind, wie gedacht, zwey, damit man an jedem eine Schnur anbinden, und ſelbige nach entgegen geſetzten Gegenden anziehen kann.

Um der Scheibe Mittelpunkt und um das Röhrchen dreht ſich eine Regel, deren Ebene der Ebene der Scheibe parallel iſt. Dieſe Regel geht etwas über die Scheibe hinaus, ohngefähr um die Hälfte des Halbmeſſers der Scheibe. Stellt man die Scheibe ſöhlig; ſo kommt das Röhrchen in eine ſeigere Lage. Wird nun an einem der beyden Fäden eine Schnur gebunden, und ſelbige, wie man will, ſeiger, ſöhlig oder donlegig angezogen; ſo machen dieſes Fadens beyde Theile, (der Theil nämlich, der über der Scheibe, und der, der unter ſelbiger ſich befindet), mit dem Theile, der im Röhrchen ſteckt, ein Dreyeck, deſſen Ebene vertikal iſt; dieſe Schnur ſelbſt liegt in dieſer Ebene; und ſo ergiebt ſich eine ſeigere Ebene durch die Schnur. Indem nun die Schnur mit der ſeigern Ebene ſtraff angezogen, herum gedreht wird, bis ſie in die Lage der Linie kommt, deren Streichen man wiſſen will; ſo wird einer der beyden Theile des Fadens, die zum Röhrchen heraus gehen, die Regel angreifen und mit ſich fortſchieben, ſo daß eine ihrer Seiten in der ſeigern Ebene des Dreyecks liegt. Dieſe Seite der Regel iſt folglich eine ſöhlige Linie in der ſeigern Ebene, durch die Schnur. Das Streichen alſo, das dieſe ſeigere Ebene hat, hat auch gleich erwähnte ſöhlige Linie, oder Seite der Regel. Wenn nun die ſeigere Ebene des Dreyecks in die Lage gebracht iſt, daß ſie mit der ſeigern Ebene, die durch die Linie geht, deren Streichen man wiſſen will, zuſammen fällt; ſo iſt die vorhin genannte Seite eine ſöhlige Linie in dieſer ſeigern Ebene, deren Streichen gleich dem verlangten iſt.

Hat alſo der Durchmeſſer der Scheibe, der durch der Grade Anfang geht, eine parallele Lage mit der Magnetlinie oder Mittagslinie; ſo giebt die Regel, in vorhin erwähnte Lage gebracht, das verlangte Streichen.

II. Gebrauch der Eiſenſcheiben.

A. Das obſervirte Streichen von den mit Schnuren gezogenen Linien zu finden.

Aufloͤſung A. Bey ſöhligen Linien 1. AB, BE, EF. Fig. 937. ſeyen ſöhlige Linien, und zwar liege AB da, wo man noch mit dem Compaſſe ihr obſervirtes Streichen finden, d. h. die Stunde, in der AB ſtreicht, abnehmen kann; hingegen bey BE, EF gehe dies wegen der Eiſenerze nicht an. 2. Man findet alſo das obſervirte Streichen der AB. 3. Bringe die Scheibe in B (welche in der Figur der Kreis SCMaS vorſtellen mag), und ſtelle ſie daſelbſt ſöhlig, ſo daß in B ihr Mittelpunkt kommt, S ohngefähr nach der

nörd-

nördlichen Gegend, und M nach der ſüdlichen hin ſieht. 4. Verlängere AB in C, daß daſelbſt BC der Scheibe Umkreis ſchneidet; 5. Nehme zwiſchen S und C ſo viel Stunden, als nach (2) für der AB obſervirtes Streichen gefunden worden. 6. Nun ziehe man die Schnur an der Regel an dem Punkte E hin: 7. So ſtellt ſich die Regel nach Be, daß e in BE liegt, und alſo Be die Stunden der BE obſervirten Streichens und deren Beſchaffenheit angiebt. 8. Den Fortgang dieſer Arbeit zu überſehen, ſeyen, E eine andere der in B vollkommen ähnliche Scheibe ſ f m b ſ ſöhlig geſtellt, daß auch in E ihr Mittelpunkt f, ohngefähr nach Norden, und m nach Süden liegt. 9. Ihr Umkreis werde von BE in b geſchnitten. 10. Nun mache man, daß zwiſchen m und b ſo viel Stunden ſind, als zwiſchen S und e; oder zwiſchen ſ und b ſo viel, als zwiſchen M und e. 11. Ziehe die Schnur an ihrer Regel durch F: 12. So zeigt Ef der Linie EF obſervirtes Streichen, und deſſen Beſchaffenheit.

B. Bey donlegichten Linien.

BK, KL. Fig. 938. 13. Man ziehe eine ſöhlige Linie BA ſo, daß man ihr obſervirtes Streichen mit dem Kompaſſe erfahren kann. 14. Nun ſtelle man in B eine Scheibe, wie (3) verlangt. 15. Und mache, was (4. 5.) befiehlt. 16. Hierauf laſſe man von einem Punkte in BK ein Loth ke herabhängen, und führe das ſo lange fort, bis es an der Scheibe Umkreis in e trifft. 17. So werden zwiſchen S und e ſo viel Stunden ſeyn, als der Linie BK obſervirtes Streichen enthält. 18. Die Arbeit fortzuſetzen, bringe man in K eine zweyte Scheibe, wie (8) fordert: 19. Laſſe hart an KB und am Rande der Scheibe ein Loth herab; 20. Merke den Punkt, wo dieſes Loth der Scheibe Rand trifft. 21. Nehme zwiſchen ihm und dem Punkte Mer. ſo viel Stunden, als in (7) gefunden worden. 22) Und verfahre auf ähnliche Art, wie in (16).

C. Mit der zweyten Art Eiſenſcheibe den ſöhligen Winkel = x zweyer mit Schnuren gezogener Linien zu finden.

1. In den Durchſchnittspunkt dieſer Linien bringe man die Eiſenſcheibe mit ihrem Mittelpunkte ſo, daß der durch die Punkte 90° laufende Durchmeſſer genau eine ſöhlige Lage habe. 2. Bringe das Richtſcheid in die Richtung der einen Schnur; 3. Bemerke die Zahl der Grade, die er alsdann abſchneidet; auch in dem wie vielten Quadranten es geſchieht. 4. Eben das (2. 3.) thue man auch bey der andern Schnur. 5. Die in (3) bemerkte Anzahl Grade ſey = m, und die nach (4) bey der andern Schnur = n. 6. Nun ſuche man beyder Schnuren Neigungen. 7. Die bey jener (3) ſey = p, die bey der andern Schnur = q: 8. Ueberdies heiße der ſöhlige Winkel, den die Sohle der einen Schnur (3) mit dem ſöhligen Durchmeſſer (1) macht = t; und der ſöhlige Winkel, den die Sohle der andern Schnur (4) mit dem ſöhligen Durchmeſſer macht = w; 9. So iſt

$$\text{Coſin } t = \frac{\text{ſin } m}{\text{Coſin } p},$$

$$\text{Coſin } w = \frac{\text{ſin } n}{\text{Coſin } q};$$

oder

$$\log \text{Coſin } t = \log \text{ſin } m - \log \text{Coſ } p,$$

$$\log \text{Coſin } w = \log \text{ſin } n - \log \text{Coſ } q.$$

10.

10. Liegt nun m in dem erſten Quadranten; ſo iſt der verlangte ſöhlige Winkel.

$x = t + w$, wenn n im 2ten Quadranten iſt;

$x = 180^\circ + t - w$, wenn n im 3ten Quadranten iſt;

$x = 180^\circ - t - w$, wenn n im 4ten Quadranten iſt.

11. Iſt m in dem 2ten oder 3ten, oder 4ten Quadranten; ſo hat man

$x = t + w$, wenn n im 3ten oder 4ten oder 1ſten Quadranten;

$x = 180^\circ + t - w$, wenn n im 4ten, oder 1ſten, oder 2ten Quadranten;

$x = 180^\circ - t - w$, wenn n im 1ſten, oder 2ten, oder 3ten Quadranten.

Exempel. Es ſey

$p = 25^\circ\ 15'$,

$q = 30^\circ$,

$m = 50^\circ\ 30'$

$n = 45^\circ\ 15'$:

ſo iſt

$\log \sin 50^\circ\ 30' = 19{,}8874061 - 20$

$\log \mathrm{Coſin}\ 25^\circ\ 15' = 9{,}9563870 - 10$

$\log \mathrm{Coſin}\ t = 9{,}9310191 - 10$

Giebt $t = 31^\circ\ 26'$

ferner

$\log \sin 45^\circ\ 15' = 19{,}8513717 - 20$

$\log \mathrm{Coſin}\ 30^\circ = 9{,}9375306 - 10$

$\log \mathrm{Coſin}\ w = 9{,}9138411 - 10$

Giebt $w = 34^\circ\ 55'$.

Liegt nun m in dem erſten Quadranten und n in dem 3ten; ſo iſt

$x = 180^\circ + 31^\circ\ 16' - 34^\circ\ 55'$

$= 176^\circ\ 41'$

Die ſöhligen Winkel t und w finden ſich allemal ſpitzig und kleiner, als die ihnen zugehörigen donlegichten Winkel $90^\circ - m$ und $90^\circ - n$. Wenn die eine der gezogenen Schnuren ſöhlig iſt, ſo fällt auch bey derſelben Schnur die Rechnung (9) weg:

Denn für $p = 0$, oder $q = 0$,

hat man $\mathrm{Coſin}\ t = \sin m$,

oder $\mathrm{Coſin}\ w = \sin n$,

daß alſo in dieſem Falle das Richtſcheid ſelbſt t oder w angiebt.

In ſo ferne m oder $n = 0$,

iſt Coſin t oder $\mathrm{Coſin}\ w = 0$:

alſo in dieſem Falle t oder $w = 90^\circ$.

Wenn m oder n nicht richtig genug angegeben ſind; ſo läßt ſich daraus auch nicht richtig genug der ſöhlige Winkel t oder w berechnen, wenn man auch gleich der Schnuren Neigungen p oder q richtig hat.

D. Es iſt von zweyen mit Schnuren gezogenen Linien die in einem Punkte zuſammen kommen, das Streichen gegeben; man ſoll das Streichen der andern Linie mit der 3ten Art von Eiſenſcheibe finden.

Auflöſung. Man bringe dieſes Werkzeuges Mittelpunkt in beyder Linien Durchſchnittspunkt, welches geſchieht, wenn der Stift, um den ſich das Richtſcheid bewegt, in gleich genannten Punkt fällt, ſchraube da die Eiſenſcheibe ſöhlig auf, ziehe die Linie, deren Streichen bekannt iſt, mit der Schnur ſo,

ſo, daß das eine Ende derſelben an das Richtſcheid gelegt ſey; ziehe hierauf die Schnur an dieſer Linie ſtark an; ſtelle den Zeiger des beweglichen Ringes auf die gegebene Stunde, ziehe alsdann, ohne die Eiſenſcheibe anders zu befeſtigen, auf gleiche Art die andere vorgegebene Linie; ſo wird der Zeiger von ſelbſt das verlangte Streichen anzeigen. Wäre keine der vorgegebenen Linien nach ihrem Streichen bekannt, und man wollte nur den dieſer Linie zugehörigen ſöhligen Winkel in Stunden wiſſen; ſo wird der Zeiger bey Ziehung der erſten Linie auf ME 12 geſtellt, und alsdann zeigt er beym Ziehen der andern Linie die verlangten Stunden an.

E. **Bey Meſſung der Winkel mit den Eiſenſcheiben**, hat man zwey derſelben von einerley Art nöthig, wie ſchon in II erfordert wurde.

Auch wird man aus a. D. ſehen, daß das Verfahren mit den Eiſenſcheiben, beſonders bey ſchiefen Linien, ſehr mühſam, und der Gefahr zu fehlen ſehr ausgeſetzt iſt, indem die ſöhlige Stellung ihrer Ebene und richtige Findung des obſervirten Streichens donlegichter Linien, ſehr vielen Schwierigkeiten unterworfen iſt.

Wie man mittelſt der Eiſenſcheiben einen Zug verrichtet, ſehe man den Artikel Zug nach.

Elaſticae laminae curvatura, ſiehe elaſtiſche Linie.

Elaſtiſche Aufgabe, ſiehe elaſtiſche Linie.

Elaſtiſche Linie, *Curva elaſtica*, *Elaſticae laminae curvatura*, die Krümmung eines federharten Blechs, iſt eine krumme Linie, welche entſtehet, wenn ein federhartes Blech an dem einen Orte befeſtiget, und an dem andern Ende ein Gewicht angehängt wird. Die Natur dieſer Linie hat ſchon Gallilaeus zu unterſuchen ſich bemühet, und vermeint, ſie wäre von der Parabel des Apollonii nicht unterſchieden. Die beyden Jeſuiten Pardies und de Lanis jener in ſeiner Statica, dieſer in ſeinem Magiſterio naturae et artis Tom. II. Lib. 7. haben dieſes gleichfalls behaupten wollen.

Jacob Bernoulli hat ihre wahre Eigenſchaft zuerſt entdeckt. Acta Erud. 1691. 289. l. c. 1692. p. 207. erinnerte er, daß dieſe Linie mit derjenigen übereinkäme, welche ein leinenes Tuch annimmt, wenn es von der Schwere einer flüßigen Materie ausgedehnt wird. Endlich da niemand eine Auflöſung herausgegeben, ſo gab er ſie l. c. 1692. p. 262.

Herr Hermann hat in ſeiner Phoronomie lib. 2. prop. 17. §. 307. p. 166. dieſe Aufgabe auf eine ganz andere Art aufgelöſt.

II. Es iſt BIA Fig. 1169. eine elaſtiſche Klinge von einförmiger Dicke und Natur. Sie iſt bey B in einem feſten Körper eingeſteckt. Am Ende A iſt ein unbiegſamer Stab AE befeſtiget. Am Ende deſſelben wirket eine Kraft, z. E. das Gewicht φ, in einer beliebigen Richtung EF. Und wir nehmen an, daß das ganze Syſtem in dieſem Augenblicke im Gleichgewicht iſt. Durch das Ende A der Klinge BIA ziehe man GC ſenkrecht auf die Richtung EF der Kraft Φ. Man nehme AG zur Abſciſſen-Linie, und A zum Anfange. Es ſey $AP = x$ eine willkürliche Abſciſſe, und $PI = y$ die zugehörige ſenkrechte Applicate. Man verlängere FE nach D zu, und fälle aus dem Punkte I die ID ſenkrecht auf FD, ſo iſt $\Phi \times ID$ das Moment der Kraft Φ in Betreff des Punktes I. Es iſt aber $ID = CP = AC + AP = AC + x$. Es ſey $AC = c$, welche Größe durch das Dreyeck ACE gegeben iſt, ſo wird $CP = c + x$, und das Moment der Kraft φ, das heißt, ihre Wirkung auf den Punkt I iſt

$$\varphi(c + x),$$

Soll

Soll das Gleichgewicht ſtatt finden, ſo muß dieſes Moment ſo groß ſeyn, als die Gegenwirkung der Elaſticität in I. Nun aber hängt die Größe dieſer Wirkung ab 1) von dem Grade der Elaſticität, welcher in der Beſchaffenheit der Materie der Klinge liegt, welchen Grad der Elaſticität wir durch E ausdrücken wollen; 2) von der Krümmung der Klinge in jedem ihrer Punkte, ſo daß man annehmen kann, die Elaſticität in den verſchiedenen Punkten der krummen Linie verhalte ſich umgekehrt, wie die zu dieſen Punkten gehörigen Halbmeſſer der Krümmung. Es iſt aber für jeden Punkt I der Halbmeſſer der Krümmung, wie es die Geometrie der krummen Linie lehret,

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,d^2y}$$

wo dx als beſtändig betrachtet wird. Folglich verhält ſich aus der zweyten Urſache die Elaſticität des Punktes I wie

$$\frac{-dx.\,d^2y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

multipliciret man dieſen Bruch mit der abſoluten Elaſticität E, die von der innern Beſchaffenheit der Klinge abhängt, ſo iſt die ganze Wirkung der Elaſticität im Punkte I

$$\frac{-E\,dx\,d^2y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und da dieſe Wirkung dem Momente $\varphi\ (c + x)$ gleich ſeyn ſoll,

ſo iſt $\Phi\ (c + x) = \dfrac{-Edx.\,d^2y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Man multiplicire beyderſeits mit dx,

ſo iſt $\varphi\ (cdx + xdx) = -E.\dfrac{dx^2.\,d^2y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Das erſte Glied iſt leicht zu integriren. Um aber das zweyte zu integriren, ſo nehme man an, es ſey $dy = \dfrac{dx}{dm}$, wohl verſtanden, daß dx allemahl als eine beſtändige Größe behandelt wird.

Dann wird $d^2y = d(\dfrac{dx}{dm}) = \dfrac{-dx.\,d^2m}{dm^2}$

folglich $dx^2.\,d^2y = \dfrac{-dx^3.\,d^2m}{dm^2}$.

Ferner $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = (dx^2 + \dfrac{dx^2}{dm^2})^{\frac{3}{2}}$

$$= \left(\frac{dx^2.\,dm^2 + dx^2}{dm^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= [\frac{dx^2}{dm^2}(dm^2 + 1)]$$

 = P

$$= \left(\frac{dx^2}{dm^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (dm^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{dx^3}{dm^3} (dm^2 + 1)^{\frac{3}{2}}.$$

Alſo $\frac{dx^2 \cdot d^2y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-dx^3 \cdot d^2m}{dm^2} : \frac{dx^3 (dm + 1)^{\frac{3}{2}}}{dm^3}$

$$= \frac{-dx^3 \cdot d^2m}{dm^2} \cdot \frac{dm^3}{dx^3 (dm^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-dm \cdot d^2m}{(dm^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} (dm^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} (2dmd^2m).$$

Da nun 2dm. d²m das Differenzial von (dm² + 1) iſt, ſo geſchiehet das Integriren nach der gewöhnlichen Regel für die Potenzen, nämlich man bekömmt

$$-\tfrac{1}{2} \frac{(dm^2 + 1)^{-\frac{3}{2} + 1}}{-\frac{3}{2} + 1}$$

oder $(dm^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$

oder $\frac{1}{\sqrt{(dm^2 + 1)}}$

oder $\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}}$

oder $\frac{1}{\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}}}$

oder $\frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

Multipliciret man noch mit $-E$, ſo iſt das Integral des zweyten Gliedes

$$\frac{-Edy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

Das Integral des erſten Gliedes iſt augenſcheinlich

$$\varphi (a + cx + \tfrac{1}{2} x^2)$$

wo a eine willkürliche beſtändige Größe iſt, die man nur in dem einen Gliede anzubringen nöthig hat. Demnach iſt

$$\varphi (a + cx + \tfrac{1}{2} x^2) = \frac{-Edy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

Man

Man quadrire beyderſeits, ſo kömmt

$$\varphi^2 (a + cx + \tfrac{1}{2} x^2)^2 + \frac{E^2 dy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Es ſey für einen Augenblick, der Kürze halben, $a + cx + \frac{1}{2} x^2 = U$,

$$\text{ſo iſt } \Phi^2 U^2 = \frac{E^2 dy^2}{dx^2 + dy^2}$$

$$\Phi^2 U^2 . dx^2 + \varphi^2 U^2 . dy^2 = E^2 dy^2;$$

$$\Phi^2 U^2 dx^2 = (E^2 - \Phi^2 U^2) dy^2.$$

$$\text{Daher } dy^2 = \frac{\Phi^2 U^2 dx^2}{E^2 - \varphi^2 U^2}$$

$$dy = \frac{\varphi U dx}{\sqrt{(E^2 - \Phi^2 U^2}}$$

$$\text{oder } dy = \frac{\varphi (a + cx + \frac{1}{2} x^2) dx}{+ [E^2 - \varphi^2 (a + cx + \frac{1}{2} x^2)^2]}.$$

Dieſes iſt die Differenzial-Gleichung der elaſtiſchen Linie, welche man aber bis jetzt noch nicht hat integriren können. Dieſe Linie wird demnach zu den ſogenannten mechaniſchen Linien gerechnet, worin das Verhältniß der Coordinaten nicht anders als durch eine Differenzial-Gleichung gegeben werden kann.

Zuſatz I. Wenn die Kraft φ unmittelbar am Ende A der Klinge angebracht iſt, ſo verſchwindet die Größe AC oder c, und man hat bloß

$$dy = \frac{\varphi (a + \frac{1}{2} x^2) dx}{\sqrt{[E^2 - \varphi^2 (a + \frac{1}{2} x^2)^2]}}.$$

Zuſatz II. Laßt uns annehmen, daß die Klinge BA Fig. 1170 ſey ſenkrecht in eine verticale Ebene BH eingeſtecket, und am Ende A hänge das Gewicht Φ frey herunter, ſo wird die Richtlinie AG horizontal, die Abſciſſe AP wird auch horizontal, und die Applicate PM vertical. Iſt nun auf der andern Seite eine ähnliche und gleiche Klinge BA, mit einem gleichen Gewichte φ', ſo iſt die krumme Linie BA′ der BA ähnlich und gleich, folglich entſtehet eine ſymmetriſche Linie ABA′, der Scheitel in B iſt. Das nämliche geſchiehet, wenn ABA′ eine einzige Klinge iſt, die in ihrer Mitte B geſtützet, und an den Enden mit gleichen Gewichten beladen iſt. Denn in dieſem Falle vertritt die Gegenwirkung beyder Hälften die Stelle der Ebene BH.

Es ſey wiederum die Ebene BQ Fig. 1171 vertical, und die Klinge BMA in dieſelbe bey B horizontal eingeſtecket. Eine Kraft φ ziehe in der horizontalen Richtung AH, ſo wird die Direktrize AG vertical. Es ſey AP = x, ſo iſt PM = y. Uebrigens bleibet die Gleichung

$$dy = \frac{\Phi (a + \frac{1}{2} x^2) dx.}{\sqrt{[E^2 - \varphi^2 (a + \frac{1}{2} x^2)^2]}}.$$

Wollte man die Abſciſſen auf der Linie QB nehmen, ſo bliebe QP′ = AP = x. Hingegen die neue Applicate P′ M, welche wir z nennen wollen, würde ſeyn

$$z = P'P + PM$$

$$z = P'P + y.$$

Es ſey $P'P = b$, ſo iſt

$$Z = b + y$$
$$dZ = dy.$$

Folglich würde

$$dZ = \frac{\varphi(a + \frac{1}{2}x^2)\,dx}{\sqrt{[E^2 - (a + \frac{1}{2}x^2)^2]}}.$$

Die Gleichung bliebe demnach die nämliche, nur daß beym Integriren (wenn es anginge), eine andere beſtändige Größe herauskommen würde.

Das zweydeutige Wurzelzeichen giebt zu erkennen, daß zu jeder Abſciſſe QB' zwey Applicaten P'M und P'M' gehören, daß folglich die Linie zwey Zweige BMA und BM'A' hat.

Der zweyte mit dem erſteren ähnliche und gleiche Zweig entſtehet, wenn man die Klinge BM'A', welche mit BMA gleich und ähnlich iſt, ebenfalls in B horizontal einſtecket, und bey A' in der Richtung A'Q mit einer gleichen Kraft φ ziehet; oder wenn man die einzige Klinge AMBM'A', ohne daß ſie in B geſtützet ſey, an ihren Enden nach den Richtungen AQ und A'Q ziehet; oder wenn man die Enden A und A' der einzelnen Klinge AM BM'A' mit einem Faden AA' zuſammen bindet.

III. Fig. 1171 a. Unter allen krummen Linien, die zur nämlichen Abſciſſe BC gehören, die die nämliche Länge haben; und die den nämlichen Raum ABD einſchließen, ſoll diejenige gefunden werden, welche bey ihrer Umwendung um die Axe BC den Körper beſchreibet, der die größte oder kleinſte Solidität hat.

Aufl. Es ſey $BP = x$, $PM = y$, ſo werden die gemeinen Eigenſchaften aller dieſer krummen Linien durch folgende beyden Gleichungen ausgedruckt

$$\delta\int ydx = 0$$
$$\delta\int ydx\sqrt{(1 + p^2)} = 0$$

es iſt auch $\delta\int y^2dx = 0$

(δ) iſt das Zeichen der Variation).

Die Coefficienten die da Null werden müßten; wenn jede dieſer Eigenſchaften allein ſtatt fände, ſind

$$dxd\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2}}\right)$$
$$2\ ydx.$$

Man mache alſo dieſe Gleichung

$$d\,\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = b'dx + 2a'ydx.$$

Man multiplicire mit p

$$pd\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) = b'dy + 2a'ydy.$$

Man ſetze $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = u$, ſo wird

$$pd\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) = \frac{udu}{\sqrt{(1-u^2)}}$$

und das Intergral des erſten Gliedes unſerer Gleichung wird

$$-(1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ oder } \frac{-1}{\sqrt{(1+p^2)}}.$$

Alſo

Alſo iſt $\frac{-1}{\sqrt{(1+p^2)}} = c' + b'y + a'y^2$

und $p \left(= \frac{dy}{dx}\right) = \frac{\sqrt{(1-(c'+by+a'y^2)^2)}}{c'+b'y+a'y^2}$

woraus man ziehet

$$dx = \frac{(c'+b'y+a'y^2)dy}{\sqrt{(1-(c'+b'y+a'y^2)^2)}}.$$

Wegen der Zweydeutigkeit des Zeichens $\pm$ welches allemal vor dem Wurzelzeichen zu ſtehen kömmt, hat man 2 krumme Linien, wovon die eine das maximum und die andere das minimum iſt. Dieſe krummen Linien ſind die elaſtiſchen Linien.

Iac. Bernoulli Curvatura laminae elaſticae. Ejus identitas cum curvatura lintei a pondere incluſi fluidi expanſi. Radii circulorum oſculantium in terminis ſimpliciſſimis exhibiti, una cum novis quibusdam theorematibus huc pertinentibus, etc. Acta Erud. 1694. pag. 262.

Iac. Bernoulli ſolutio Problematis Leibnitiani de curva acceſſus et receſſus aequabilis a puncto dato, mediante rectificatione curvae elaſticae. Acta Erud. 1694. pag. 276.

C. H. Z. Conſtructio univerſalis problematis a clariſſimo viro Ioh. Bernoullio, ſuperiori anno menſe Majo propoſiti. Acta Erud. 1694. pag. 338.

Marchionis Hospitalis enodatio difficultatis propoſitae in Actis Eruditorum hujus anni pag. 196 ſuper ſolutione problematis Bernoulliani, quae habetur in commentariis mathematico phyſicis Pariſienſibus. Acta Erud. 1694. pag. 387.

Euler (Leonh.) de Figura curva elaſticae contra objectiones quasdam ill. *D'Alembert*. Acta acad. ſc. Imp. Petrop. 1779. Pars. poſt. 188.

Elementa werden die erſten Gründe der Geometrie genannt, darauf die ganze übrige Mathematik beruhet, weil Euclides ſeinen Büchern dieſen Namen gegeben, darinnen er die Hauptſätze der Geometrie vorträgt. Nachdem giebt man dieſen Namen allen Schriften, darinnen dasjenige von einer Wiſſenſchaft gelehrt wird, was man zuerſt zu lernen nöthig hat. Man ſehe Geometrie des Euklides.

Elementar-Aufgaben, (Geometrie) ſiehe Aufgaben.

Elementum, das Element, heißt in der Differenzial-Rechnung ein unendlich kleines Theilchen einer Größe, z. E. wenn in dem Dreyecke ABC Fig. 691 die Ordinaten PM und pm unendlich nahe ſind, und MR auf pm perpendikular gezogen wird; ſo heißt Pp das Element der Abſciſſe AP, Rm das Element der Ordinate PM, Mm das Element der Linie AM, PMmp das Element der Fläche APM. Wie man das Element einer Größe finden und nutzen ſoll; iſt aus den Elementis Analyſeos infinitorum zu erſehen.

Elevations-Winkel, ſiehe Winkel.

Elle, *Aune*, ein Längenmaß oder ein Stab, deſſen Länge 2 Fuß oder 24 Zoll, den Fuß zu 12 Zoll oder Daumenbreiten gerechnet, halten ſoll, und wornach man ſowohl beym Bau, bey Manufakturen und in den Werkſtätten, als auch ſonſt im gemeinen Handel und Wandel auf vielfältige Weiſe wegmißt, ja eben dadurch noch verſchiedene andere Längenmaße beſtimmt. Man macht ſie gemeiniglich von Eiſen oder Holz, die letztern müſſen aber von rechtswegen an beyden Enden mit Blech beſchlagen und geeicht ſeyn. An einigen Orten wird darauf ſtark geſehen, daß die hölzernen Ellen von keinem ſolchen Holz gemacht wer-

werden, welches, wenn es trocken wird, ſchwindet, wie z. B. Ellern- oder Weidenholz, wodurch die Elle kürzer wird. Gemeiniglich müſſen alle Ellen in einer Stadt geſtempelt oder geeicht ſeyn, damit kein Betrug hiermit vorgehe; worauf die Polizey ein wachſames Auge haben muß. Man theilet die Elle in vier gleiche Viertel, ſo daß ein Viertel 6 Zoll ausmachet. Das erſte oder oberſte Viertel der Elle wird in 2 gleiche Theile welches 2 Achtel giebt, und das erſte oder vorderſte Achtel wieder in zwey Theile, welches $\frac{1}{16}$tel bringt, eingetheilet, ſo daß die ganze Elle durch die letzte Abtheilung in 16 Theile eingetheilet iſt.

Ihre Größe iſt nach franzöſiſchen Linien und Füßen wie folgt:

	Franz. Linien.	Franz. Fuß.
Aachen	2960	2,0555555
Abensberg in Bayern	3685	2,5381944
Aiach in Bayern	3755	2,6076388
Altona	2540	1,7638888
——— Brabanter	3065	2,1284722
Amberg	3702	2,5708333
Amſterdam	3060	2,1249999
—— —— Vlaamiſche	3150	2,1874999
Anſpach	2720	1,8888888
Antwerpen	3078	2,1374999
—— —— kleine	3034	2,1069444
Arras	3094	2,1846110
Augsburg 1) Nach Kruſe	2702	1,8763888
große Elle kleine	2626	1,8236110
Nach Crom Barchent	2542	1,7652777
Kramer	2479	1,7215277
Aurich	2983	2,0715277
Avennes	3272	2,2722221
Bamberg; nach Kruſen	3235	2,2465277
nach andern	2999	2,0826388
Baſel, kleine	2412	1,6743055
Bautzen	2553	1,7729166
Bayern; nach Kruſen	3101	2,1534722
nach Weſtenrieder	3542	2,4597221
Bayreuth	2662	1,8486110
nach andern	3272	2,2722241
Bergen in Norwegen	2782	1,9319444
Bergen op Zoom	3070	2,1319444
Berlin	2956	2,0527777
Bern	2401	1,6673610
Bayersdorf	2924	2,0305555
Bielefeld; nach Kruſen	2593	1,8006944
nach andern	2600	1,8055555
Bonn	2484	1,7249999
Bolzen	3503	2,4326388
——— Brazzen	2433	1,6895833

Bra-

	Franz. Linien.	Franz. Fuß.
Brabanter in Hamburg	3065	2,1284722
Braunau	3445	2,3923610
Braunſchweig	2530	1,7569444
Breda	3070	2,1319444
Bremen	2564	1,7805555
Brelau	2438	1,6930555
—— Schleſiſche	2553	1,7729166
Brugges	3078	2,1374999
Leinwand	3214	2,2319444
Brüſſel, große	3078	2,1374999
kleine	3034	2,1069444
Budiſſin	3553	2,4673810
Burglangenfeld	3683	2,5576388
Burghauſen	3683	2,5576388
Buxtehude	2580	1,7916666
Cadix in Leinen Brab.	3078	2,1374999
Calenberg	2580	1,7916666
Cammerich	3176	2,2055555
Carlsbad	3002	2,0847222
kleine	2623	1,8215277
Casſchau	2675	1,8576388
Caſſel	2488	1,7277777
Celle	2588	1,7972222
Chriſtiana	2782	1,9319444
Cleve	2554	1,7736110
Coblenz	2474	1,7180555
Coburg	2599	1,8048610
Cölln, nach Kruſe, große	3080	2,1388888
kleine	2545	1,7673610
nach andern	2554	1,7736110
Cöthen	2819	1,9576388
Conſtanz	3295	2,2881944
kleine	3063	2,1270833
Coppenhagen	2782	1,9319444
Cracau	2506	1,6302777
Crems	3445	2,3923610
Culmbach	2715	1,8854166
Dännemark	2782	1,9319444
Danzig	2541	1,7645833
Decklendorf	3683	2,5576388
Delf	3060	2,1249999
Dingelfingen	3683	2,5576388
Dresden	2509	1,7323610
Dublin	5069	3,5201388
Duisburg	2956	2,0527777
Dünkirchen	2998	2,0824444
Düſſeldorf	2392	1,6611110

	Franz. Linien.	Franz. Fuß.
Edenburg	4212	2,9249999
Eichſtädt	3430	2,3819444
Einbeck	2580	1,7916666
Elbingen	2505	1,7395833
Emden	2972	2,0638888
England, in Leinen	5069	3,5201338
Tapezerey	3041	2,1118055
Eperies in Ungarn	4306	2,9902777
Erdingen	3683	2,5576388
Erfurt	2437	1,6923610
Erlangen	2924	2,0305555
Frankfurt am Mayn	2392	1,6611110
Brabanter	3065	2,1284722
Pariſer	5264	3,6555555
Frankfurt an der Oder alte	2941	2,0423610
Berliner	2956	2,0527777
Freyberg in Sachſen	2512	1,7444444
Friedberg in Bayern	3683	2,5576388
Gallen, Wolle	2756	1,9138888
Leinwand	3186	2,2124999
Geldern	2940	2,0416666
Ghend	3078	2,1374999
in Leinwand	3214	2,2319444
Glaz	2598	1,8041666
Görlitz	2499	1,7354166
Gothenburg	2632	1,8277777
Göttingen	2580	1,7916666
Gotha	2506	1,7302777
Gräz	3808	2,6444443
Guben	2963	2,0576388
Gundelfingen	2601	1,8062499
Haag	3060	2,1249999
Halle, lange	2956	2,0527777
kurze	2532	1,7383333
Hamburg	2540	1,7638888
Brabanter	3065	2,1284722
Hameln	2580	1,7916666
Hamm	2554	1,7736110
Hannover	2580	1,7916666
Harburg	2580	1,7916666
Harlem	3226	2 2402777
Hatzfurt	2999	2,0826388
Hefner	2825	1,9618055
Herferden	2570	1,7847222
Hildesheim	2484	1,6249999
Hirſchberg	2553	1,7729166
Hof	2825	1,9618156

Holl-

	Franz. Linien.	Franz. Fuß.
Hollſtein	2540	1,7638886
Jägerndorf	2520	1,7499993
Ingolſtadt	3530	2,4513888
Inſpruck	3485	2,4201385
Kaufbeuern	2615	1,8159718
Kellheim	3683	2,5576383
Kempten	3012	2,0916665
Kiel	2550	1,7708330
Kitzingen	2643	1,8354162
Königsberg	2548	1,7693938
Koppenhagen	2782	1,9319439
Köthen	2819	1,9576383
Krems	3316	2,0027774
Kufſtein	3479	2,4159714
Langenſalza	2562	1,7791662
Landshut	3683	2,5576383
Landsberg	3683	2,5576383
Lauban	2499	1,7354147
Leiden	3028	2,1027768
Leipzig	2506	1,7402774
Leitkirche	3115	2,0631941
Lindau	3070	2,1319441
Linz	3550	2,4652775
Lippſtadt	2564	1,7798606
Löbau	2506	1,7402774
London, in Leinwand	5069	3,1201382
Löwen	3079	2,1381937
kleine	3034	2,1069441
Lübek	2558	1,7763882
Lüneburg	2580	1,7906662
Lüttich	2445	1,6979161
Magdeburg	2956	2,0527771
alte	2486	1,7958326
Mannheim	2473	1,7173605
Maſtrich	3030	2,0854165
Maynz	2433	1,6895829
Mecheln	3034	2,1169441
Memel	2544	1,7666662
Memmingen	3110	2,1597221
Middelburg	3060	2.1249997
Mindelheim	2800	1,9444443
Minden	2566	1,7819438
Mosburg	3683	2,5576383
Münchberg	2715	1,8854163
München	3701	2,5701388
Münden	3584	2,4888883
Münſter	3584	2,4888883

	Franz. Linien.	Franz. Fuß.
neue	2580	1,7916662
Namur	2940	2,0406663
Narva	2652	1,8316662
Naumburg	2506	1,7402774
Navarra	2584	1,7944441
Neuſſchatel	4932	3,4249996
Neuhof	2924	2,0305546
Neumark	3392	2,3557470
Neuſtadt an der Aiſch	2999	2,0826379
Nienburg	2580	1,7916662
Niemegen	2940	2,0416663
Nördlingen	2428	2,1861100
Nordhauſen	2428	2,1861100
Norwegen	2782	1,9319439
Nürnberg	2924	2,0305546
Oſchenburg	4995	3,4697492
Ochſenfurt	2576	1,9898882
Oldenburg a. d. Hurte, nach Kr.	2575	1,7888882
nach Engelbrecht	2564	1,9805550
Osnabrück	2586	1,7958326
Leinwand	2667	1,8520826
Oſtende	3100	2,0927777
Oſterhofen	3683	2,5576383
Oſterode	2580	1,7916662
Oudenarde	2690	1,8680550
Paderborn	2392	1,6611105
Paſſau	3400	2,3611110
Pernau	2432	1,6888885
Pfaffenhoven	3683	2,5576383
Poſen	2525	1,7534713
Prag	2625	1,8229157
Wiener	3445	2,3923606
Presburg	2474	1,7180549
Raguſa	2275	1,5800604
Ratzeburg	2580	1,7916662
Ravensberg	3047	2,1159717
Regensburg	3593	2,4951383
Reichenbach in Schleſien	2635	1,8298606
Reichenthal	3683	2,5576383
Reval	2373	1,6478161
Riga	2430	1,6874997
Riedenburg	3683	2,5076383
Roban	5098	3,5402170
Roberda	3104	2,1555553
Roſtock	2564	1,7805550
Rothenburg an der Tauber	2599	1,8048602
Rotterdam	3060	2,1249997

Ro-

	Franz. Linien.	Franz. Fuß.
Roveredo	3302	2,2930554
Rúremond	3041	2,1118053
Ryſſel	3056	2,1222217
Salzburg, Seiden	3559	2,4715271
— Leinen	4458	3,0958326
St. Gall, Wolle	2731	1,8965275
Leinwand	3554	2,4680551
Scharfenberg in Sachſen	2584	1,7944438
Schleſiſche	2553	1,7729162
Schmiedeberg	2473	1,7173606
Schrobenhauſen	3683	2,5576386
Schweden	2632	1,8277774
Schweinfurt	2586	1,7958326
Soeſt	2553	1,7729162
Solothurn	2437	1,6921605
Speyer	2440	1,6944441
Stade	2580	1,7916662
Stettin alte	2885	2,0034775
Berliner neue	2956	2,0527771
Stockholm	2632	1,8277774
Stralſund	2580	1,7916662
Strasburg	2262	1,5708328
Straubingen	2585	1,7951382
Sulzbach	3652	2,5361107
Thoren	2525	1,7534722
Tournay	2745	1,9062499
Trient, Wollen	3000	2,0833333
Seiden	2713	1,8840277
Trier	2474	1,7180555
Trieſt Wollen	2996	1,0805555
Seiden	2840	1,9722221
Troppau	2520	1,7599999
Ulm	2520	1,7599999
Valenciennes	2920	2,0277777
Verden	2580	1,7916666
Vilshofen	3683	2,5576388
Warendorf	2593	1,8006944
Warſchau	2617	1,8173610
Waſſerburg	3683	2,5576388
Weilsheim	3683	2,5576388
Weſel	2956	2,0527777
Wien	3445	2,3923610
Windsheim	2924	2,0305555
Wismar	2580	1,7916666
Wittenberg	2985	2,0729166
Würzburg	2573	1,7868055
Ypern	3100	2,1527777

	Franz. Linien.	Franz. Fuß.
Zelle	2580	1,7916666
Zittau	2526	1,7541666
Zürch	2708	1,8805555

Gewicht und Ellenvergleichungen, wie nämlich der berümteſten Handelsplätze ihr Gewicht und Ellen ſich gegen einander verhalten 4. Nürnberg 4½ B. 4 gl.

Haaſens (Sal.) ſicherer Handlanger, welcher das Ellenmaaß von mehr als 250 Städten und ihr Gewicht anzeiget. Frankf. 1772. 8.

Paricii (Georg Heinr.) allezeit fertiger Ellenrechner. Regensp. 1725. 10½ B. 3 gl.

Schoap (I. G.) europäiſche Ellenvergleichungen aller ausländiſchen Ellen, der vornehmſten Handelsplätze. Fol. 1722. 1 Thl.

Verhältniß der ſchleſiſchen Ellen gegen den rheinl. Fuß; in ſchleſ. patr. Geſ. ok. Schr. B. III. S. 41. und 50.

Ellipſe Fig. 943. iſt eine krumme Linie wie ABCD, welche in Betrachtung zweyer Punkte E und F ſo beſchrieben iſt, daß die Summe beyder Entfernungen eines Punkts im Umkreiſe, von den beyden feſten Punkten E und F allemal einerley iſt. Z. E. daß BE + BF = DE + DF.

Dieſe feſten oder unverrückten Punkte E und F werden aus optiſchen Gründen die Brennpunkte genannt.

Die Linien EB, ED, FB und FB, welche von einem Brennpunkte bis zum Umkreiſe reichen, ſind Vectoren. Die gerade Linie AC welche durch beyde Brennpunkte gehet, und beyderſeits bis an den Umkreis reichet, iſt die große Axe oder Hauptaxe oder erſte Axe der Ellipſe. Die Enden A und C auf derſelben ſind die Scheitel der Ellipſe. Die Entfernungen EA, EC eines Brennpunkts von beyden Scheiteln, heißen die Apſiden (die Aſtronomen verſtehen unter dieſem Worte die Scheitel ſelbſt). Der Punkt C in der Axe, welcher in der Mitte zwiſchen beyden Scheiteln oder zwiſchen beyden Brennpunkten liegt, iſt der Mittelpunkt der Ellipſe. Die Entfernung GE und GF des Mittelpunkts von jedem Brennpunkte, iſt die Eccentricität. Die gerade Linie HI welche die große Axe ſenkrecht im Mittelpunkte ſchneidet, und beyderſeits bis an den Umkreis reichet, iſt die kleine Axe, Zwerchaxe, zweyte Axe oder konjugirte Axe; die gerade Linie KL oder MN welche die große Axe im Brennpunkte ſenkrecht ſchneidet, und beyderſeits bis an den Umkreis reichet, iſt der Parameter.

Man ſehe auch krumme Linien der zweyten Ordnung (51. 53.)

Ellipſe, die größte und kleinſte Abſciſſe derſelben zu finden. S. Abſciſſe größte und kleinſte ꝛc. Ex. I.

Ellipſe. Ausſchnitte.

1. Die Ausſchnitte einer Ellipſe verhalten ſich zu den entſprechenden Ausſchnitten eines Cirkels, wie die Ellipſe zu dem Cirkel oder umgekehrt.

Es ſey Fig. 961. der Ausſchnitt des Cirkels KAP und CAP der Ausſchnitt der Ellipſe, ſo verhält ſich KAP zu CAP wie der Cirkel zur Ellipſe; denn es iſt klar, daß CLP ſich zu KLP verhalte wie der Cirkel zur Ellipſe. Die Dreyecke aber CAL : KAL = CL : KL = RE : DR folglich wie die Ellipſe zu dem Cirkel. Alſo KAL + KLP zu CAL + CLP wie der Cirkel zur Ellipſe.

Ausſchnitte der Ellipſe und des Kreiſes, die der ganzen Fläche commenſurabel ſind, und eine authentiſche Reiche machen. Von Nils Johann Bergſten.

I. Wenn

1. Wenn Fig. 950 einer Ellipſe Halbmeſſer XM, die gerade Linie DC, welche nicht durch den Mittelpunkt X gehet, in c halbirt, ſo halbirt er auch den Ausſchnitt CMDX.

Es ſey AX eine halbe Axe der Ellipſe; aus X als Mittelpunkte, beſchreibe man einen Kreis durch A. Man ziehe CE, MH, DG, cF ſenkrecht auf AX, die drey erſten ſchneiden den Kreis in N, L, B. Man ziehe NB, die cF in K ſchneidet. Weil Cc = cD, ſo iſt NK = KB; aber MH : LH = CE : NE = cF : KF; und die Punkte M, c, X liegen in einer geraden Linie, alſo iſt auch LKX eine gerade Linie, welche den Ausſchnitt des Kreiſes NLBX halbirt. Ferner MDX : LBX = DG : BG = CMDX : NLBX. (Man ſehe die Einleitung zu Maclaurins Abhandlung von den Fluxionen). Weil alſo LBX = ½ NLBX ſo iſt auch MDX = ½ CMDX.

Zuſatz. Umgekehrt, wenn XM den Ausſchnitt CMDX halbirt, halbirt er auch die gerade Linie CD. Thäte er das nicht, ſo ließe ſich aus X ein andrer Halbmeſſer der Ellipſe ziehen, welcher CD, und alſo auch den Ausſchnitt halbirte.

2. Wenn Fig. 951 die elliptiſchen Ausſchnitte AKBX, BLCX gleich groß, und werden XL, ſo gezogen, daß ſie AB, BC in a, b halbiren, ſo iſt Xa : XK = Xb : XL.

3. Von den Punkten F, G Fig. 952 ziehe man zwey Parallelen, FA, GB, nach entgegengeſetzter Seite der FG, wird nun AB in a halbirt, und a p jenen beyden parallel gezogen, ſo iſt ap der halbe Unterſchied jener Parallelen.

Man ziehe AG, welche ap in C ſchneidet. Weil Aa = aB, ſo iſt AC = CG, Ca = ½ BG, Cp = ½ AF, alſo ap = Ca — Cp = ½ BG — ½ AF.

4. Das m fache der Fläche einer Ellipſe, ſey in n gleiche Ausſchnitte ABX = BCX = CDX. . . getheilt. Fig. 951. 953. Man ziehe einen Durchmeſſer BX nach Gefallen und ſeine Ordinaten AF, BG, CH, DI. Dann iſt (Fig. 951.) die Summe aller Ordinaten BG, CH. . . die auf einer Seite des Durchmeſſers liegen, ſo groß, als die Summe der Ordinaten DI, EV, EF, welche ſich auf der andern Seite befinden. Auch die Abſciſſen auf dieſem Durchmeſſer auf einer Seite des Mittelpunkts XF, XG . . . betragen ſo viel zuſammen, als die Abſciſſen auf der andern Seite XV, XH, XI. . . . Eben ſo iſt Fig. 953 KN + DI + BG = AF + CH + EV + LM und FX + NX + HX + IX = VX + GX + MX.

Erſter Fall. m = 1, n gerade. (Fig. 951.)

Der Satz bedarf da faſt keines Beweiſes. Es ſey die einfache Fläche der Ellipſe in die gleichen Ausſchnitte AKX, KBX, BLX, LCX. . . getheilt, deren Menge die gerade Zahl = n, und man ziehe die Ordinaten AF, KP, BG, LQ. . . Wird nun der Durchmeſſer AM gezogen, ſo iſt in der halben elliptiſchen Fläche ABCM von erwähnten Ausſchnitten die Menge ½ n enthalten, und ſo der Punkt M Endpunkt in einem der Bogen der Ausſchnitte. Es ſey MR die gezogene Ordinate, ſo iſt AF = MR; XF = XR. Auch ſo KP = DI, XP = XI, und BG = NS, XG = XS, und LQ = EV, XQ = XV u. ſ. w. Daher MR + CH + LQ + BG + KP = AF + OT + EV + NS + DI, und XP + XF + XG + XT + XQ = XI + XR + XS + XH + XV.

Zweyter Fall. Noch m = 1, und n ungerade.

Es ſey die einfache Fläche der Ellipſe in gleiche Ausſchnitte ABX, BCX, CDX, . . getheilt, deren Zahl ungerade = n iſt. Der Durchmeſſer AM halbirt

birt die Fläche der Ellipſe, da nun n ungerade, und A Endpunkt in einem der Bogen der Ausſchnitte iſt, ſo halbirt AM auch einen der Ausſchnitte. Derſelbe ſey CDX. Aus eben dem Grunde wird ein Ausſchnitt DEX vom Durchmeſſer BN halbirt, und ſo werden die übrigen Ausſchnitte AEX, ABX, BGX von den Durchmeſſern CO, DK, EL halbirt. Ferner iſt klar, daß der Punkte K, L, M, N, O ſo viel ſind, als der Punkte A, B, C, D, E, oder $= n$. Man ziehe die gerade Linien AB, BC, CD, DE, EA, welche die Durchmeſſer DK, EL, AM, BN, CO in a, b, c, d, e ſchneiden; auch ſeyen KP, LQ, MR, NS, OT, af, bg, ch, di, eu mit den Ordinaten des Durchmeſſers XP parallel, und ſchneiden dieſen Durchmeſſer in P, Q, R, S, T, f, h, i, u. Weil nun AM den Ausſchnitt CDX halbirt, ſo iſt $Cc = Dc$ (1), aus eben dem Grunde $Dd = Ed$, $Ee = Ae$, $Aa = Ba$, $Bb = Cb$. Auch $XM : Xc = Xd = XO : Xe = XK : Xa = XL : Xb$ (2), ſolchergeſtalt $MR : ch = NS : di = OT : eu = KP : af = LQ : bg$. Aus dieſen Proportionen folgt

$NS + OT : di + eu = NS : di$

und $KP + LQ + MR : af + bg + ch = KP : af$

Aber $NS : di = KP : af$,

daher $NS + OT : KP + LQ + MR = di + eu : af + bg + ch$.

Und weil $NS = BG$, $OT = CH$, $KP = DI$, $LQ = EV$, $MR = Af$, ſo iſt $BG + CH : DI + EV + AF = di + eu : af + bg + ch$; daher auch $BG + CH : DI + EV + AF = BG + CH + di + eu : DI + EV + AF + af + bg + ch$.

Aber $\frac{1}{2} BG = \frac{1}{2} AF + af$ (3.)

$\frac{1}{2} BG + CH = bg$

$\frac{1}{2} CH = \frac{1}{2} DI + ch$

$di = \frac{1}{2} DI + \frac{1}{2} EV$

$eu = \frac{1}{2} AF + \frac{1}{2} EV$

und deswegen $BG + CH + di + eu = DI + EV + AF + af + bg + ch$.

Nun ſind in vorhergehender Analogie das dritte und vierte Glied gleich, alſo auch das erſte und zweyte, oder $BG + CH = DI + EV + AF$; welches das erſte war.

Es ſey YZ der zum Durchmeſſer PX gehörige Durchmeſſer. Man ziehe die Ordinaten Al, Bm, Cn, Dp, Eq. Da beweiſet man wie vorhin, daß $Al + Bm = Cn + Dp + Eq$. Alſo iſt auch $XF + XG = XH + XI + XV$; welches das zweyte war.

Dritter Fall. m jede ganze Zahl, nur nicht $= 1$. und m und n Primzahlen gegen einander. (Fig. 953.)

Einer Ellipſe mehrmal genommene Fläche ſey in n gleiche Ausſchnitte getheilt, ABX, BCX, CDX, DEX, EKX, KLX, LAX. Weil nun m angiebt, wie oft die Fläche genommen iſt, m und n gegeneinander Primzahlen ſind, ſo iſt n die Anzahl der Punkte A, B, C, D, E, K, L. Folglich iſt die einfache Fläche der Ellipſe in die Ausſchnitte AKX, KDX, DBX, BLX, LEX, ECX, CAX getheilt, deren Anzahl $= n$. Weil nun der Ausſchnitt ABX = Ausſchnitt CDX, ſo iſt DBX = ACX. Eben ſo beweiſet man ACX = BLX. BLX = AKX = ELX = KDX = CEX = DBX; alſo ſind alle Ausſchnitte AKX, KDX... gleich, und wenn n eine gerade Zahl iſt, beweiſet man wie im erſten Falle, iſt aber n eine ungerade Zahl, beweiſet man wie im andern Falle, daß $KN + DI + BG = AF + CH + EV + LM$, und daß $XF + XN + XH + XI = XV + XG + XM$.

Vier-

Vierter Fall. m und n Primzahlen gegen einander (953. Fig.)

Der EllipſeFläche heiße $= A$, und es ſin μ, ν die Primzahlen, auf welche das Verhältniß $m : n$ gebracht iſt. Auch ſey $m = r.\mu$; $n = r.\nu$. Der Vorausſetzung gemäß, iſt jeder Ausſchnitt $\frac{m.A}{n} = \frac{r.\mu.A}{r.\nu} = \frac{\mu.A}{\nu}$; alſo ν Ausſchnitte geben die Fläche μ mal, und das letzte Ende ſchließt ſich an des erſten Anfang. Daher treffen mit jedem dieſer Ausſchnitte einer oder mehr der folgenden zuſammen; eben das gilt von den Punkten A, B, C, D, und den Ordinaten AF, BG, CH u. ſ. w. Der Lehrſatz auf dieſen Fall angewendet, enthält alſo nichts anders, als daß (951. Fig.) $r\,(BG + CH) = r\,(AF + EV + DI)$ und $r\,(FX + GX) = r\,(VX + HX + IX)$ oder (953. Fig.) $r\,(KN + DI + BG) = r\,(AF + CH + EV + LM)$ und $r\,(FX + NX + HX + IX) = r\,(VX + GX + MX)$, welches alles aus dem vorhergehenden klar iſt.

Dieſer Satz gilt nicht, wenn entweder $n = 1$ oder $\nu = 1$.

5. Man ſieht leicht, daß ſich das bisherige auch vom Kreiſe darthun läßt, bey welchem überdieß die Ausſchnitte ſich wie die Bogen verhalten, und alle Ordinaten auf ihrem Durchmeſſer ſenkrecht ſind. Iſt alſo das m fache vom Umfange eines Kreiſes in n gleiche Bogen AB, BC, CD. . . getheilt, (955. 654 Fig.), nennt man ferner den halben Umkreis π, den Winkel $BXF = \phi$, ſo werden die Bogen $AB = BC = CD = \text{ect.} = \frac{2m\pi}{n}$, $BG = \sin\phi$, $XG = \cos\phi$, $CH = \sin(\phi + \frac{2m\pi}{n})$, $XH = \cos(\phi + \frac{2m\pi}{n})$, $DI = \sin(\phi + \frac{4m\pi}{n})$, $XI = \cos(\phi + \frac{4m\pi}{n})$, &c. $AF = \sin(\phi + \frac{(2n-2).m\pi}{n})$, $XF = \cos(\phi + \frac{(n-1).2m\pi}{n})$.

Addirt man alle dieſe Sinus und Coſinus, und giebt auf ihre bejahten und verneinten Werthe acht, ſo lehret vorhergehender Satz, daß $\sin\phi + \sin(\phi + \frac{2m\pi}{n}) + \sin(\phi + \frac{4m\pi}{n}) + \text{ect.} + \sin(\phi + \frac{(n-1).2m\pi}{n}) = 0$, und daß $\cos\phi + \cos(\phi + \frac{2m\pi}{n}) + \text{ect.} + \cos(\phi + \frac{(n-1).2m\pi}{n}) = 0$.

6. Anmerkung. Dieſe elliptiſche Fläche in gleiche Ausſchnitte zu theilen, iſt keine bloße Speculation, ſondern es läßt ſich bewerkſtelligen, ſo oft man den Umfang des Kreiſes in gleiche Bogen theilen kann. Alſo läßt ſich dieſe Theilung mit aller geometriſchen Genauigkeit verrichten, wenn die Zahl der Ausſchnitte 3, 6, 12, 24. . . oder 4, 8, 16. . . oder 5, 10, 20. . . oder 15, 30. . . ſeyn ſoll. Mit Beyhülfe der gleichſeitigen Hyperbel kann man die Theilung weiter für folgende Zahlen fortſetzen: 9, 18, 36; oder 27, 54. . . oder 81, 162. . . oder 243, 486. . . oder 45, 90. . . oder 135, 270. . . Durch Conſtruktion algebraiſcher Gleichungen läßt ſich des Kreiſes Umfang in ſo viel Theile theilen als man verlangt. (Friſii Op. T. I. Probl. 58. Hoſp. ſect. coniques L. 10). Eben die Methode, und

was man ſonſt für eine für den Kreis angiebt, dient auch, die elliptiſche Fläche zu theilen. Folgender Lehrſatz enthält den Grund davon: eine Ellipſe (950 Fig.) und ein Kreis ALB, ſind über eine Axe AX beſchrieben, und haben einen Mittelpunkt X. Man ziehet von des Kreiſes Punkten N, B, Perpendikel NE, EG auf AX, welche der Ellipſe Umfang in C, D, begegnen, ſo verhält ſich der Bogen NB zum ganzen Umfange des Kreiſes wie der elliptiſche Ausſchnitt CMDX zur ganzen Fläche der Ellipſe.

7. Eines Kreiſes Umfang iſt in n gleiche Theile AB = BC = CD = DE = EA (955 Fig.) getheilt. Man nimmt einen Punkt K nach Gefallen in oder auſſer dem Kreiſe an, und zieht AK, BK, CK, DK, EK. Des Kreiſes Mittelpunkt iſt X, und ſein Halbmeſſer = R, ſo iſt $AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2 + EK^2 = n. (R^2 + KX^2)$.

Man ziehe AF, BG, CH, DI, EV, ſenkrecht auf XK, ſo iſt XF + XG = HX + XI + XV (5), alſo 2XK. XF + 2XK. XG = 2XK. XH + 2XK. XI + 2XK. XV.

Aber $AK^2 + 2XK.\ XF = AX^2 + KX^2$
$BK^2 + 2XK.\ XG = BX^2 + KX^2$
$CK^2 = CX^2 + KX^2 + 2XK.\ XH$
$DK^2 = DX^2 + KX^2 + 2XK.\ XI$
$EK^2 = EX^2 + KX^2 + 2XK.\ XF$;

Daher $AK^2 + BK^2 + DK^2 + EK^2 + 2\,XK.\ (XF + XG) = n\ (R^2 + KX^2) + 2XK\ (XH + XI + XV)$. Abgezogen 2XK (XF + XG) = 2XK (XH + XI + XV), bleibt $AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2 + EK^2 = n\ (R^2 + KX^2)$.

1. Zuſatz. Wenn Halbmeſſer und KX der Größe nach gegeben ſind, und die Menge der Theile gegeben iſt, ſo iſt auch die Summe der Quadrate der Linien, die aus K nach den Theilungspunkten gegeben ſind, gegeben.

2. Zuſatz. Nimmt man K im Umfange des Kreiſes, ſo werden die Linien von K an die Theilungspunkte Sehnen zugehöriger Bogen, und die Summe der Quadrate dieſer Sehnen iſt $2\,n.\ R^2$.

8. Der Umfang eines Kreiſes ſey in eine ungerade Zahl gleicher Bogen getheilt. OP, PQ, QR, RS, ST, TZ, ZO (954 Fig.) Von einem Punkte X im Umfange ziehe man die Sehnen XO, XP, XQ... Ferner den Durchmeſſer Xa, und nenne XO die erſte, (nämlich die, welche in dem einen Halbkreiſe den größten Winkel mit dem Durchmeſſer macht) auch ſo XP die zweyte XQ die dritte, XR die vierte, u. ſ. w. ſo daß XZ, welche in dem andern Halbkreiſe den größten Winkel mit dem Durchmeſſer macht, die letzte wird. Die Sehnen, deren Zahlen ungerade ſind, 1, 3, 5, 7... betragen ſo viel zuſammen, als die, deren Zahlen gerade ſind, 2, 4, 6, 8. Das iſt, XO + XQ + XS + XZ = XP + XR + XT.

Man beſchreibe um X, als einen Mittelpunkt, einen Kreis, ſo groß als der Kreis XQS: XO, XQ, XS, XZ begegnen dem andern Halbkreiſe in B, D, K. Man ziehe FR, XT, dem andern Halbkreiſe in B, D, K. Man ziehe FX ſenkrecht auf Xa, und AF, CH, EV, LM, BG, DI, KN ſenkrecht auf XF. Weil nun der Kreis XQS von Xb berührt und von AX geſchnitten wird, ſo ſind die Winkel AXb = XaO, alſo die Bogen XO = 2Ab; aus eben dem Grunde, die Winkel XaT = KXb, und Bogen XT = 2. Kb, daher auch der Bogen OXT = 2. AK. Eben ſo wird bewieſen, daß Bogen PXZ = 2BL. Ferner iſt ZS = 2. LE, SQ = 2. CE, QO = 2.

$= 2 . AC$, $TR = 2 . KD$, $RP = 2 . DB$. Aber die Bogen PZ, ZS, SQ, QO, OT, OR, RP ſind gleich, alſo auch die Bogen BL, LE, EC, CA, AK, KD, DB gleich, ſolchergeſtalt $AF + CH + EV + LM = BG + DI + KN$. (5). Da nun die Dreyecke XaO, AXF ähnlich ſind, und $Xa = 2 . XA$, ſo iſt $XO = 2 AF$. Auch ſo wird bewieſen $XQ = 2CH$, $XS = 2EV$, $XZ = 2LM$, $XP = 2 BG$, $XR = 2DI$, daß $XT = 2KN$, daher $XO + XQ + XS + XZ = XP + XR + XT$.

9. Ein Halbkreis XCZ, deſſen Halbmeſſer R heißen mag, ſey in eine ungerade Zahl n gleicher Theile getheilt, (956 Fig.) Jeder der Bogen ZE, ED, DC, CB, BA enthalte zwey ſolcher Theile, der letzte AX nur einen. Man ziehe die Sehnen XE, XD, XC, XB, XA, und nenne XE die erſte, (die nämlich dem Durchmeſſer XZ am nächſten liegt.) dann nach der Ordnung, XD die andre, XC die dritte u. ſ. w. Alsdenn iſt der Halbmeſſer ſo groß, als der Ueberſchuß der Summe der Sehnen, die ungerade Zahlen haben, über die Summe derer, die gerade haben, $R = XE - XD + XC - XB + XA$.

Man nehme in dem andern Halbkreiſe die Bogen Xa, ab, bc. . . ſo groß als die Bogen XA, AB, CD. . . und ziehe ihre Sehnen, ſo kömmt $Xa + Xc + Xe + XE + XC + XA = Xb + Xd + XZ + XD + XB$, (8) oder $2 XE + 2XC + 2 XA = 2R + 2XD + 2XB$, oder $XE + XC + XA = R + XD + XB$, oder $XE - XD + XC - XB + XA = R$.

Zuſatz. Alſo $\sin \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{2} = \sin \frac{3}{10} \pi - \sin \frac{1}{10} \pi = \sin \frac{5}{14} \pi - \sin \frac{3}{14} \pi + \sin \frac{1}{14} \pi = \sin \frac{7}{18} \pi - \sin \frac{5}{18} \pi + \sin \frac{3}{18} \pi - \sin \frac{1}{18} \pi = \sin \frac{2m - 1}{4m + 2} \pi - \sin \frac{2m - 3}{4m + 2} \pi + \sin \frac{2m - 5}{4m + 2} \pi - \&c. + \sin \frac{\pi}{4m + 2}$. Das letzte Glied bekömmt + oder —, nachdem m gerade oder ungerade iſt.

10. In einem Halbkreiſe nehme man einen Bogen ZD nach Gefallen, und ziehe die Sehne XD (956 Fig.). Nimmt man nun zwey zuſammenhängende Bogen CE, Ee, ſo groß als ZD, und zieht die Sehnen XC, XE, Xe, ſo verhält ſich der Halbmeſſer zu XD, wie die mittlere Sehne XE zur Summe der beyden äuſſerſten $XC + Xe$. Nimmt man aber die zuſammenhängenden Bogen, die ſo groß als ZD ſind, BA, ac; ſo, daß X in einem derſelben liegt, und ziehet die Sehnen XB, Xa, Xe, ſo verhält ſich der Halbmeſſer zu XD, wie die mittlere Xa, zum Unterſchiede der beyden äuſſerſten $Xc - XB$.

Dieß beweiſt Hospital. Auch iſt es nichts anders, als der bekannte trigonometriſche Lehrſatz: Wenn drey Kreisbogen eine arithmetiſche Progreſſion machen, ſo verhält ſich der Halbmeſſer zum doppelten Coſinus des Unterſchiedes, wie der doppelte Sinus des mittlern Bogens, zur doppelten Summe, oder doppelten Unterſchiede der Sinuſſe der äuſſerſten Bogen. In dieſer Analogie ſetzt man nur ſtatt des doppelten Coſinus und doppelten Sinus, die Sehnen des doppelten Bogens. Eine Conſtruktion, wie 954 Fig. ſehr deutlich zeigt.

11. Eben das angenommen, was (9) angenommen worden iſt, $R^{\frac{n-1}{2}} = XE . XD . XC . XB . XA$. (956 Fig.)

Weil n die Menge der Bogen CB, BA, Aa, ab u. ſ. w. angiebt, ſo giebt es auch die Menge der Sehnen XZ, XE, Xe, XD, Xd u. ſ. w. an. Daraus

 folgt,

folgt, daß n — 1 die Menge der Sehnen XE, Xc, XD, Xd u. ſ. w. iſt, und $\frac{n-1}{n}$ die Menge der Sehnen XE, XD, XC, XB, XA. Nun iſt

1. R: XE: : R: XE, und weil die Bogen ZD, CE, Ee gleich ſind, iſt
2. R: XD: : XE: Xe + XC
(10). Und da die Bogen ZC, De, eb, Ca gleich ſind, iſt
R: XC: : Xe: XD + XB
: : XC: XZ + XA (10)
: : Xe + XC: XZ + XD + Xb — Xa.

Aber XZ + XD + Xb — Xa = 2R + XD + XB — XA = R + XE + XC (9). Daher
3. R: XC: : Xe + XC: R + XE + XC.
Und weil die Bogen ZB, EA, Ec, Ce, Cb gleich ſind, iſt
R: XB: : R: XB
: : XE: Xc + XA
: : XC: Xe — Xb
: : R + XE + XC: Xe + Xc + XA,
oder
4. R: XB: : R + XE + XC: XE + XC + XA. Endlich, weil die Bogen ZA. Eb, Ec, Cd gleich ſind, iſt
R: XA: : XE: Xb — Xa
: : XC: Xd — Xe
: : XA: XZ — Xe
: : XE + XC + XA: XZ — Xe + Xd — Xc + Xb — Xa.

Aber XZ — Xe + Xd — Xc + Xb — Xa = 2R — Xe + Xd — ect. = R (9); daher.
5. R: XA: : XE + XC + XA: R. Nun iſt bewieſen, daß
1. R: XE: : R: XE
2. R: XD: : XE: Xe + XC
3. R: XC: : Xe + XC: R + XE + XC
4. R: XB: : R + XE + XC: XE + XC + XA
5. R: XA: : XE + XC + XA: R. Alſo folgt

$R^{\frac{n-1}{2}}$: XE. XD. XC. XB. XA: : R: R, daher

$R^{\frac{n-1}{2}}$ = XE. XD. XD. XB: XA. H. S. B.

1. Anmerk. Man hätte vorhergehende Analogien auch ſo darſtellen können:
1. R: XE: : R: XE
2. R: XD: : XE: Xe + XC
3. R: XC: : Xe + XC: 2R + XD + XB — XA (L)
4. R: XB: : 2R: 2XB
: : XD: Xd — Xa
: : XB: XZ — Xc
: : XA: Xd — XE
: : L: 2R — XE + 2Xd — Xc + 2XB — Xa (M).

5. R:

5. R : XA : : 2R : 2XA
: : — XE : Xa — XB
: : 2Xd : 2XC — 2XB
: : — Xc : XC — XD
: : 2XB : 2Xc — 2Xd
: : Xa : Xe — 2XZ
: : M : 3XE — 3XD + 3XC — 3XB + 2XA — XA — 2R (N).

Hier iſt N = 3. R — 2. R (9) = R, welches mit vorigem Beweiſe übereinſtimmt. Weil man aber nicht mehr Proportionen brauchen ſoll, wenn ſich eben die Abſicht durch wenigere erreichen läßt, ſo iſt am beſten, nach 9. den Gliedern L, M, N die Werthe zu geben, welche die geringſte Anzahl Sehnen enthalten.

2. Anmerk. Iſt n keine Primzahl, ſo entſtehet die Potenz des Halbmeſſers aus mehrern Faktoren, als R, R^2, R^3, R^4 ... deren Produkt vom Grade $\frac{n-1}{2}$ iſt, jeder für ſich iſt ſo groß als ein zugehöriges Produkt gewiſſer Sehnen. Dadurch wird der Beweis ſehr verkürzt. Man theile z. B. den Halbkreis π in 15 gleiche Bogen, ſo laſſen ſich die Bogen XE, XD, XC... folgendergeſtalt darſtellen:

$\frac{13}{15}\pi$, $\frac{11}{15}\pi$, $\frac{9}{15}\pi$, $\frac{7}{15}\pi$, $\frac{5}{15}\pi$, $\frac{3}{15}\pi$, $\frac{1}{15}\pi$.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

Die unterſchriebenen Zahlen ſollen ſowohl die Sehnen XE, XD, XC. ... bedeuten, als die Sehnen Xe, Xd, Xc... Da wird R = 1 — 2 + 3 — 4 + 5 — 6 + 7. Weil aber hier π auch in 5 gleiche Theile getheilt iſt, ſo iſt R = 3 — 6 (9). Ferner iſt π in drey Theile getheilt, und deswegen R = 5. Solchergeſtalt iſt hier

R : 3 : : R : 3
R : 6 : : 3 : 3 — 6
R^2 : 3. 6 : : R : R, oder R^2 = 3. 6.
R : 1 : : R : 1
R : 2 : : 1 : 1 + 3 (L)
R : 4 : : 1 : 3 + 5
: : 3 : 1 + 7
: : L : 1 + 3 + 5 + 7 (M) = R + 2 + 4 + 6
R : 7 : : R : 7
: : 2 : 5 — 6
: : 4 : 3 — 4
: : 6 : 1 — 2
: : M ; 1 — 2 + 3 — 4 + 5 — 6 + 7

R^4 : 1. 2. 4. 7 : : R : R, oder R^4 = 1. 2. 4. 7. Und wegen R = 5, kömmt $R^7 = R^4 . R^2 . R$ = 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

Zuſatz. Alſo ſin $\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, ſin $\frac{1}{10}\pi$. ſin $\frac{3}{10}\pi$. = $\frac{1}{4}$, ſin $\frac{1}{14}\pi$. ſin $\frac{3}{14}\pi$. ſin $\frac{5}{14}\pi$ = $\frac{1}{8}$, ſin $\frac{1}{18}\pi$. ſin $\frac{3}{18}\pi$. ſin $\frac{5}{18}\pi$. ſin $\frac{7}{18}\pi$. = $\frac{1}{16}$, und allgemein ſin $\frac{\pi}{4m+2}$. ſin $\frac{3\pi}{4m+2}$. ſin $\frac{5\pi}{4m+2}$. .. ſin $\frac{2m-1}{4m+2}$. $\pi = (\frac{1}{2})^m$.

12. Der Halbkreis ſey in eine gerade Menge gleicher Theile getheilt, die n heißen, von dieſen Theilen enthalte der Bogen Xa (956 Fig.) einen, Xb

drey, Xc fünf u. ſ. w. Man ziehe die Sehnen Xa, Xb, Xc u. ſ. w. Ferner ſey der Halbkreis in 2. n gleiche Theile getheilt, von denen der Bogen XA einen enthalte, XB drey, XC fünf, XD ſieben u. ſ. w. Nun zieht man die Sehnen XA, XB, XC, XD, XE, XF, ſo iſt

$$R^n : XA.\, XB.\, XC.\, XD.\, XE.\, XF :: R^{\frac{n}{2}} : Xa.\, Xb.\, Xc.$$

Denn man ziehe im Quadranten XN die Halbmeſſer MA, MB, MC, u. ſ. w. und im Quadranten NZ von den Punkten D, E, F, Dc, Eb, Fa...; ſo iſt das Dreyeck MAX dem Dreyecke FXa ähnlich, das MBX dem EXb, das MCX dem DXc, weil die Bogen Xa = AX + FZ Xb = XB + EZ, Xc = XC + DZ, daher die Bogen aZ = AF, bZ = BE, cZ = CD, oder aF = AZ = XF, bE = BZ = XE, cD = CZ = XD; auch Winkel XFa = XMA, XEb = XMB, XDE = XMC. Daher

$XM : XA :: XF : Xa$, oder $XM^2 : XA.\, XF :: XM : Xa$

$XM : XB :: XE : Xb$, oder $XM^2 : XB.\, XE :: XM : Xb$

$XM : XC :: XD : Xc$, oder $XM^2 : XC.\, XD :: XM : Xc.$

Dieſe Proportionen zuſammen geben:

$$R^n : XA.\, XB.\, XC.\, XD.\, XE.\, XF :: R^{\frac{n}{2}}.\, Xa : Xb.\, Xc.$$

13. Wenn der Halbkreis in eine gerade Anzahl gleicher Theile getheilt iſt, und Sehnen ſo gezogen werden, wie 12. zeigt, ſo iſt die Verhältniß des Halbmeſſers zur Seite des Quadrates im Kreiſe, aus den Verhältniſſen zuſammengeſetzt, welche der Halbmeſſer zu jeder der Sehnen insbeſondere hat.

1. Der Halbkreis XaZ ſey in a halbirt (958 Fig). Man ziehe Xa, die ſo groß ſeyn wird, als die Seite des eingeſchriebenen Quadrats. Man theile ferner den Halbkreis XAZ in vier gleiche Theile, und ziehe die Sehnen XA, XB, wie im 12. Ziehet man nun den Halbmeſſer MA und die Sehne Ba, ſo erhellet, wie im 12., daß die Dreyecke MAX, BaX ähnlich ſind, und $R^2 : XA.\, XB :: R : Xa$. So läßt dieſer Lehrſatz, mit Hülfe des 11. ſich ferner beweiſen, wenn der Halbkreis in 8, 16, 32, 64, und überhaupt in 2^r gleiche Theile getheilt iſt.

2. Der Halbkreis XbZ (959 Fig.) ſey in eine ungerade Zahl (2m + 1) getheilt, und die Sehnen Xa, Xb, Xc ſeyen eben ſo gezogen wie in 9. Man theile nachdem den Halbkreis XDZ in 2m + 1 gleiche Theile, und ziehe die Sehnen XA, XB, XC, XD, XE, XF, XG wie (12). Von dieſen iſt eine (XD) ſo groß als die Seite des Quadrats, (welche Q heiſſen mag) weil Bogen Xa = 2. XA, ab = 2. AB, bc = 2. BC. cz = 2. CD und Xbz = 2. XD. Im Quadranten XD ziehe man die Halbmeſſer MA, MB, MC, und von den Punkten E, F, G im Quadranten DZ, ziehe man Ec, Fb, Ga, ſo beweiſet ſich wie in 12., daß die Dreyecke MAX, MBX, MCX, den Dreyecken GaX, FbX, EcX ähnlich ſind, und daß

$R^2 : XA.\, XG :: R : Xa$

$R^2 : XB.\, XF :: R : Xb$

$R^2 : XC.\, XC :: R : Xc.$

Hieraus folgt:

R^{2m}: XB. XC. XE. XF. XG : : R^m : Xa. Xb. Xc. Aber

R^m = Xa. Xb. Xc. (11), alſo

R^{2m} = XA. XB. XC. XE. XF. XG. Und da XD = Q ſo iſt

R^{2m+1}: XA. XB. XC. XD. XE. XF. XG : : R : Q.

Dem 12. gemäß läßt ſich dieſer Lehrſatz ferner auf die Fälle anwenden, da der Halbkreis in 4. (2m + 1); 8. (2m + 1), 16. (2m + 1), und überdem in 2^r. (2m + 1) gleiche Theile getheilt iſt. Nun iſt jede gerade Zahl eine Potenz der 2, oder ein Produkt aus einer ſolchen Potenz in eine ungerade Zahl. Folglich gilt dieſer Satz von allen geraden Zahlen.

Zuſatz. Auch iſt ſin $\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{4}$, ſin $\frac{1}{8}\pi$. ſin $\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2}}{4}$, ſin $\frac{1}{12}\pi$. ſin $\frac{3}{12}\pi$. ſin $\frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{3}}{4}$, ſin $\frac{1}{16}\pi$. ſin $\frac{3}{16}\pi$. ſin $\frac{5}{16}\pi$. ſin $\frac{7}{16}\pi = \frac{\sqrt{2}}{16}$, und allgemein ſin $\frac{\pi}{m4}$. ſin $\frac{3\pi}{4m}$. ſin $\frac{5\pi}{4m}$. . ſin $\frac{2m-1}{4m}\pi = (\frac{1}{2})^m \sqrt{2}$.

Neue Abh. der ſchwediſchen Ak. X. B. 244.

Ellipſe die Axe derſelben zu finden, um ſie beſchreiben zu können, wenn 2 conjugirte Diameter nebſt dem Winkel, den ſie bilden, gegeben ſind, ſiehe Kegelſchnitte Durchſchnitte (13).

Ellipſe Bogen; ſiehe elliptiſche Bogen.

Ellipſe Brennpunkte; ſiehe: krumme Linien der zweyten Ordnung (59).

Ellipſe Diameter derſelben, ſ. Kegelſchnitte Durchmeſſer 13. 2te Aufg.

Ellipſe Dreyeck in derſelben; ſiehe Dreyeck zu verzeichnen; mit analytiſchen... (31) Fig. 1319.

Ellipſe Durchmeſſer derſelben, ſiehe krumme Linien der 2ten Ordnung (60).

Ellipſe Eccentricität derſelben, ſo heißt die Entfernung der beyden Brennpunkte von einander. Sie wird von der kleinen Axe in zwey gleiche Theile getheilt; weil ſie die große Axe iſt, weniger der beyderſeitiger Fokallänge.

Wenn die halbe Eccentricität von der erſten halben großen Axe abgezogen wird, ſo überkommt man auch den erſten Brennpunkt: wird ſelbige hingegen zu der erſten halben Axe addirt, ſo wird der zweyte gefunden. Dieß geſchiehet aber in dem Ausdrucke $\frac{1}{2}a \pm \sqrt{a(a-p)}$. Folglich iſt $\sqrt{a(a-p)}$ die ganze Eccentricität der Ellipſe.

Zuſatz. Dieſe Eccentricität läßt ſich aus jeder Gleichung unmittelbar finden, in welcher die Abſciſſen vom Mittelpunkte genommen ſind; weil ſie zur Parameterordinate als Abſciſſe gehört. Denn es ſey

$$y^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{pv^2}{a}$$

Weil nun $y = \frac{1}{2}p$

und $y^2 = \frac{1}{4}p^2$

Folg-

Folglich $\frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{pv^2}{a}$

$: p \quad \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}$

Verſ. $\frac{v^2}{a} = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}(a - p)$

$\times a \quad v^2 = \frac{1}{4}(a^2 - ap) = \frac{1}{4}(a - p)$

$\sqrt{} \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{a(a - p)}$.

Zuſatz. Wünſchte man lieber, die halbe oder ganze Eccentricität in Axenwerthen zu haben, ſo darf nur ſtatt p deſſen Aequivalent $\frac{c^2}{a}$ ſubſtituiret werden. Es iſt daher nach der Subſtitution $v = \frac{1}{2}\sqrt{a\left(a - \frac{c^2}{a}\right)}$ und $v = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$, und die ganze Eccentricität $= \sqrt{a^2 - c^2}$. Ein Ausdruck der noch ſimpler als der obige ausfällt, und ſich deutlicher durch Worte vortragen läßt. Es iſt nämlich die ganze Eccentricität die Wurzel aus der Differenz der beyden Axenquadrate.

Zuſatz. Der nämliche Ausdruck entwickelt ſich auch unmittelbar ſogleich aus der 5ten Ellipſengleichung, wenn ſtatt y der halbe Aequivalent aus den Axen $\frac{c^2}{2a}$ zu ſtehen kömmt.

Es iſt dieſemnach $\frac{p}{c} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - c^2 v^2}$

oder $\frac{c^2}{2a} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2v^2}{a^2}}$

quad. $\frac{c^4}{4a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2v^2}{a^2}$

$: c^2 \quad \frac{c^2}{4a^2} = \frac{1}{4} - \frac{v^2}{a^2}$

$\times a^2 \quad \frac{c^2}{4} = \frac{1}{4}a^2 - v^2$

Verſ. $v^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}(a^2 - c^2)$

$\sqrt{} \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$.

Ellipſe Entſtehung derſelben, ſiehe Kegelſchnitt und Cylinderſchnitt.

Ellipſe Gleichung für dieſelbe zu finden.

I. Wenn die Abſciſſen auf der kleinen Axe genommen werden Fig. 944.

Es ſey AG = a, GH = b GR = x, RS = y

ſo iſt $y^2 = \frac{b}{a^2}(a^2 - x^2)$

$y^2 a^2 = b^2(a^2 - x^2)$

$y^2 a^2 = a^2b^2 - x^2b^2$

$b^2 x^2 = a^2b^2 - a^2y^2$

$b^2 x^2 = a^2(b^2 - y^2)$

$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$

oder

oder $GR^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - RS^2)$

oder $TS^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - GT^2)$

Es ſey nun $TS = y'$ und $GT = x'$ ſo iſt

$$y'y' = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x'x')$$

oder $y'y' = \frac{a^2}{b^2}(b + x')(b - x')$.

Man ſuche eine dritte Proportionallinie p, zu b und a, ſo iſt $a^2 = bp$ und

$$y'y' = \frac{bp}{b^2}(b + x')(b - x')$$

$$y'y' = \frac{p}{b}(b^2 - x'x')$$

Dieſe dritte Proportionallinie kann man der Einförmigkeit halben, den Parameter der kleinen Axe nennen, obgleich in der kleinen Axe keine Brennpunkte ſind.

Anders. Geſetzt, man wolle die Abſciſſen vom Ende H, der kleinen Axe anrechnen, ſo daß $HT = x''$. Vorher war $TG = x'$. Es iſt aber $TG = GH - TH$ oder $x' = b - x''$, daher iſt $x'x' = b^2 - 2bx'' + x''x''$; ſetzet man dieſen Werth in die Gleichung

$y'y' = \frac{p}{b}(b^2 - x'x')$, ſo wird

$$y'y' = \frac{p}{b}(2bx'' - x''x'')$$

wo p der halbe Parameter der kleinen Axe, und b die halbe kleine Axe iſt. Will man den ganzen Parameter durch n' und die ganze kleine Axe durch g' andeuten, ſo wird

$$y'y' = \frac{n'}{g'}(g'x'' - x''x'')$$

$$y'y' = \frac{n'}{g'}x''(g' - x'')$$

II. Gleichungen, ſo am gewöhnlichſten ſind. Dieſes ſind die beyden

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

wenn die halben Axen a und b ſind. (M. ſ. die 1ſte Gleichung im Artikel. Ellipſe Gleichung wenn die große und kleine Axe bekannt).

Wenn hingegen die ganze Hauptaxe g, und der ganze Parameter n iſt, die Abſciſſen aber aus einem Scheitel gerechnet werden

$$gy^2 = ngx = nx$$

M. ſ. Gleichung, wenn die große Axe und der Parameter gegeben N. 2. Bezeichnet man nun die ganze Hauptaxe mit a, die ganze 2te Axe mit b, und den ganzen Parameter mit p, ſo muß in der erſten Gleichung $\frac{1}{2}$ a anſtatt

a, und ½ b ſtatt b, in der zweyten aber a anſtatt g und p anſtatt n geſetzt werden; ſo wird

$$\text{I. } y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)$$

$$\text{II. } ay^2 = apx - px^2$$

die nemlichen Gleichungen können auch für die kleine Axe dienen, wenn man unter a die kleine Axe, unter b die große und unter p den Parameter der kleinen Axe verſtehet.

III. Gleichung für dieſelbe, wenn die halbe Hauptaxe, und die Eccentricität als bekannt angenommen werden. Fig 945.

Geſetzt, es werden als bekannt angenommen, die halbe große Axe Gc = GA = a und die Eccentricität GF = GE = e, und die Abſciſſen werden vom Mittelpunkte G angerechnet. Es ſey demnach GR = x, RS = y. Man ziehe die Vectoren SE, SF. Es ſey SF = q, ſo iſt SE = 2a — q, weil SF + SE = CF + CE = AE + CE = AC = 2Gc = 2a. Nun iſt wegen des rechtwinklichten Dreyecks $SE^2 = SR^2 + ER^2$

$$SF^2 = SR^2 + RF^2$$

$$= (2a - q)^2 = y^2 + (e + x)^2$$

$$q^2 = y^2 + (e - x)^2.$$

Die erſte Gleichung giebt

$$4a^2 - 4aq + q^2 = y^2 + (e + x)^2$$

abgezogen $q^2 = y^2 + (e - x)^2$

bleibt $4a^2 - 4aq = (e + x)^2 - (e - x)^2$

$$4a^2 - 4aq = e^2 + 2ex + x^2 - e^2 + 2ex - x^2$$

$$4a^2 - 4aq = 4ex$$

$$a^2 - aq = ex$$

$$a^2 - ex = aq$$

$$a - \frac{ex}{a} = q$$

$$a^2 - 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2} = q^2;$$

ſetzet man dieſen Werth von q^2 in die Gleichung

$q^2 = y^2 + (e - x)^2$ alſo

$$a^2 - 2ex + \frac{e\,x^2}{a^2} = y^2 + e^2 - 2ex + x^2$$

$$a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} = y^2 + e^2 + x^2$$

$$a^2 - e^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 = y^2$$

$$a^2 - e^2 + \frac{e^2}{a^2}x^2 - x^2 = y^2$$

$$a^2 - e^2 + (\frac{e^2}{a^2} - 1) x^2 = y^2$$

$$a^2 - e^2 + (\frac{e^2 - a^2}{a^2}) x^2 = y^2.$$

Alſo auch

$$a^2 - e^2 - (\frac{a^2 - e^2}{a^2}) x^2 = y^2$$

$$a^2 (a^2 - e^2) - (a^2 - e^2) x^2 = a^2 y^2$$

$$(a^4 - a^2 e^2) - (a^2 x^2 - e^2 x^2) = a^2 y^2$$

$$a^4 - a^2 e^2 - a^2 x^2 + e^2 x^2 = a^2 y^2$$

$$(a^2 - x^2).(a^2 - e^2) = a^2 y^2$$

$$\frac{(a^2 - x^2).(a^2 - e^2)}{a^2} = y .$$

Das heißt: das Quadrat der Applicate iſt gleich der Differenz der Quadrate der halben Axe und der Abſciſſe, multiplicirt mit der Differenz der Quadrate der halben Axe und der Eccentricität, dividirt durch das Quadrat der halben Hauptaxe.

Oder, das Quadrat der Applicate iſt die 4te Proportional-Größe, zum Quadrate der halben Hauptaxe, zur Differenz der Quadrate der halben Axe und der Abſciſſe und zur Differenz der Quadrate der halben Axe und der Eccentricität.

Oder, anſtatt $a^2 - x^2$ ſchreibe man $(a + x)(a - x)$, und anſtatt $a^2 - e^2$ ſchreibe man $(a + e)(a - e)$ ſo hat man

$$\frac{(a + x)(a - x).(a + e)(a - e)}{a^2} = y^2.$$

Daher $a^2 : (a + e)(a - e) = (a + x)(a - x) : y^2$, das heißt; das Quadrat der halben Axe verhält ſich zum Produkt aus der Summe und der Differenz der halben Axe und der Eccentricität: wie das Produkt aus der Summe und der Differenz der halben Axe und der Abſciſſe, ſich verhält zum Quadrate der Applicate. Es iſt demnach

$GC^2 : (GC + EG)(GC - EG) = (AG + GR)(AG - GR) : (SR)^2$

oder $GC^2 : (EG.\ AE) = (AR.\ RC) : (SR)^2$ das heißt:

das Quadrat der halben Axe verhält ſich zum Rectangel aus beyden Abſiden, wie das Rectangel aus beyden abgeſchnittenen Theilen der Axe, zum Quadrate der Applicate.

Anders. Das letzt gefundene Verhältniß führet uns auf eine andere bequeme Gleichung. Es ſey die ganze Axe $AC = g$, die Apſide $AE = h$, ſo iſt $EC = g - h$. Es ſey $AR = x$, ſo iſt $RC = g - x$. Es ſey endlich $RS = y$, ſo iſt $(\frac{1}{2} g)^2 : h (g - h) = x (g - x) : y^2$

$$\frac{h (g - h).\ x (g - x)}{(\frac{1}{2} g)^2} = y^2.$$

Wenn wir in der letztgefundenen Gleichung annehmen, es werde $x = \frac{1}{2} g$, ſo wird die Applicate zur halben kleinen Axe. Es ſey demnach dieſe halbe kleine Axe = b, ſo bekömmt man

$$b^2 = \frac{h(g-h).\ \frac{1}{2}g(g-\frac{1}{2}g)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

$$b^2 = \frac{h(g-h).\ (\frac{1}{2}g)^2}{\frac{1}{2}g^2}$$

$$b^2 = h(g-h).$$

das heißt: das Quadrat der halben kleinen Axe iſt gleich dem Rectangel aus beyden Abſiden, oder die halbe kleine Axe iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen beyden Apſiden.

Geſetzt, es werde in der nehmlichen Gleichung $x = h$, ſo wird y zum halben Parameter. Dieſer halbe Parameter ſey p, ſo iſt, wenn $x = h$

$$p^2 = \frac{h(g-h).\ (h(g-h)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

das heißt: das Rectangel aus beyden Apſiden iſt die mittlere Proportional-Größe, zwiſchen dem Quadrate der halben großen Axe, und dem Quadrate des halben Parameters. Aus der nehmlichen Gleichung iſt

$$p = \frac{h(g-h)}{\frac{1}{2}g}, \text{ oder}$$

$$p.\ (\tfrac{1}{2}g) = h(g-h)$$

das heißt: das Rectangel aus dem halben Parameter und der halben großen Axe iſt gleich dem Rectangel aus beyden Apſiden.

Ferner iſt die kleine Axe die mittlere Proportionallinie zwiſchen der großen Axe und dem Parameter;

denn es iſt $(\frac{1}{2}g)^2 = (\frac{1}{2}g^2)$

$$b^2 = h(g-h)$$

$$p^2 = \frac{h(g-h).\ h(g-h)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

wo $\frac{1}{2}g$ die halbe große Axe
b die halbe kleine
p der halbe Parameter iſt.

Suchet man zu $(\frac{1}{2}g)^2$ und $h(h-g)$ die 3te Proportionalzahl

ſo iſt ſolche $\frac{h(h-g).\ h(h-g)}{(\frac{1}{2}g)^2}$

das iſt p^2; folglich

$$\tfrac{1}{2}g^2,\quad b^2,\quad p^2$$

$$\tfrac{1}{2}g,\quad b,\quad p$$

IV. Gleichung für dieſelbe, wenn die große und kleine Axe als bekannt angenommen werden.

Aufl. Nimmt man den Mittelpunkt zum Urſprung der Abſciſſen, und die Abſciſſen auf der großen Axe, ſo war in der erſten Auflöſung des vorigen Artickels gefunden worden.

$$y^2 = \frac{(a+x)(a-x).\ (a+e)(a-e)}{a^2}.$$

Es war aber $(a+e)(a-e)$ das Rectangel aus beyden Apſiden. An deſſen Stelle kann aber das Quadrat der halben kleinen Axe geſetzt werden $= b$, ſo

ſo iſt $y^2 = \frac{(a+x)(a-x).\,b^2}{a}$

$$y = \frac{b^2}{a^2}.(a+x)(a-x)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

und dieſes iſt eine bequeme Gleichung, worinnen a und b die Hälften beyder Axen vorſtellen, die Abſciſſen aber vom Mittelpunkte aus auf der großen Axe genommen werden.

Anders. Will man die Abſciſſen vom Scheitel an rechnen, ſo war in der 2ten Auflöſung des vorigen Artikels.

$$y^2 = \frac{h(g-h).\,x(g-x)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

hier iſt nun wiederum

h (g — h) das Rektangel aus den beyden Apſiden, welches alſo dem Quadrate der halben kleinen Axe gleich iſt. Es ſey die kleine Axe k, ſo iſt demnach $y^2 = \frac{(\frac{1}{2}k)^2.x(g-x)}{(\frac{1}{2}g)^2)}$

$$y^2 = \frac{\frac{k^2}{4}.\,x.(g-x)}{\frac{g^2}{4}}$$

$$y^2 = \frac{k^2}{g^2}.x(g-x)$$

$$y = \frac{k^2}{g^2}(gx - x^2).$$

Hier ſind k und g die beyden ganzen Axen.

V. Gleichung zu finden, wenn die große Axe und der Parameter als bekannt angenommen werden.

Auflöſung. Wenn die halben Axen a und b ſind und die Abſciſſen im Mittelpunkte anfangen, ſo war nach vorigen

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a+x)(a-x)$$

der halbe Parameter iſt die dritte Proportionallinie zu a und b, alſo iſt $p = \frac{b^2}{a}$ und $b^2 = ap$. Setzet man ap anſtatt b^2, ſo iſt

$$y^2 = \frac{ap}{a^2}(a+x)(a-x)$$

$$y^2 = \frac{p}{a}(a+x)(a-x)$$

$$y^2 = \frac{p}{a}.(a^2 - x^2)$$

Anders. Wenn die große Axe g, die kleine k iſt, und die Abſciſſen vom Scheitel ausgenommen werden, ſo war

$$y^2 = \frac{k^2}{g^2} x (g - x).$$

Weil g die große und k die kleine iſt, ſo iſt, wenn wir den Parameter = n nennen

$$g : k = k : n$$

$$\frac{k^2}{g} = n \text{ und } k^2 = gn.$$

Daher $y^2 = \frac{gn}{g^2} (g - x) x.$

$$y^2 = \frac{n}{g} . x (g - x)$$

$$y^2 g = n . x (g - x);$$

das heißt; das Rectangel aus den beyden Abſciſſen, verhält ſich zum Quadrate der Applicate wie die große Axe zum Parameter

$$gy^2 = ngx - nx^2$$

VI. Verhältniß der Applicaten zu den abgeſchnittenen Theilen der Axe.

Wenn a die Hauptaxe, der Parameter p.

ſo iſt $ay^2 = apx - px^2$

oder $y^2 = \frac{p}{a} x (a - x).$

Es ſey nun die andere Abſciſſe = X. und die dazu gehörige Applikate = Y, ſo iſt auch

$$Y^2 = \frac{p}{a} . X (a - X),$$

folglich

$$y^2 : Y^2 = \frac{p}{a} x (a - x) : \frac{p}{a} X (a - X)$$

$$y^2 : Y^2 = x (a - x) : X (a - X)$$

es ſind aber x und a — x, desgleichen X und a — X beyde abgeſchnittene Theile der Axe, die durch die Applicaten y und Y beſtimmt werden; deshalb folget:

daß ſich in der Ellipſe die Quadrate der Applicaten, wie die Rectangel aus beyden abgeſchnittenen Theilen der Axe verhalten;

Da nun die Gleichung für die kleine Axe dieſer vollkommen ähnlich iſt, ſo gilt auch dieſes für beyde Axen.

Euler. (Leonh.) de Ellipſi minima dato Parallelogrammo rectangulo circumſcribenda Acta acad. Petrop. 1780. P. II. pag. 3.

Ellipſe Gleichung für dieſelbe aus dem Schnitte eines Cylinders hergeleitet, ſ. Cylinderſchnitte.

Ellipſe Halbmeſſer der Krümmung zu finden. S. (VII. Ex. 2.) Krümmungs-Halbmeſſer.

Ellipſe größte und kleinſte Ordinate für dieſelbe zu finden. S. Ordinate gr. u. kl. Ex. I.

Ellipſe den Parameter eines Diameters der Ellipſe zu finden: Siehe Kegelſchnitte Durchmeſſer (12); auch, krumme Linien der zweyten Ordnung (62).

Ellipſe (Polargleichung der) Geſetzt, (Fig. 1014) es habe ſich der Vector um den Brennpunkt F gedrehet, ſo daß er von der Lage CF in die Lage SF gekommen ſey, und den Winkel ϕ beſchrieben habe. Man ziehe SE nach dem andern Brennpunkte E, und SR ſenkrecht auf die große Axe.

Es ſey die halbe Axe $= a = GC = GA$, die Eccentricität $= e = GF = GE$. Es ſey $GR = x$, ſo iſt $RF = x - e$ und $RE = x + e$. Es ſey $SF = v$, ſo iſt $SE = 2a - v$.

Die rechtwinklichten Dreyecke SRE, SRF geben

$$SE^2 = SR^2 + RE^2$$

und $$SF^2 = SR^2 + RF^2,$$

oder $$(2a - v)^2 = SR^2 + (x + e)^2$$

und $$v^2 = SR^2 + (x - e)^2$$

oder $$4a^2 - 4av + v^2 = (SR)^2 + (x + e)^2$$

und $$v^2 = (SR)^2 + (x - e)^2.$$

Subtrahire die zweyte Gleichung von der erſten, ſo iſt

$$4a^2 - 4av = (x + e)^2 - (x - e)^2$$

$$4a^2 - 4av = x^2 + 2ex + e^2 - x^2 + 2ex - e^2$$

$$4a^2 - 4av = 4ex$$

$$a^2 - av = ex$$

$$a^2 - ex = av$$

$$\frac{a^2 - ex}{a} = v$$

das rechtwinklichte Dreyeck FRS giebt $FS : FR = 1 : \mathrm{Cof}\,\phi$

$$v : FR = 1 : \mathrm{Cof}\,\phi$$

daher $FR = v.\ \mathrm{Cof}\,\phi.$

Nun iſt $GR = GF + FR$

$$x = e + v.\ \mathrm{Cof}\,\phi.$$

Man ſetze dieſen Werth von x in die Gleichung $v = \frac{a^2 - ex}{a}$

ſo kömmt $v = \frac{a^2 .\ e (e + v\ \mathrm{Cof}\,\phi)}{a}$

$$av = a^2 - e^2 - ev\ \mathrm{Cof}\,\phi$$

$$av + ev.\ \mathrm{Cof}\,\phi = a^2 - e^2$$

$$v\,(a + e\ \mathrm{Cof}\,\phi) = a^2 - e^2$$

$$v = \frac{a^2 - e^2}{a + e\ \mathrm{Cof}\,\phi}.$$

Ellipſe, Quadratur derſelben. Es ſey die große Axe $= a$ die kleine $= c$ und v die Abſciſſen vom Mittelpunkte angerechnet.

Aufl. Es werde in einer der Gleichungen für die Ellipſe ein Aequivalent für ydx oder ydv gefunden und integriret, ſo erhält man, wenn v oder x $= \frac{1}{2}$ a geſetzt wird, den 4ten Theil der Ellipſenfläche. Es ſey z. B. (wie in dem Artickel: Ellipſe rectificiren).

$$y^2 = \tfrac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2} = \frac{\frac{1}{4} a^2 c^2 - c^2 v^2}{a^2} = \frac{a^2 c^2 - 4c^2 v^2}{4a^2}$$

y =

$$y = \sqrt{\frac{a^2c^2 - 4c^2v^2}{4a^2}} = \frac{c}{2a}\sqrt{a^2 - 4v^2}$$

$$ydv = \frac{cdv}{a^2}\sqrt{a^2 - 4v^2}$$

Aus $a^2 - 4v^2$ wirklich die Wurzel gezogen

$$\sqrt{a^2 - 4v^2} = (a^2 - 4v^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2.\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a^{2.-\frac{1}{2}} - 4v^2$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}a^{2.-\frac{3}{2}}}{1.\ 2}.\ 16v^4 \ldots$$

$$\text{oder} = a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} \ldots$$

$$\text{Folglich}\ ydv = \frac{cdv}{2a}\left(a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} \ldots\right)$$

$$\text{oder}\ ydv = \frac{cdv}{2} - \frac{cv^2dv}{a^2} - \frac{cv^4dv}{a^4} \ldots$$

$$S.(ydv) = \frac{cv}{2} - \frac{cv^3}{3a^2} - \frac{cv^5}{5a^4} \ldots$$

Das $v = \frac{a}{2}$ geſetzt giebt den Quadranten

$$S\ (ydv) = \frac{ac}{4} - \frac{ac}{24} - \frac{ac}{40} \ldots$$

durch 4 multiplicirt, ſo iſt die Quadratur der Ellipſe

$$= ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{10}.$$

2. Setzt man $a = c = 2$, ſo verwandelt ſich dieſe Reihe, in die des Cirkels $4 - \frac{4}{6} - \frac{4}{10} \ldots = 4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \ldots$ oder iſt $a = c = d$,

$$d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \ldots$$

3. Das nemliche ergiebt ſich, wenn für a und c die geometriſche Mittelgröße $\sqrt{ac}$ oder $a^{\frac{1}{2}}\ c^{\frac{1}{2}}$ in die Reihe aufgenommen wird, und dieſe beſtändige Größe z. B. durch 2r ausgedruckt wird.

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}\ c^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\ c^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\ c^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}\ c^{\frac{1}{2}}}{6}$$

$$- \frac{a^{\frac{1}{2}}\ c^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}\ c^{\frac{1}{2}}}{40}$$

$$\text{oder}\ 4r^2 - \frac{4r^2}{6} - \frac{4r^2}{40} \ldots$$

$$4r^2 - \tfrac{2}{3}r^2 - \tfrac{1}{10}r^2 \ldots$$

Es iſt alſo bewieſen, daß es eins ſey, ob man eine Ellipſe berechnet oder einen Cirkel, der zum Diameter die mittlere Proportionallinie zwiſchen den beyden Axen hat.

Der förmliche Beweis von dieſem Satze ſtehet ſo aus:
Vorausſetzuug. $d = \sqrt{ac}$.
Satz. Circ. = Ellipſ.

$$C = d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \ldots$$

$$E = ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{40} \ldots$$

$$C : E = (d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \ldots) : (ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{40} \ldots)$$

oder $= d^2 (1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} \ldots) : ac (1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} \ldots)$

$$C : E = d^2 : ac$$

aber $d = \sqrt{ac}$
alſo $d^2 = ac$, ſubſtituirt

$$C : E = d^2 : d^2$$
$$d^2 C = D^2 C$$
$$C = E.$$

4. Der Quadratinhalt einer Ellipſe iſt beynahe der vierte Theil des Produkts aus den beyden Axen und der Zahl 3,14...

Satz. Quad. Ellipſ. $= \frac{ac\pi}{4}$.

Beweis. Im Cirkel iſt $q = \frac{d^2\pi}{4}$, aber in der gleichgroßen Ellipſe iſt $d = a^{\frac{1}{2}} . c^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ac}$
und $d^2 = ac$.

Subſt. Quadrat. Ellipſ. $= \frac{ac\pi}{4}$.

5. Aufgabe. Jede Ellipſe durch Zeichnung in einen Cirkel zu verwandeln.
Aufl. Man ſetze in gerader Linie, die halbe kleine Axe an die halbe große, ſchwinge um dieſe beyden Axenhälften einen halben Cirkel, und fälle von der Peripherie auf den Zuſammenſtoßungspunkt einen Perpendikel herab, ſo iſt dies der Radius eines Cirkels, der gleiche Flächengröße mit der Ellipſe hat.

Satz. Fig. 906. $a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} = km$.
Beweis. Es iſt $ab : bd = bd : bc$

$$\frac{a}{2} : \frac{mk}{2} = \frac{mk}{2} : \frac{c}{2}$$
$$a : mk = mk : c$$
$$ac = mk^2$$
$$a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} = mk$$

Irgend ein franzöſiſcher Maler war gewohnt ſeine Freskogemälde nach Quadratfuß zu übernehmen, und ſich für jeden Schuh 4 Liv. zahlen zu laſſen. Nun ſollte er ein großes Plafond malen, das eine wahre elliptiſche Figur hatte von 55 Fuß Länge und 33 Fuß Breite. Er forderte ſeinem Ueberſchlage gemäß 6000 Liv. Es fragt ſich demnach, ob dieſe Forderung billig war?

Aufl. Weil $q = \frac{ac\pi}{4}$, ſo darf nur ſubſtituirt werden:

folglich $q = \frac{55 \cdot 33 \cdot 3,14 \cdot}{4} = \frac{5699,1}{4} = 1424,7$ □ Schuhe dies mit 4 multipl. giebt 5698, 8 Liv: Er hat daher um 301, 2 Liv. zu viel gefordert.

Ellipſe Rectification. Es ſey a die große Axe, c die kleine, v die Abſciſſe vom Mittelpunkte angerechnet;

ſo wird die einfachſte Gleichung für die Ellipſe $= y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2v^2}{a^2}$; dieſe differenziirt giebt

$$2ydy = -\frac{2c^2vdv}{a^2}$$

$$:2ydy = -\frac{c^2vdv}{a^2}$$

$$\text{quad. } y^2dy^2 = \frac{c^4v^2dv^2}{a^4}$$

$$\text{div. durch } y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2v^2}{a^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2c^2 - c^2v^2}{a^2} = \frac{a^2c^2 - 4c^2v^2}{4a^2}$$

$$dy^2 = \frac{c^4v^2dv^2}{a^4} \cdot \frac{4a^2}{a^2c^2 - 4c^2v^2} = \frac{4a^2c^4v^2dv^2}{a^6c^2 - 4a^4c^2v^2}$$

dem Bruch verkleinert durch a^2c^2 giebt $= \frac{4c^2v^2dv^2}{a^4 - 4a^2v^2}$

$$+dv^2 \qquad\qquad +dv^2$$

$$dy^2 + dv^2 = \frac{4c^2v^2dv^2}{a^4 - 4a^2v^2} + dv^2$$

$$= \frac{4c^2v^2dv^2 + a^4dv^2 - 4a^2v^2dv^2}{a^4 - 4a^2v^2}$$

$$\text{oder } = dv^2\left(\frac{4c^2v^2 + a^4 - 4a^2v^2}{a^4 - 4a^2v^2}\right) = \frac{dv^2}{a^2}\left(\frac{4c^2v^2 + a^4 - 4a^2v^2}{a^2 - 4v^2}\right)$$

$$\sqrt{(dy^2 + dv^2} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{4c^2v^2 + a^4 - 4a^2v^2}{a^2 - 4v^2}} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 + 4c^2v^2 - 4a^2v^2}{a^2 - 4v^2}}$$

$$= \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 + (4c^2 - 4a^2)\ v^2}{a^2 - 4v^2}}$$

$$= \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 - 4\ (a^2 - c^2)\ v^2}{a^2 - 4v^2}}$$

Setzet man endlich aus Bequemlichkeit $4(a^2 - c^2) = m$, ſo erſcheinet $\sqrt{(dy^2 + dv^2)} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 - mv^2}{a^2 - 4v^2}}$. Nun noch aus dem Zähler und Nenner die Wurzel nach dem Binomiallehrſatze gezogen, ſo erhält man erſtens

a^4

$$(a^4 - mv^2)^{\frac{1}{2}} = a^{4.\,\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\, a^{4.\,-\frac{1}{2}} .\, - mv^2 + \frac{\frac{1}{2}.\,-\frac{1}{2}\,a}{1.\ 2}{}^{4.\,-\frac{3}{2}} .$$

$$+ (mv^2)^2 + \frac{\frac{1}{2}.\,-\frac{1}{2}.\,-\frac{3}{2}\,a^{4.\,-\frac{5}{2}}}{1.\ 2.\ 3} .\, - (mv^2)^3$$

abgekürzt $= a^2 - \frac{mv^2}{2a^2} - \frac{m^2v^4}{8a^6} - \frac{m^3v^6}{16a^{10}} \ldots$

Zweytens $(a^2 - 4v^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2.\,\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{2.\,-\frac{1}{2}} .\, 4v^2 \times \frac{\frac{1}{2}.\,-\frac{1}{2}\,a^{2.\,-\frac{3}{2}}}{1.\ 2} .$

$$+ (4v^2)^2 + \frac{2\frac{1}{2}.\,-\frac{1}{2}.\,-\frac{3}{2}}{1.\ 2.\ 3}\, a^{2.\,-\frac{5}{2}} .\, - (4v^2)^3 \ldots$$

abgekürzt $= a - \frac{4v^2}{2a} - \frac{16v^4}{8a^3} - \frac{64v^6}{16a^5} \ldots$

noch mehr $= a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} - \frac{4v^6}{a^5} \ldots$

Weil aber $m = 4a^2 - 4c^2$
und $m^2 = 16a^4 - 32a^2c^2 + 16c^4$
wie auch $m^3 = 64a^6 - 192a^4c^3 + 192a^2c^4 - 64c^6$
ſo kann in der Reihe dafür ſubſtituirt werden.

Folglich $a^2 - \frac{4a^2v^2}{2a^2} + \frac{4c^2v^2}{2a^2} - \frac{16a^4v^4}{8a^6} + \frac{32a^2c^2v^4}{8a^6} - \frac{16c^4v^4}{8a^6}$

$$- \frac{64a^6v^6}{16a^{10}} + \frac{192a^4c^4v^6}{16a^{10}}$$

$$- \frac{192a^2c^4v^6}{16a^{10}} + \frac{64c^6v^6}{16a^{10}} \ldots$$

abgekürzt $a^2 - 2v^2 - \frac{2c^2v^2}{a^2} - \frac{2v^4}{a^2} + \frac{4c^2v^4}{a^4} - \frac{2c^4v^4}{a^6} - \frac{4v^6}{a^4}$

$$+ \frac{12c^2v^6}{a^6} - \frac{12c^2v^6}{a^8} + \frac{4c^6v^6}{a^{10}}$$

Und durch $a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} - \frac{4v^6}{a^5} \ldots$ dividirt, giebt

$$a + \frac{2c^2v^2}{a^3} + \frac{8c^2v^4}{a^5} - \frac{2c^4v^4}{a^7} \ldots$$

Daher $\sqrt{(dv^2 + dy^2)} = \frac{dv}{a}\left(a + \frac{2c\ v^2}{a^3} + \frac{8c^2v^4}{a^5} - \frac{2c^4v^4}{a^7} \ldots\right)$

$$= dv + \frac{2c^2v^2dv}{a^3} + \frac{8c^2v^4dv}{a^6} - \frac{2c^4v^4dv}{a^8} .$$

$$S(\sqrt{dv^2 + dy^2}) = v + \frac{2c^2v^3}{3a^4} + \frac{8c^2v^5}{5a^6} - \frac{2c^4v^5}{5a^8} \ldots$$

$$\text{oder } v + \frac{2c^2v^3}{3a^4} + \left(\frac{8a^2c^2 - 2c^4}{5a^8}\right) v^5 \ldots$$

Setzt man nun $v = \frac{1}{2} a$, ſo iſt der vierte Theil der Ellipſe rectificirt:

$$\frac{1}{2} a + \frac{2c^2 a^3}{24a^4} + \frac{(8a^2c^2 - 2c^4)\, a^5}{5.\ 32\ a^8} \ldots$$

abgekürzt $\frac{1}{2} a + \frac{c^2}{12a} + \frac{8a^2c^2 - 2c^4}{160a^3} \ldots$

das viermal genommen, giebt die ganze rectificirte Ellipſe

$$2a + \frac{c^2}{3a} + \frac{8a^2c^2 - 2c^4}{40\ a^3} \ldots = 2a + \frac{c^2}{3a} + \frac{4a^2c^2 - c^4}{20\ a^3} \ldots$$

2. Wird $a = c = 2$, ſo erhält man die Rectification des Cirkels im Halbmeſſern.

$$4 + \frac{4}{6} + \frac{8.\ 4.\ 4 - 5.\ 16}{10.\ 8}$$

$$4 + \frac{2}{3} + \frac{2}{10} \ldots$$

3. Indes fällt bey Beſtimmung der Länge einer Ellipſenlinie die Sache doch allemal anders aus, wenn ein Cirkel, welcher zum Diameter die geometriſche Mittelgröße beyder ihrer Axen hat; und wenn die Ellipſe ſelbſt berechnet wird: obwohl es in Rückſicht der Quadratur und Kubatur, immerhin wahr bleibt, daß die beyden Rechnungen am Ende auf eins hinaus laufen, denn bildet man ſich eine Ellipſe ein, deren kleine Axe unendlich klein iſt, wie der Fall doch ſehr wohl Möglichkeit zuläßt, ſo iſt klar, daß die Länge einer ſolchen Ellipſenlinie der doppelten großen Axe ungemein nahe kommen muß, und dies erhält man auch nus der Reihe. Es ſey nämlich $c = \frac{1}{\infty}$ ſo ergiebt ſich

$$2a + \frac{\frac{1}{\infty^2 2}}{3a} + \frac{4a^2 \frac{1}{\infty^4 2} - \frac{1}{\infty 4}}{20\ a^3}$$

.... wo alle übrigen Glieder bis auf 2a verſchwinden; welches aber, wenn $a = a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$ gedacht wird, beym Cirkel niemals wahr ſeyn kann; weil ſchon nothwendig das erſte Glied unendlich klein ſeyn muß, ohne erſt von den übrigen Gliedern zu reden.

4. Aufgabe. Irgendwo mußte eine Rennbahn, weil es die Lage des Platzes nicht anders verſtattete, elliptiſch ausgeſteckt werden. Die größte Länge des in der Mitte eingehängten Raums betrug 472 Schritte, und die Breite deſſelben 280 Schritte. Wie viel dergleichen Schritte mag beyläufig, die Rennbahn im Umfange haben?

Aufl. Dieſe angegebene Länge und Breite ſtellen nichts anders als Axen der elliptiſchen Rennbahn vor; daher iſt in dieſem beſondern Falle die Reihe

$$= 2.\ 472 + \frac{280^2}{3.\ 470} + \frac{4.\ 472^2 .\ 280^2 - 280}{20.\ 472^3}$$

$$= 944 + \frac{78400}{1416} + \frac{69865062400 - 6146560000}{2103081960}$$

$$= 944 + 55 + 30 + 5 \ldots = 1034 \text{ Schritte ungefähr.}$$

Prändels höhere Mathemat. S. 119.

Ellipſe ihre Subnormallinie zu berechnen, wenn die Abſciſſe gegeben; ſiehe Subnormallinie in jedem Kegelſchnitte zu berechnen.

Ellipſe Subtangente derſelben; ſiehe Subtangente für jeden Punkt eines Kegelſchnitts zu finden. Auch krumme Linie Eigenſchaften (5) 2tes Exemp.

Ellipſe, Tangente zu einem gegebenen Punkte derſelben zu ziehen. Siehe Tangente zu einem gegebenen Punkte eines Kegelſchnitts zu ziehen, auch Tangente für jeden Punkte einer Polarlinie zu ziehen 4tes Exempel.

Ellipſe Vergleichung mit dem Cirkel und Methode mit Hülfe eines Cirkels eine Ellipſe zu ziehen. Fig. 946.

Wenn in einer Ellipſe die halbe große Axe a und die halbe kleine b, ſo iſt die Gleichung entweder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

oder $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$

nachdem die Abſciſſen X auf der großen oder kleinen Axe vom Mittelpunkte aus genommen werden.

Wenn man nun, mit der halben großen Axe über eine Ellipſe einen Cirkel ziehet, ſo wäre die Gleichung vom Mittelpunkte aus für den Cirkel

$$y^2 = a^2 - x^2$$

für die Ellipſe $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x)$

deshalb y^2 des Cirkels: y^2 der Ellipſe $= (a^2 - x^2) : \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

$$= 1 : \frac{b^2}{a^2}$$

$$= a^2 : b^2$$

$$= a : b.$$

Alſo y im Cirkel zu y in der Ellipſe wie a : b.

Beziehet ſich die Gleichung der Ellipſe auf die kleine Axe b, ſo iſt im Cirkel der b zum Halbmeſſer hat

$$y^2 = b^2 - x^2$$

in der Ellipſe die b zur halben kleinen Axe hat

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2);$$

folglich verhält ſich y^2 im Cirkel zu y^2 in der Ellipſe

wie $b^2 - x^2 : \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$

$$= 1 : \frac{a^2}{b^2}$$

$$= b^2 : a^2$$

$$= b : a$$

 folg-

folglich iſt y des Cirkels : y Ellip. = b : a.

Dieſes giebt uns ein bequemes Mittel an die Hand, um eine Ellipſe zu beſchreiben. Fig. 946.

Man beſchreibet über der großen AB einen halben Cirkel ADB, ziehet einige Applikaten ſenkrecht über den Diameter AB, verkürzt ſie alle nach dem Verhältniſſe der halben großen Axe CB zur halben kleinen Axe, ſo bekommt man die Punkte, wodurch die Ellipſe gehen ſoll.

Oder. Fig. 947, man beſchreibe über der kleinen Axe EF einen halben Cirkel EGF, ziehe einige Applikaten, und verlängere ſie alle nach dem Verhältniſſe der halben kleinen Axe CE zur halben großen CB, ſo bekommt man wieder Punkte, welche den Lauf der Ellipſe beſtimmen.

M. ſ. Ellipſe zu quadriren.

Ellipſe vermiſchte Sätze (aus Bramers Apollonius Cattus.)

1. Im rechten Kegel iſt in der Section der Ellipſe, die kleine Axe, die mittlere Proportionale, zwiſchen dem lateri primario und der baſi oder der untergezogenen Linie darauf die Section ein Ende hat, wie auch zwiſchen der großen Axe und dem lateri recto.

Der Kegel ſey ABC Fig. 1324 die Section der Ellipſe DA, latus primarium ED, latus transverſum AC, und FC die halbe kleine Axe, ſo ſage ich, daß die kleinere Axe die mittlere Proportionale ſey, zwiſchen DE und AC; denn es verhält ſich das Rektangel AD in AD zum Rektangel DE in AC, wie das Rektangel von der Hälfte, als AF in FD zum Rektangel HF in FL. Nun iſt HE halb DE und FI halb AC. Daher das Rektangel HFI ein Viertheil vom Rektangel DE in AC, und alſo deren Quadrat FG halb ſo lang, als das Quadrat ſo gleich dem Rectangel DE in AC, nemlich als CL. Dahero denn auch FC halb ſo lang iſt, als die kleine Axe, und doppelt gleich der mittlern Proportionale CL wie erforderlich.

Nun iſt CL ſo gleich der kleinen Axe, auch die mittlere Proportionale, zwiſchen der großen Axe AD und dem lateri recto DZ. Denn weil ſich verhält das Quadrat DA zu dem Quadrate CL (d. i. AF in FD zum Quadrate CG) wie AD zu DZ, oder umgekehrt wie AD zu DZ, alſo das Quadrat AD zu einem andern ſo allhier CL, ſo iſt ſolch Quadrat auch mittlere Proportionale zwiſchen AD und DZ. Zuletzt, weil die kleine Axe, mittlere Proportionale beydes zwiſchen der großen Axe und lateri recto und zwiſchen dem lateri primario und der Baſis, ſo folgt, daß ſich verhält

$$DA : AC = ED : DZ$$

Denn das Rektangel AC $\times$ DE = DA $\times$ DZ. Nun iſt AC $\times$ DE gleich dem Quadrate der kleinen Axe = FGq doppelt als CL, und AD ebenfalls gleich dieſem Quadrate; derowegen iſt auch das Verhältniß gehörig erwieſen. Wenn man alſo das latus rectum geſchwind haben will, ſo mache man ED DM und ziehe MN der ED parallel, ſo iſt MN das begehrte Latus rectum, ſo = DZ.

2. Wenn zur Axe oder lateri transverſo einer Ellipſe eine Linie geſucht, und von beyden ein Rektangel gemacht wird, welches, weniger dem Quadrate ſeiner Breite, gleich iſt dem vierten Theile der Figur, ſo iſt ſolche Linie oder die Seite des Quadrats gleich der Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel. Fig. 1325.

Die Ellipſe ſey BHQDN deren große Axe BD, kleine Axe NO. Nun iſt in (1) erwieſen, daß das Quadrat der kleinen Axe NO mittlere Proportionale, und

und alſo gleich iſt, dem Rektangel von der großen Axe BD und lateri recto BE = HQ; derowegen iſt das Quadrat der halben kleinen Axe = dem vierten Theile der Figur. Weil nun ein Rektangel der großen Axe und einer andern Linie gemacht werden ſoll, ſo, weniger dem Quadrate ſeiner Breite, gleich dem Quadrate FQ, ſo nimmt man die halbe große Axe BK und ſetzt ſolche von N in die große Axe, fällt ins F und zurück ins C, ſo ſind F und C die Brennpunkte, denn aus F ziehe man den Halbkreis LNP und mache KL = KM, ſo iſt das Rektangel PKM oder PKL, gleich der Axt BD und KL = BF, derowegen iſt BF die geſuchte Linie. Wenn nun aus PL und KL oder LI ein Rektangel gemacht wird, ſo iſt ſolches, weniger dem Quadrate KL, nemlich dem Rektangel PKM, dasjenige ſo geſucht worden, und gleich dem Quadrate KN.

Dieſes kann man auch aus einem Cylinder finden.

Wenn im Cylinder der Schnitt einer Ellipſe geſchehe, und alſo beyde Axen bekannt ſind, und dann die halbe große Axe mit einem Cirkel gefaßt, und unverrückt mit einem Fuße deſſelben, auf den äuſſerſten Punkt der kleinen Axe, mit dem andern Fuße aber zween Punkte auf die große Axe zu beyden Seiten gezeichnet werden, ſo ſind dieſe Punkte die Brennpunkte der Ellipſe.

Der Cylinder ſey KMNL Fig. 1326 und in demſelben der Schnitt der Ellipſe IH, ſo iſt HI die große und IC oder DC die kleine Axe dieſer Ellipſe. Ziehe um IO und PH auf die Seiten des Cylinders KM, LN winkelrecht, alſo auch durch die Mitte IH der kleinen Axe DC, ſo werden, wenn DG und DF gezogen, dieſelben IE und EH, und alſo beyde zuſammen, der großen Axe HI gleich ſeyn, daher denn G und F die beyden begehrten Brennpunkte ſeyn.

3. Wenn die Ellipſe aus einem Cylinder geſchnitten, und die großen Axe der Ellipſe und der circulariſche Diameter der Weite des Cylinders, proportionaliter zertheilt werden, ſo ſind die Semiordinaten aus dieſen Punkten, beydes in der Ellipſe und dem Cirkel, an die Peripherie gezogen, einander gleich.

Der Cylinder ſey ABCD Fig. 1327, deſſen Weite iſt der Kreis AB, und EF der Schnitt der Ellipſe, wenn nun AB und EF durch die Punkte GHI, SVW, proportionaliter getheilet werden, ſo ſind die Semiordinaten in der Ellipſe SN, VO, WP gleich denen im Cirkel GK, HL, IM. Denn, weil die Seiten des Cylinders parallel, ſo ſind auch die Durchmeſſer AB, TQ, und alle andere der zwiſchen gezogene Cirkel einanderi gleich. Nun iſt AB und EF proportionaliter getheilt, und die Durchmeſſer der Cirkel, ſo dazwiſchen gezogen, einander parallel, daher iſt AG = QS, AI = XW u. ſ. w. Es folgt alſo, daß GK = SN, HN = VO und IM = WP, wie zu beweiſen war.

4. Eine jede gegebene Ellipſe kann zugleich aus einem Cono rectangulo, acutangulo, obtuſangulo, ſcaleno, und Cylindro ſecirt werden, und iſt die Veränderung ſo vielfältig, ſo oft die kleine Axe, media proportionalis zwiſchen dem lateri primario und der untergezogenen Linie oder Baſis, darinnen ſich die Section endiget, ſeyn kann, bis ſo lange das latus primarium, dem lateri transverſo gleich iſt, alsdann iſt die Section aus einem Cylinder.

Weil die kleine Axe einer Ellipſe jederzeit (1) media proportionalis zwiſchen der Baſis am Ende der Section und lateri primario eines Kegels, daraus ſolche ſecirt wird, ſo iſt unnöthig weitläuftig zu beweiſen, wie oft und unendlichemahl, eine Linie, als die kleine Axe, zwiſchen zwey ändern Linien, deren die größte Baſis, die kleinſte aber das latus primarium eines Coni ſeyn kann. Wenn aber die Baſis AB gleich dem lateri primario CD und alſo auch der kleinern Axe EF gleich, ſo iſt ſolche Section aus einem Cylinder, als hier

aus

aus ABCD Fig. 1328, zu welchem dann die Proportionen gleich wie im Kegel, nur daß im Cylinder gleichförmige Dreyecke CDA, BAD in der Proportion zuſammen geſetzt ſind. Denn es verhält ſich das Quadrat AD: Quad. DC oder AB wie Rektang. AFD: Rekt. EFG.

5. Wann in der Ellipſe aus beyden Brennpunkten zwey Linien in einen Punkt der Peripherie gezogen werden, ſo ſind beyde Linien zuſammen der groſſen Axe gleich.

Die Ellipſe ſey MHLD Fig. 1329, deren große Axe ML die kleine CD und die zwey Brennpunkte A und B ſind. Wenn nun aus denſelben zwey Linien in einen Punkt der Peripherie als AH, BH gezogen werden, ſo ſind beyde zuſammen, gleich der großen Axe LM.

Denn, nach (3), wenn aus einem Brennpunkte eine Linie AK oder BX gezogen wird, ſo daß AK = AM, und dann AM in etliche Theile getheilet wird, und aus jedem Punkte Semiordinaten gezogen werden, deshalb auch FK in ſo viele Theile getheilet wird, wie AM getheilet worden, ſo iſt AS = AT, AR = AC, AI = AH und AK = AM. Weil nun die Ellipſe gleichförmig, ſo iſt auch, wenn die Linie BX eben ſo getheilet wird, wie AK getheilet worden, BN = BH, und derowegen PN = IK oder NX = IO; daher iſt auch PX oder OK = der Entfernung AB, auch iſt OI = YH, PN = ZH und alſo OI und PN oder deren gleiche YH und ZH zuſammen ebenfalls der AB gleich; nun iſt AY = AI und BZ = BM, dahero iſt auch AH und BH = LM, welches zu beweiſen war.

6. Wenn ein oder etliche Punkte in der Peripherie einer Ellipſe gegeben, in der verlängerten großen Axe einen Punkt zu finden, aus welchem eine Tangente gezogen, ſo die Peripherie in dem gegebenen Punkte berührt.

Die Ellipſe ſey ABC Fig. 1330, deren große Axe AB werde bis in O verlängert. In der Peripherie derſelben nehme man ein oder zwey Punkte als hier F und M, und ſollen die Punkte L und O geſucht werden, aus welchen man Linien an die Peripherie ziehet, die die Punkte F und M berühren werden; ſolches geſchiehet alſo: weil ſich verhält AE zu EB wie AL zu BL, ſo ziehe man die Semiordinaten FE und MN und derſelben die BQ parallel, machet auch ferner ein rechtwinklichtes Dreyeck von gleichen Seiten BHI, alſo daß BH und HI einander gleich ſind, und ziehe BI. Wenn nun EB und BC einander gleich gemacht, und eine Linie durch G bis in die Linie BI ſo wie AX gezogen, und der Perpendikel XL gefället, ſo iſt L der Punkt aus welchem die Tangente zu ziehen, die die Peripherie in F berühret. Eben ſo, wenn NB und BQ einander gleich gemacht, und aus A eine Linie durch Q bis in den Punkt P gezogen, und der Perpendikel PO gefället wird, ſo iſt O der Punkt, aus welchem eine Linie gezogen, ſo dem Punkt M in dem Umfange allein berührt. Dieſes iſt es W. Z. E. W.

7. Wann in einer Ellipſe beyde Axen gezeichnet, und alsdann eine Linie aus einem Punkte in der Peripherie, durch die große Axe bis an die kleine alſo gezogen wird, daß die Weite aus dieſem Punkte bis in die Zerſchneidung in der kleinen Axe gleich iſt der halben großen, ſo iſt alsdann das Stück, ſo von der großen Axe abgeſchnitten wird gleich der halben kleinen Axe.

Da die Ellipſe und der Kreis eine zuſammenhängende Proportion haben, ſo ziehe man um die große Axe der Ellipſe AC Fig. 1331 den Halbkreis AKC, und in denſelbigen die Linie DF nach Gefallen, der kleinen Axe GB parallel, alsdann auch aus D eine Linie in G und aus E derſelben eine Parallele EH, ſo iſt

iſt EI = der kleinen halben Axe BG und EH = der halben großen Axe AG: welches alſo erwieſen wird. Es ſey GA = GK = GD, und weil EH der DG parallel und zwiſchen den Parallelen DG, GH liegt, ſo folget, daß ſie auch einander gleich ſind, und daher iſt auch DE = GH. Weil nun das Rektangel AGC = dem Quadrate GK, und weil das Rektangel AFC zum Rektangel AGC das Verhältniß, wie das Quadrat FE zum Quadrate GB hat, ſo verhält ſich FE: GB = ED: BK, und alſo FD zur großen Axe DG oder KG, wie die verkürzte FE zur kleinen Axe EI oder BG, und iſt alſo HI = KB, ſo dasjenige W. Z. E. W.

8. Wenn über der Peripherie oder Oberfläche einer Kugel von einem Pole zum andern, eine Linie über die Oberfläche gezogen, und von derſelben Perpendikularlinien, auf die Grundfläche der Halbkugel gefällt werden, ſo ſind die Punkte in der Baſis, Punkte in der Peripherie einer Ellipſe.

Es ſey der Kreis ABCD, Fig. 1332, die Grundfläche einer Halbkugel, und man bildet ſich ein, es ſeyen über den Diameter AB zu rechten Winkeln, die Kreiſe LRM, IQK, GOH, ENF, geriſſen, und ſtehen ganz aufrecht über ſich, alſo, daß R perpendikulär über X, Q über W, O über T und N über S ſtehet; ſo ſind alsdenn BRQONA die geriſſene und gegebene Linie, ſo auf der äußerſten Oberfläche der Kugel von A nach B, in der Höhe dieſer Bogen gezogen. Wenn nun von allen dieſen Punkten dieſer Linie, Perpendikularen gefället werden, als RX, QW, OT, NS, ſo ſind die Punkte BXWVTS in der Peripherie einer Ellipſe, deren große Axe = dem Durchmeſſer der Kugel, der kürzere Halbmeſſer aber der Linie PV; denn die Winkel YRX, ZQW, COT u. ſ. w. ſind einander gleich, weil die Linien YR, ZQ parallel ſind, dahero RY zu YX wie QZ zu ZW u. ſ. w.

Weil nun RY = YM, QZ = ZK, ſo verhält ſich MY zu MZ wie KZ zu KW etc. Und weil das Rektangel AYB = dem Quadrate YM und das Rektangel AZB = dem Quadrate ZK. ſo verhält ſich auch das Rektangel AYB zum Quadrate YX, wie das Rektangel AZB zum Quadrate ZW, und alſo auch mit den übrigen, dahero ſind die Punkte XWVTS in der Peripherie einer Ellipſe W. Z. E. W.

9. Wann die zwey Axen einer Ellipſe gegeben, einen Conum, er ſey rectus, rectangulus oder ſcalenus, zu finden, aus welchem dieſe Ellipſe kann geſchnitten werden.

Die große Axe ſey EN Fig. 1333 und die kleine EH, man ziehe eine gerade Linie GH. Auf dieſelbe ſetzt man nach Gefallen, als hier ins E, die kleine Axe EH rechtwinklicht. Hernach nimmt man ebenfalls willkürlich einen Halbmeſſer an, hier GS, und ziehet aus S den Halbkreis GHF, ſo iſt in (1) erwieſen, wenn in einen Kegel eine Ellipſe geſchnitten, daß die kleine Axe die mittlere Proportionale zwiſchen dem lateri primario und der Baſis, wo ſich der Schnitt endet, ſey. Man nehme die große Axe EN mit einem Cirkel, und reiße darinnen aus E den Cirkelbogen NK nach Willkühr. Ferner aus der Mitte EF, als aus P ziehe man die ſenkrechte PR, denn wenn es ein Conus rectus ſeyn ſoll, muß ſie perpendikular, ſoll es aber ein ſcalenus ſeyn, etwas zur Seiten nach Belieben gezeichnet werden. Ferner halbire man EG in L und ſetze EL oder LG aus P, in M und S, und ziehe aus M mit PR eine Parallele; ſolche wird den vorhin gezogenen Bogen NK in N ſchneiden. Nun ziehe man aus N eine Linie NQ der Baſis EF parallel und mache NO = OQ, ſo iſt NQ das latus primarium und = GE; wenn alſo aus F eine Linie durch N, und aus E eine

Linie durch Q gezogen wird, ſo geſchiehet in R ein Schnitt, und ERF iſt ein Kegel nach Erfordern. Hieraus ſiehet man, daß ſo oft der Halbmeſſer GS größer oder kleiner genommen wird, ſo oft erhält man auch andere Kegel, woraus die gegebene Ellipſe kann geſchnitten werden.

10. Wenn in einem Triangulo obtuſangulo aus dem ſtumpfen Winkel, eine Perpendikularlinie auf die längſte Seite, ſo gegen ihm überſtehet, gezogen wird, ſo iſt ſolche längſte Linie die große Axe und die Perpendikularlinie eine Semiordinate einer Ellipſe.

Der Triangulus obtuſangulus ſey ABC, Fig. 1334, ſo iſt BC die große Axe und AD eine Semiordinate einer Ellipſe, denn wenn man aus E, als der Hälfte von BC, einen Halbkreis BLC ziehet und DA ins F verlängert, ſo iſt DF eine Semiordinate eines Cirkels. Man ziehe FE und dieſer aus A die AG parallel, ſo iſt (7) AK die kleine Axe, dieſer mache man EH gleich, ſo ſind alsdann beyde Axen bekannt W. Z. E. W.

Wenn aber im Dreyecke die beyden Linien AB und AC gleich ſind, ſo giebt die Perpendikularlinie AD gleich die halbe kleine Axe, dabey denn in Acht zu nehmen, wenn $AD = \frac{BC}{2}$, und alſo AD, DC und DB gleich werden, ſo giebt es keine Ellipſe ſondern einen Kreis, wie dieſes aus der Figur zu erſehen.

Mehr Sätze für die Ellipſe findet man im Artickel Kegelſchnitte vermiſchte Sätze nach Bramer.

Ellipſe vermittelſt eines Glas Weins zu bilden, ſiehe Kegelſchnitte vermittelſt. . .

Ellipſe Zeichnung derſelben.

Ellipſe zu zeichnen.

I. Vermittelſt einiger, mit dem Cirkelinſtrumente zu beſtimmender Punkte zu ziehen.

Fig. 948. Man beſtimme die Länge und Breite der Ellipſe, d. i. die große Axe AC und die kleine HI.

Aus H mit dem Halbmeſſern $GC = \frac{1}{2} AC$ beſchreibe man einen Cirkel, oder nur zwey kleine Bogen, welche die große Axe in E und F ſchneiden werden. Dieſe Punkte E und F ſind die Brennpunkte; denn es iſt $HF + HE = AC = EC + AE = EC + CF = FA + AE$. Da alſo die Summe der Entfernungen $HE + HF$, der Summe der Entfernungen $CE + CF$, und der Summe der Entfernungen $AF + AE$ gleich iſt, ſo gehören die Punkte A, H, C zu einer Ellipſe, deren Brennpunkte in E und F ſind.

Nimmt man einen Punkt O auf der großen Axe. Aus E mit dem Halbmeſſer AO beſchreibe man einen Cirkelbogen in P, aus F mit dem Halbmeſſer CO, beſchreibe man einen andern Bogen, der den vorigen in P ſchneide, ſo gehöret der Punkt P zur Ellipſe; denn es iſt $EP + PF = AO + OC = AC$. Es war auch $HE + HF = AC$, $EE + CF = AO$, $AF + AE = AC$. Alſo gehöret der Punkt P zur nemlichen Ellipſe, die durch die Punkte A, H, C gehet.

Nachdem nun auf ſolche Art mehrere Punkte der Ellipſe beſtimmet worden, ſo kann man aus freyer Hand durch dieſelbe eine krumme Linie ziehen, welches beynahe die Ellipſe ſeyn wird.

Man ſehe auch Ellipſe, Vergleichung mit dem Cirkel.

II. Vermittelſt der Projektion des Kegelſchnitts Fig. 962. Man beſchreibe einen Kegel abed, und ziehe den Querſchnitt fg dem Schnitte der Ellipſe ge-

gemäß. Aus a ziehe man auf bd die Perpendikularlinie at, als die Axe des Kegels, ſo iſt a die Scheitel des Kegels, bred die Grundfläche. Theilet gf in 12 Theile mit 1. 2. 3. 4. u. ſ. w. aus dieſen bezeichneten Punkten ziehet auf bd die Perpendikularen, und aus eben dieſen Punkten f. 1. 2. 3. 4. etc. der Linie bd die Parallellinien, of, mn, re, uw, pq etc. alſo, daß die Parallellinien aus den Punkten gezogen, welche in dem Theile atd ſtehen, an die Linie ad reichen, den andern Punkt aber im atb ſtehend parallel an ab. Zeichnet die Baſis des Kegels alſo: Man verlängert die Linie at bis C, nimmt mit dem Cirkel die Weite bt, und ſetzet ihn alſo in A, daß der andere Theil nahe unter e in E falle, alſo reißt man den Cirkel BEDC, verlängert die gezogene Perpendikularlinie bis an den untern Theil der Cirkelperipherie, wie die Figur zeiget, und wo dieſe den Cirkel an dem obern Theile zerſchneiden, ſetzt man wieder f. 1. 2. 3. 4 etc. bis ins g. Man nehme mit einem Cirkel die Diſtanz mn, ſetze den Cirkel in A, und reiße einen Bogen an der Linie 1, der ſich in 1 anfänget und ſich auch an derſelben endet, ferner nehme man die Weite rc, ſetze den Cirkel in A, und reiße einen Bogen an der Linie 2. der ſich in 2 anfänget und endet, auf dieſe Art wird fortgefahren mit den Linien rc, uw, pq etc. bis alle Bogen in den Cirkel BEDC gezogen ſind. Neben dieſem Kegel ziehe man eine Linie fg, der fg des Kegels gleich, theile ſie in 12 gleiche Theile mit 1. 2. 3. 4 etc. verzeichnet, und aus dieſen Theilen allen ziehe man Linien, die die fg winkelrecht durchſchneiden. Nun nehme man mit einem Cirkel von der Linie AD an die Höhe des Bogens, ſo ſich in 1 anfänget und auch wieder endet, träget von der Linie fg aus 1 zur linken und rechten Hand, desgleichen von AD die Höhe des Bogens, ſo ſich in 2 anfänget und endet, träget ſolche aus 2 gegen die linke und rechte Hand, und ſo verfähret man mit dem andern Bogen allen, ſo kann man die Ellipſe ziehen, die allhier mit Punkten verzeichnet iſt.

III. Vermittelſt einer ſtetigen Bewegung zu beſchreiben. v. E. Man befeſtige beyde Ende eines Fadens EBF in den Punkten E und F einer Ebene. Man halte den Faden mit einem Stifte in B geſpannet, und fahre mit dem Stifte herum, ſo beſchreibet derſelbe die Ellipſe.

Denn, da der Faden ſich ſelbſt gleich bleibet, ſo iſt er in der Lage EBF eben ſo lang als in jeder andern Lage EDB. Folglich $BE + BF = DE + DF$. Aus dieſer Beſchreibung iſt leicht einzuſehen 1) daß die Ellipſe ſowohl durch die große als kleine Axe in 2 ähnlich gleiche Theile geſchnitten wird. 2) Daß $CF = AE$ 3) Daß die Summe zweyer Vectoren allemal der großen Axe gleich iſt; denn es iſt nothwendig $EB + BF = EC + CF$ weil EC und CF als die beyden Vectoren aus dem Punkte C betrachtet werden müſſen. Nun iſt $EC + CF = EC + AE = AC$.

IV. Nach einem Modell zu verzeichnen. Fig. 949. Wer viel Ellipſen zu ziehen hat, der kann ſich von Pappe, oder ſtarken Papiere einige Muſter von halben Ellipſen, dergleichen hier eines vorgeſtellt wird, verfertigen, um derſelben bey Gelegenheit zu gebrauchen.

V. Aus der Hauptaxe und dem Parameter zu verzeichnen. Man ſuchet zwiſchen der Hauptaxe und dem Parameter die mittlere Proportionallinie, ſo erhält man die zweyte Axe, alsdann verfährt man ferner, wie die I. Aufgabe lehret.

VI. Mit einem Lineal, gerad geſchnittenem Pergament oder dergleichen. Fig. 1187. Wenn zuvor der größere und kleinere Durchmeſſer gegeben, und beyde in ihrer Mitte rechtwinklicht ſich durchſchneidend gezeichnet

 ſind;

ſind; — als AB ſey der größere, und CD der kleinere Durchmeſſer, die ſich in der Mitte in E zerſchneiden; — ſo nimmt man ein kleines Lineal, oder gerad geſchnittenes Stückchen Pergament oder Papier FG, auf demſelben nimmt man beynahe am Ende, einen Punkt G an, aus dieſem bemerkt man mit einem Cirkel, den größern Halbmeſſer AE = BE von G in F; ferner ſetzt man auch den kleinern Halbmeſſer CE = ED aus G in H, wenn nun das Lineal oder Stückchen Pergament, auf dieſe durch einander geriſſene Durchmeſſer alſo gelegt wird, daß der Punkt F allezeit auf den kleinern Durchmeſſern CD; der Punkt H aber auf den größern AB genau zu liegen kömmt, ſo iſt der Punkt G jederzeit in dem Umfange der Ellipſe. Wenn alſo die beyden Punkte F und H allmählig auf beyden Durchmeſſern fortgezogen, und jedesmal in G ein Punkt bis ganz herum gemacht wird, und dieſe alsdann mit Fleiß an einander gezogen werden, ſo wird man eine vollkommene Ellipſe erhalten.

VII. Vermittelſt eines Stangencirkels und eines Winkelmaaßes. Fig. 1371 CB iſt die halbe kleine, und AC die halbe große Axe. Das übrige iſt aus der Figur, mit Zuziehung (V) deutlich.

Ellipſezeichnung. Vermittelſt beſonderer Inſtrumente, ſiehe Ellipſograph. — Epicyklus des Suardis. — Inſtrumente des Bramers zu Verzeichnung der Linien der Kegelſchnitte.

Ellipſen ähnliche. Ellipſes ſimiles ſind, deren große Axen zu den kleinen, oder auch zu ihren Parametern, einerley Verhältniß haben.

Wenn in dem Kegel BEF, Fig. 1562, Schnitte nach AD und CD ähnliche Ellipſen geben, ſo muß Ad : CD = b : β ſeyn, wenn die Parameter der zu Ad und CD gehörigen Ellipſen b, β heißen.

Nun iſt $b : \beta = \frac{AB.\ \text{ſin}\ \alpha.\ \text{ſin}\ dAC}{\text{Coſ}\ \frac{1}{2}\ \alpha^2} : \frac{CB\ \text{ſin}\ \alpha.\ \text{ſin}\ DCF}{\text{Coſ}\ \frac{1}{2}\ \alpha^2} = AB.\ \text{ſin}\ dAC : CB\ \text{ſin}\ dCF.$

Folglich Ad : CD = AB. ſin dAC : CB ſin dCF. Nun gilt dieſe Gleichung für dAC = DCF; in dieſem Falle verwandelt ſie ſich nämlich in dieſe:

Ad : CD = AB : CB

wie richtig iſt, weil in dem Falle in beyden Dreyecken ABd, CBD alle Winkel gleich, folglich dieſe Dreyecke einander ſelbſt ähnlich ſind; demnach iſt klar, daß alle Schnitte CD, Ad, die unter gleichen Winkeln $\beta < \alpha$ geſchehen, ähnliche Ellipſen geben. Daß aber auch nur ſolche Schnitte ähnliche Ellipſen geben, erhellet ſo: AN, DC, ſeyen elliptiſche Schnitte, ſo, daß NdF in = DCF, ſo durchſchneide man den Kegel nach der Richtung Ad, ſo, daß dAC = DCF, ſo iſt eben erwieſen, daß die beyden Schnitte Ad, CD, ähnliche Ellipſen geben; ſollen alſo CD und AN auch ähnliche Ellipſen ſeyn, ſo wären nothwendig auch AN und Ad unter ſich ähnlich, welches nicht ſeyn kann, weil ſonſten allemal

Ad : AN = AB ſin dAC : AB.

ſin NAC = ſin dAC : NAC

ſeyn müßte, welches offenbar falſch iſt, und hieraus iſt klar, daß auch die Vorausſetzung, daß Schnitte, die unter ungleichen Winkeln NAC, DCF geſchehen, ähnliche Ellipſen darſtellen können, falſch ſeyn müſſe.

Ellipſen von höherm Geſchlechte. Ellipſes ſuperiores ſ. ſuperiorum generum. Elliptoides, werden die genennet, welche ſich durch die Gleichung

chung $ay^{m+n} = bx^m (a-x)^n$ erklären laſſen, wenn entweder m oder n, oder auch m und n zugleich größer angenommen wird, als 1. Denn wenn m = 1 und n = 1 folglich $ay^2 = bx (a-x)$; ſo erklärt die Gleichung die Natur von der Ellipſi Apolloniana oder des erſten Geſchlechtes. Es ſey z. E. m = 2, n = 1, folglich $ay^3 = bx^2 (a-x)$; ſo erklärt die Gleichung eine Ellipſe von dem andern Geſchlechte. Es ſey m = 2, n = 2, folglich $ay^4 = by^2 (a-x)^2$; ſo erklärt die Gleichung eine Ellipſe von dem dritten Geſchlechte. Die Ellipſen von dem höhern Geſchlechte bekommen bey einigen beſondere Namen. Z. E. die Ellipſen von dem andern Geſchlechte nennen ſie Elliptoidem cubicalem; die von dem dritten Geſchlechte Elliptoidem biquadraticalem vel ſurde ſolidalem, u. ſ. w. von der Dignität, dazu die Semiordinate y (denn in der vorgegebenen Gleichung bedeutet y die Semiordinate, x aber die Abſciſſe) erhoben worden.

Ellipſograph oder Cirkelinſtrument zu Ziehung der Ellipſen oder Ovallinien. Fig. 315. Dieſes Inſtrument braucht man, um Ovallinien, oder vielmehr Ellipſen, von verſchiedenen Arten zu ziehen. Es beſteht aus einer viereckigten Stange von Kupfer oder Meſſing, die recht gerade und gleich iſt, in der Länge eines Schuhes, an welcher ſich drey Zwingen befinden, die nach der Länge der Stangen beweglich ſind; bey einer von dieſen Zwingen läſſet ſich eine ordentliche ſtählerne Spitze, oder eine ſolche, da man mit der Dinte, auch zuweilen mit dem Reißbley Linien ziehen kann, einſchrauben: man macht an die zwey andern Zwingen zwey Stücke, die abhängig gehen, und wie ein Schwalbenſchwanz ausſehen. Dieſe Zwingen gehen juſt an die Stange des Kreutzes nach der Länge, auf welchen kleine Regeln, mit Schneiden, die untenher abhängig laufen, und wie die Zwingen, die wie ein Schwalbenſchwanz gebildet ſind, feſt angemacht ſind. Dieſe Zwingen, welche mit einem runden Stifte angemacht worden, und die ſich überall unter den viereckigten Zwingen herum drehen, machen, daß, indem man den Stangenzirkel herum beweget, ſelbige nach der Länge des Kreutzes, vor- und hinterwärts, gehen, man muß aber eine Zwinge, um ſolches in das Werk zu ſetzen, in dem einen Arme des Kreutzes, und die andere in dem andern Arme bewegen laſſen.

Hierbey iſt zu merken, daß die Weite, die zwiſchen den zwey Zwingen ſich befindet, die Weite der zweyen focorum in der Ellipſe ſey; ſo wird demnach, indem dieſe Weite verändert wird, ſelbige mehr oder weniger erhoben ſeyn. Zu äußerſt in den Armen des Kreutzes, und zwar unten, giebt es vier kleine ſtählerne Spitzen, damit man ſolches auf dem Papiere feſt halten kann, in der Mitte des Kreutzes iſt ein kleines Viereck, welches bis an die Schneiden eingekerbet iſt, damit die Zwingen von einem Arme zum andern, wenn die Bewegung des Cirkels noch währet, laufen mögen. Der Gebrauch dieſer Maſchiene iſt ſehr leicht, denn indem man den Stangenzirkel in einen Kreiß herum gehen läſſet, ſo wird die Spitze oder der Fuß zur Dinte oder zum Reißbley die verlangte Oval oder elliptiſche Linie ziehen.

Fig. 963 ſtellet dieſes Inſtrument durch Hrn. Adam 1748 verbeſſert vor.

Auf eine andere Art. Fig. 316. Die gemeinſte Art eine ſolche Linie zu beſchreiben iſt dieſe: Man ſchlägt auf einen gleichen Tiſch, zwey Stecknadeln in einer beliebigen Weite, z. E. in D und E ein, bindet einen Faden, der um ein merkliches länger als die Weite DE ſey, an jene, ſpannet mit einem Stifte oder einer Feder, den Faden, wie bey F zu erſehen, mit der

Hand aus, und ziehet den Stift an derſelben angeſpannt herum, ſo wird ſich eine elliptiſche Linie mechaniſch beſchreiben laſſen; weil aber öfters bey unſtäter Regierung des Stifts einige Irregularität mit unterläuft, ſo iſt es beſſer, einen ſolchen Cirkel machen zu laſſen, in dem eine ſtarke Feder, wie bey G, ſich zwiſchen den Schenkeln befindet, der ſich immer weiter aufſperret, bey dieſem muß man mitten auf DE in C den einen Fuß einſetzen, mit dem andern den Faden ausſpannen, und jenen daran fortſchieben, ſo wird geſchehn was verlangt iſt.

Fig. 964 beſtehet aus einem hölzernen oder meſſingenen Kreutze ABCD, in deſſen Dicke die Rinnen oder Vertiefungen AB und CD ausgeſägt ſind. Dieſes Kreutz wird auf dem Papiere oder einer andern Ebene feſtgehalten, vermittelſt vier ganz kleiner Stifte, die auf der Rückſeite in den Gegenden A, B, C und D angebracht ſind.

EF iſt ein bewegliches Lineal, worin viel kleine Löcher, der Länge nach, neben einander durchgebohret ſind. Am Ende F iſt ein größeres Loch, worin ein Bleyſtift befeſtiget werden kann.

G ſtellet eine kleine eiſerne Schaufel vor, deren Stiel in die Löcher des Lineals, und deren plattes Ende in die Rinnen des Kreutzes paſſet, doch ohne ſtarke Reibung. Es gehören zwey ſolche Schaufeln zu dieſem Inſtrumente.

Will man nun eine Ellipſe beſchreiben, deren große und kleine Axe gegeben ſind, ſo nehme man die Entfernung FH, gleich der halben kleinen Axe; und die Entfernung FI gleich der halben großen Axe. Bey H und bey I ſtecke man die Schaufeln in die Löcher des Lineals, ſo daß deren Platten unterwärts in die Rinnen des Kreutzes eingeſenkt werden, nemlich die eine in die Rinne CD, und die andere in die Rinne AB.

Wenn dieſes geſchehen, ſo drücke man das Kreutz auf das Papier an, und drehe das Lineal herum, ſo wird der Bleyſtift F eine Ellipſe beſchreiben.

Fig. 965 ſey EF die jetzige Lage des Lineals. Ziehe FL mit AB, und FM mit CD parallel. Es ſey $FI = a$, $FH = b$, $KL = MF = x$, $LF (= KM) = y$. Weil das Dreyeck FMI rechtwinklicht iſt, ſo iſt

$$(MI)^2 = (FI)^2 - (MF)^2$$

oder $MI^2 = a^2 - x^2$.

Ferner, weil das Dreyeck FMI in KH mit MF parallel iſt, ſo iſt

$$FI : FH = MI : MK$$

oder $(FI)^2 : (FH)^2 = (MI)^2 : (MK)^2$

oder $a^2 : b^2 = (a^2 - x^2) : y^2$

daher $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

welches die Gleichung der Ellipſe iſt. Alſo gehöret der Punkt F zur Ellipſe; und da der Beweis auf jeden Punkt, den der Bleyſtift zeichnet, anwendbar iſt, ſo iſt die beſchriebene Linie eine Ellipſe.

Fig. 966 ſtellet des Herrn Adams Inſtrument vor, welches nach dem Grundſatze des vorigen wirkt. Das Papier wird auf das Bret AB befeſtiget, der Stift C wird auf den großen Durchmeſſer geſetzt, indem man ihn an der Stange DE ſchiebet, und wird vermittelſt der Schraube G für den kleinen Durchmeſſer geſtellt, wendet man nun das Bret AB, ſo wird von der Feder eine Ellipſe beſchrieben. Fig. 967 iſt die Platte, worinn an der untern Seite des Brets ſich die Stifte bewegen.

Fig.

Fig. 991 iſt ein ähnlicher Ellipſograph, an deſſen beweglichem Schieber FB, der Rinnen AD und EB, in H ein Storchſchnabel angebracht iſt, um ſehr kleine Ellipſen wie K zu ziehen.

B. Beſchreibung eines Ellipſographen, womit man wahre Ellipſen ohne Berechnung der Brennpunkte ſehr leicht beſchreiben kann. (Gotha 1794.)

I. Bau des Ellipſographen. Man denke ſich eine lange lattenförmige gerade Stange EF, die in der Mitte ihrer Länge einen Zapfen hat, um welchen ſich ein, mit gleichweit von einander abſtehenden Löchern verſehenes Lineal cirkelförmig bewegen kann, in deſſen ſie in einem ihrer Löcher B ein anders, ebenfalls mit gleichen Löchern verſehenes, Lineal BG mit ſich führt, welches ſich um B drehen kann, aber in einer Entfernung BA = BC einen runden Zapfen hat, mit welchem der Punkt A der Länge nach der Linie EF ſich bewegt, ſo hat man den Grundbegriff des Ellipſographen.

Fig. 968. Um die Ellipſe zu beſchreiben, legt man das Stück CD der Länge nach gegen CE, und das Stück BG ebenfalls auf EC, ſo daß G nach E zu komme. Nun ſteckt man einen Bleyſtift in P, eins der Löcher von BG; dann bewegt man die kleinen Lineale ſo, daß CD einen halben Cirkel beſchreibe, und der Zapfen A immer an EF anliege, ſo wird endlich der Punkt G nach F zu kommen, und der Bleyſtift in P wird die verlangte Ellipſe gezeichnet haben.

Daraus ſiehet man, daß dieſes Inſtrument hauptſächlich aus 5 Stücken beſtehet, nemlich drey Linealen, einem Reißbley oder Bleyſtift, und einem Zapfen in A, wozu noch die Zapfen in C und B, und zwey Stellſchrauben in F und E kommen. Dieſe acht Stücke müſſen einzeln beſchrieben werden, und zwar wollen wir es für ein Inſtrument thun, mittelſt welches man Ellipſen von 25 bis 30 Schuh Länge beſchreiben kann. Aus dieſer Beſchreibung wird man leicht die Verhältniſſe eines kleinern oder größern Ellipſographen herleiten können.

1. Das große Lineal EF. (Fig. 968). Dieſes Lineal iſt 31 Schuh lang, 2 Zoll dick, und 4 Zoll breit. Der ganzen Länge nach iſt auf einer Seite eine Falze eingehobelt, bis auf die letzten 6 Zoll an jedem Ende. Dieſe Falze iſt 1¾ Zoll breit, und 14 Linien, oder 1 Zoll 2 Linien tief. Beyde Enden dieſes Lineals ruhen auf zwey kleinen Klötzen, von 4 Zoll ins Gevierte und 2 Zoll hoch, damit das Lineal den Boden nicht berühre. Sollte es ſich ſeiner Länge und Schwere wegen auch ſo ſehr biegen, daß es den Boden berührte, ſo hätte das keine böſen Folgen, indem das Lineal BG, bey ſeinem Wege unter EF, ſolches ſo viel als nöthig, ſchon erheben würde. An jedem Ende über die Mitte eines jeden dieſer Klötzchen iſt ein rundes Loch von 3 Linien im Durchmeſſer, durch das große Lineal und durch die Klötze hindurch gebohrt, um die 2 Stellſchrauben zu empfangen.

2. Die Stellſchrauben. Dieſe Stellſchrauben, die in F und E paſſen, ſind durch K vergrößert vorgeſtellt. Es ſind ihrer zwey. Sie haben 3 Linien im Durchmeſſer. Der runde Theil ac iſt 4 Zoll lang, nemlich ſo viel als nöthig iſt, um durch die Dicke des großen Lineals und des kleinen Klotzes, der ſelbiges trägt, durchzudringen. Ueber a trägt die Stellſchraube einen unbeweglichen Ring mit einem runden Plättlein, damit man mittelſt eines kleinen, runden, eiſernen Nagels die Schrauben anziehen könne. Der untere Theil

bc

bc mag 2 bis 2½ Zoll lang ſeyn, und iſt holzſchraubenförmig eingeſchnitten, und läuft unten zu ſpitzig aus.

Will man das große Lineal befeſtigen, ſo ſtellt man ſelbiges auf die Unterlage, worauf die Ellipſe beſchrieben werden ſoll; hernach bohrt man in dieſe Unterlage, unter den Löchern des Lineals, den Anfang der Löcher, in welche die Stellſchrauben eingeſchraubt werden ſollen. Dann ſteckt man die Stellſchrauben hinein, und zieht ſie gehörig an.

3. Der Zapfen des Mittelpunkts C.

Dieſer Zapſen, welcher der Haupt-Mittelpunkt der Bewegung des ganzen Inſtruments iſt, muß aufs ſorgfältigſte gemacht, und beſonders geſtellt ſeyn. Von ihm hängt größtentheils die Richtigkeit der Zeichnung der Ellipſe ab.

Der Zapfen des Mittelpunkts iſt in Fig. 969 und 970 mit ſammt ſeinem Träger und ſeiner Verbindung mit dem großen Lineale vergrößert gezeichnet.

Sein unterſter Theil iſt der Kopf a. Dieſer Kopf wird zuerſt rund gefeilt, und hat 8 Linien im Durchmeſſer. Dann feilt man ihn auf einer Seite dem Zapfen gerade gleich ab, ſo daß der Kopf dort ganz platt wird. Die Höhe des Kopfes iſt 2½ bis 3 Linien. Ueber dieſem Kopfe und gerade an dem flachen Theile deſſelben, erhebt ſich der Theil ib, ſo gut abgedreht, als es ſich thun läßt. Dieſer Theil hat 4 Linien im Durchmeſſer ganz genau, und 13 Linien, oder 1 Zoll 1 Linie Höhe. Von da aus, nemlich von b, iſt der Zapfen nur noch 3 Linien breit, auch gut cylindriſch abgedreht, und von b nach c 2 Zoll hoch. Von c nach d iſt noch ein Schraubenſtück, von 1 Zoll hoch und 3 Linien dick, und mit der zugehörigen Mutter verſehen. Die Mutter mag Ohren haben oder viereckigt ſeyn, es gilt gleichviel; man ſoll ſie nie überflüſſig anziehen. Die Schraube wird noch überdies mit einem Plättlein b verſehen, aus dickem Eiſenblech oder Meſſing gemacht. Sie paßt ganz genau in das Stück bc, kann aber leicht davon genommen werden. Ihr Durchmeſſer iſt 8 Linien.

Dieſer Zapfen muß ganz auſſerhalb des großen Lineals zu ſtehen kommen, und es nur berühren. Mithin bedarf er eines Trägers. Der Plan dieſes Trägers iſt in Fig. 970, in der nemlichen Proportion gezeichnet als der Zapfen. Um ihn zu verfertigen, nimmt man zwey Stück Bret, jedes von 1 Zoll Dicke, 12 Zoll Länge und 5 Zoll 4 Linien Breite, und leimet ſie auf einander, die Faſern des Holzes in die Queere, ſo daß ein Bret daraus entſtehet von 12 Zoll Länge, 5 Zoll 4 Linien Breite und 2 Zoll Dicke. Es muß hartes Holz ſeyn. Zur größeren Befeſtigung werden einige Holznägel durchgeſchlagen. Dann wird auf einer Seite dieſer Träger an beyden Enden abgenommen, wie Fig. 970 weiſet. In der Mitte behält das Holz die ganze Breite, an den Enden aber wird AD und BE nur 4 Zoll lang. Man bemerkt eine obere und eine untere Seite an dieſem Träger; die obere iſt diejenige, wo die Faſern des Holzes der Länge nach laufen.

Nun zieht der Schreiner durch E und D eine gerade Linie, dann auſſerhalb derſelben auf dem vorſtehenden Schnabel eine parallele Linie, welche von den erſten 4 Linien weit abſteht. In dieſem Zwiſchenraume, und gerade in der Mitte des Brets und in der Mitte dieſer zwey Linien, wird das Loch für den Zapfen, ſo ſenkrecht als möglich, gebohrt. Dieſes Loch iſt nur 3 Linien ſtark, weil es nur den obern Theil cb des Zapfens empfangen ſoll. Um dieſes Loch recht ſauber bohren zu können, muß der Träger aus Birn, Ahorn oder aus einem ähnlichen Holze ſeyn. Nur kein Eichenholz! Iſt das Loch

ſo

ſo weit gebohrt, ſo ſteckt man den Zapfen mit dem Plättlein b von unten herein; dann zeichnet man auf den untern Theil des Trägers die Stelle des Plättleins, und nimmt dort ſo viel Holz weg, daß das Plättlein ganz eingelaſſen werden könne. Dieſes Plättlein kann dort entweder befeſtiget werden, oder nicht. Im erſten Falle muß man ſorgen, daß die Köpfe der Nägel nicht hervorragen.

Um den Träger auf dem langen Lineale zu befeſtigen, ſucht man zuerſt auf dieſem die Mitte der Länge; dann legt man den Träger auf die Mitte des Lineals, ſo daß die Breite AD und BE gerade die Breite des Lineals decke. Ehe man ihn auf immer befeſtigt, ſtecke man den Zapfen in den Träger, und ſchraube ihn an, ſo wird, wenn alles richtig gemacht worden iſt, der flach gefeilte Theil des Kopfs des Zapfens gerade an dem Lineale anliegen, und deſſen Dicke um $1\frac{1}{2}$ Linien den untern Theil des Lineals berühren. Die Fig. 969 zeigt dieſe Verbindung: efghkl iſt der Durchſchnitt des Lineals, lmnqpol der Durchſchnitt des Trägers. Sollte dieſer Zapfen nicht ſo anliegen, oder mit gh nicht in gerader Linie ſtehen, ſo muß er mit dem Träger gerückt werden, bis dieſe Bedingung erfüllt wird. Alsdann erſt befeſtigt man den Träger aufs lange Lineal mit Holznägeln, wie Fig. 970 anzeigt.

Die 971te Figur ſtellt das Profil des großen Lineals mit dem Träger, Zapfen, Tragklötzen und Stellſchrauben vor. In dieſem Zuſtande iſt ſie ganz fertig.

4. Den Rollzapfen in B.

Dieſer Zapfen macht die Verbindung der beyden kleinen Lineale CB und BG aus. Wir heiſſen ihn deswegen Rollzapfen, weil man unter ſich eine kleine Rolle hat, auf welcher die beyden kleinen Lineale ruhen. Dieſer Zapfen iſt in Fig. 972 vorgeſtellt.

abg iſt ein Stück Meſſing, welches in bg rund und flach abgedreht, unten zu geſpalten iſt, um die Rolle a zu empfangen, bg hat $1\frac{1}{4}$ Zoll im Durchmeſſer, die Rolle aber 8 Linien, und iſt 2 Linien dick.

Auf der Mitte dieſes Stücks iſt der eigentliche Zapfen, auch von Meſſing, aufgeſchraubt; er hat durchgängig 4 Linien im Durchmeſſer, wie der Zapfen des Mittelpunkts. In ee und df ſind zwey Platten auf denſelben gelöthet, deren Durchmeſſer 15 Linien, oder $1\frac{1}{4}$ Zoll beträgt. Jede derſelben iſt 1 Linie dick. Der Zwiſchenraum zwiſchen gb und ec iſt 13 Linien, oder 1 Zoll 1 Linie. Zwiſchen ec und df iſt dieſer Zwiſchenraum 11 Linien. Von df nach h iſt 11 Linien, und von h nach i iſt das Gewind 10 Linien hoch. Die Mutter dazu, o, hat zwey Ohren, um ſie ſtark anziehen zu können. Die Scheiben oder Plättlein müſſen mit ſtarkem Lothe im Feuer gelöthet, und dann gehörig abgedreht werden.

Der untere Theil dieſes Zapfens kann auch zur Noth aus Holz gemacht werden, wenn es nur recht hartes Holz iſt, wie Weisdorn oder Buchsbaum.

Wenn jemanden dieſer Zapfen zu theuer vorkommen ſollte, ſo könnte man den Theil zwiſchen df und ec eine Linie dicker machen, nemlich im ganzen 5 Linien, und dann von beyden Enden, die, wie ſonſt, 4 Linien dick ſind, ſchiebt man zwey Scheiben ein, die mit Mühe auf den Zapfen paſſen. Sie ſind von 1 Linie dicken Eiſenbleche und haben die nemliche Größe. Auſſerdem bleibt alles übrige wie vorher, nur daß das unterſte Stück aus Holz und die Spindel aus Eiſen gemacht werden kann.

5. Der Leitzapfen A. Dieſer Zapfen iſt in der Fig. 973 ſattſam beſchrieben. Nur iſt anzumerken, daß deſſen Durchmeſſer in cd, 4 ſtarke Linien beträgt, auf daß er durch die bloße Friction in ſeine Löcher ſich halte, das heißt, kaum etwas mehr als die übrigen Zapfen, daß die Höhe cd $1\frac{1}{2}$ Zoll ausmacht, und daß der Fuß 1 Zoll in der Höhe und 2 Zoll im größten Durchmeſſer hat. Dieſes Stück wird aus hartem Holze gemacht.

6. Der Bleyſtift in P. Fig. 974. Zu dieſem Bleyſtifte wird ein kleines rundes Futteral von Weißbleche gemacht. Deſſen Durchmeſſer db oder ei iſt 4 Linien, und die Länge ed oder ib iſt $1\frac{1}{2}$ Zoll. An denſelben wird ein Plättlein oder eine Scheibe von Weisblech gelöthet, und untenher mit einem Ueberfluße von Loth unterſtützt, oben aber recht ſauber glatt gemacht. Dieſe Scheibe hat 8 Linien im Durchmeſſer, und die Entfernung derſelben von db iſt 11 Linien, ſo daß der Reſt zwiſchen a und e 7 Linien ausmacht. Zu dieſem Futter wird ein kleiner ebener Deckel zubereitet, der die obere Mündung genau ſchließt. Mitten in dieſem Deckel wird äuſſerlich ein meſſingenes Schraubenſtück aufgelöthet, und inwendig eine kleine Spiralfeder; zu der Schraube wird eine kleine Mutter gemacht. Dieſe Spiralfeder l iſt ſchwach und beſteht nur aus einem dünnen, nicht ausgeglüheten Drathe. Ihre größte Ausdehnung iſt 5 Linien, ihre kleinſte 1 Linie. Mithin iſt ihr Wirkungskreis 4 Linien. Dieſe Feder iſt gerade ſo weit, daß ſie bequem in dem Futterale ſpielen kann.

Nun nimmt man einen Bleyſtift m von der gröbern Art, von der Größe des innern Raums des Futterals, oder wenn man keinen ſolchen hat, nimmt man einen dickeren, und raſpelt rund herum ſo viel davon ab, daß er leicht ins Futteral aus und eingehen kann. Dann ſpitzt man es ſo, daß die Spitze genau in den Mittelpunkt komme. Man thut ihn hinein, und ſteckt alsdann das Futteral in ſein gehöriges Loch, die Spitze unten, die Schraube oben, und ſetzt die Mutter auf, um das Ganze an das Lineal BG zu befeſtigen.

7. Das Central-Lineal CD. Dieſes Lineal, wie auch das Stift-Lineal BG, kann jede beliebige Länge bis auf die Hälfte von EF haben. Allein ſo lange Lineale ſind beſchwerlich zu regieren, wenn das große Lineal nicht noch größer iſt. Daher wollen wir jedes derſelben gleich dem Viertel von dem groſſen Lineale EF annehmen. Wer ſie länger haben will, mag ſich ſolche machen laſſen. Aber in dieſem Falle muß man noch einen Zapfen, wie Fig. 973 haben, den man in D oder in ein anderes Loch ſteckt, um das Lineal zu unterſtützen.

Das Centrallineal CD iſt genau 1 Zoll dick und $2\frac{1}{2}$ Zoll breit. Es iſt mit vielen Löchern verſehen, worein die Zapfen paſſen können. Dieſe Löcher ſind 4 Linien weit, damit die Zapfen in denſelben ſich bewegen können, ohne überflüſſigen Spielraum. Die einfacheſte Eintheilung dieſer Löcher wäre, daß man ſie alle in der Mitte des Lineals, der Länge nach hintereinander, bohrte, allein, da ſie 4 Linien im Durchmeſſer haben, und wenigſtens 5 Linien Zwiſchenraum zwiſchen denſelben ſtatt haben ſollte, ſo wäre die kleinſte Eintheilung 9 Linien weit. So eine Eintheilung von 9 zu 9 Linien iſt nun ſelten hinlänglich, um Ellipſen nach einem ganz beſtimmten Maaße zu beſchreiben. Daher haben wir folgende Verfügung getroffen, um, der Stärke des Inſtruments unbeſchadet, kleinere Eintheilungen zu bekommen: Fig. 975 ſey ein Stück des Centrallineals von C an gerechnet. Man theile deſſen Breite in 4 gleiche Theile unten und oben ein, und ziehe die drey geraden parallelen Linien

ab, ab, ab, die ganze Länge des Lineals durch. Dann ziehe man die unterſte Linie c. Aus dem mittleren Punkte a beſchreibe man einen halben Cirkel, mit der halben Breite des Lineals nach dieſer Krümmung aus, wie die Figur zeigt; alsdann theile man jede Seite des Lineals in gleiche Theile cc, cc, cc, dd, dd, dd, ect. welche alle drey Linien lang ſind. Alsdann ziehe man die Queerlinien cd, cd, cd ect. deren jede von den drey parallelen in drey gleichen, von einander abſtehenden Punkten durchſchnitten iſt.

Nun fängt man bey a an zu bohren, und bohrt alle drey durch. Dieſe Löcher werden ausſchließlich den Zapfen den Mittelpunkts C empfangen. Dann fängt man bey der 5ten Eintheilung, links auf der Seite c an, das erſte Loch zu bohren. Das zweyte iſt auf der nächſten Eintheilung in der Mitte, das dritte auf der folgenden Eintheilung rechts. Und ſo hat man drey Löcher, die in einer geraden aber ſchiefen Linie liegen.

Nun fängt man eine zweyte Linie an, bey der linken Seite, indem man um eine Eintheilung ſteigt. Sind dieſe drey den erſten parallel gebohrt, ſo ſchreitet man zu den drey folgenden, und ſo bis das Lineal voll iſt. Auf dieſe Art erhält man Löcher, deren Mittelpunkte, der Länge des Lineals nach, nur 3 Linien von einander ſeyn könnten, wenn man ſie nicht auf drey Linien vertheilt hätte; und eine Eintheilung von 3 zu 3 Linien iſt für die Praxis genau genug, indem man immer ein paar Linien in ſeiner Willkühr hat. Weil die drey Mittelpunkte das Ende des Lineals ſchwächen, ſo iſt es gut, wenn dieſes Ende, mit weiſſem oder ſchwarzem Bleche beſchlagen wird.

Um die verlangte Eintheilung ohne große Mühe recht genau zu bekommen, können ſich die Praktiker, die keine große Uebung in dergleichen Arbeit haben, folgende Regel bemerken: man nehme hier die Länge von 3 Zoll, und theile ſie nach den Vierteln in 12 gleiche Theile. Jetzt nehme man einen guten Cirkel, faſſe dieſe 12 Theile (hier ſinds Vierachtelszolle), und ſchraube den Cirkel in dieſer Oeffnung feſt. Dann trage man dieſe Weite von dem zweyten Striche an, auf, ſo wird die andere Zirkelſpitze eine Eintheilung weiter zeichnen. Dann ſetze man die eine Zirkelſpitze in den dritten Strich, und zeichne mit der andern einen neuen Theil: und ſo fort, indem man mit der einen Zirkelſpitze immer um einen Theil fortrückt und mit der andern zeichnet, bis die 12 erſten durchgelaufen ſind. Alsdann aber hat man 12 neue, womit man verfährt wie mit den erſten, und ſo fort, bis man zu Ende des Lineals iſt.

Hat man einen gut eingetheilten Fuß, ſo kann man die Theile deſſelben unmittelbar durch Nebenhaltung abtragen. Allein die obige Methode geht mit allen Arten von Eintheilungen an.

Hat man ſeine Eintheilung auf einer Seite gezeichnet, ſo kann man mittelſt des Winkels ſogleich die Parallellinien cd, cd, cd, ziehen. Alsdann ſchreibt man die Anzahl der Viertelszolle bey d oder c auf, auf daß man nicht bey jeder Operation ſie zu zählen brauche.

8. Das Stiftlineal BG. Dieſes Lineal iſt dem Centrallineale ganz gleich, weswegen die Figur 975 auch dafür gilt. Daher wird dieſes mit dem andern zugleich gebohrt, wobey dem Arbeiter ſehr anbefohlen werden ſoll, ja recht ſenkrecht zu bohren, ſonſt können die Eintheilungen, auf dem einen wenigſtens, nicht gut ſeyn.

Das ſchiefe Bohren hat noch den Nachtheil, daß die Zapfen und der Bleyſtift in den ſchiefen Löchern ſchief ſtehen, welches der Genauigkeit der beſchriebenen Ellipſe zuwider iſt.

Die Löcher a, a, a, in dem Stiftlineal werden den Rollzapfen in B ausſchließlich empfangen. Dieſes Lineal unterſcheidet ſich von dem Centrallineale dadurch, daß es den Bleyſtift und den Leitzapfen mit ſich führt, und an ſeinem äuſſerſten Ende einen kleinen Bindfaden hat, der durch das letzte Loch durchgezogen und dann geknüpft iſt.

II. Verbindung der Theile des Ellipſographen. In der Beſchreibung des Zapfens des Mittelpunkts haben wir ſchon geſehen, wie deſſen Träger ABED, Fig. 970, in der Mitte des großen Lineals befeſtiget wird, auf daß der Zapfen ſeinen rechten Ort einnehme. Iſt es nun geſchehen, und man will das Centrallineal anmachen, ſo nimmt man den Zapfen aus dem Träger, und iſt das Schieblein b, Fig. 969 beweglich, ſo zieht man es aus dem Zapfen, legt das Schieblein auf den einen der drey Mittelpunkte a, Fig. 975, legt das Lineal in der Falze des großen Lineals ſo, daß die Scheibe und der Mittelpunkt, über welchem ſie ſteht, gerade unter dem Loche c des Trägers ſich befinden. Dann ſteckt man den Zapfen des Mittelpunkts unten durch, ſo daß er zum Loche c herauskomme, und dreht ihn ſo, daß ſeines Kopfs plattgefeilte Seite an den untern Theil des großen Lineals anzuliegen komme. Endlich ſetzt man die Mutter auf, und zieht ſie mäßig an. Auf dieſe Art iſt das Centrallineal mit dem großen Lineale gehörig verbunden, und kann vollkommen ſeine Bahn beſchreiben.

Die Art, wie das Stiftlineal mit dem Lineale des Mittelpunkts, mittelſt des Rollzapfens, Fig. 972, verbunden wird, iſt folgende:

Man nimmt den Rollzapfen, ſchraubt die Rolle deſſelben, oder vielmehr die Gabel der Rolle, ab, ſteckt den Theil des Zapfens, wovon man die Rolle abgenommen hat, in den gehörigen Mittelpunkt, bis er auf dem Plättlein ee aufſitzt. (In der Folge werden wir ſehen, daß man hier den nemlichen Mittelpunkt a wählt, welchen man für das Lineal des Mittelpunkts genommen hat). Da das Lineal 12 Linien dick, und der Zwiſchenraum ge, in welchen es kommt, 13 Linien groß iſt, ſo wird ſich das Stiftlineal in derſelben leicht drehen können, und mithin die Stelle in ihrer Lage unverrückt laſſen, welche ſo ſeyn muß, daß die Fläche derſelben auf der Länge des Mittelpunkts ſtehe.

Nun ſetzt man die Rolle wieder ein, ſteckt den obern Theil des Rollzapfens in das gehörige Loch des Lineals des Mittelpunkts, ſo daß dieſes Lineal über dem Stiftlineale auf dem Plättlein df, Fig. 972, aufſitze. Endlich ſchraubt man die Mutter o des obern Gewinds auf dem Lineale feſt auf, ſo daß der Zapfen im Lineale des Mittelpunkts feſt und unbeweglich bleibe, indeſſen ſich das Stiftlineal unten um den Zapfen dreht.

Zuletzt wird der Leitzapfen in ſein gehöriges Loch blos eingeſetzt, wo ihn die Friction allein erhalten ſoll, weil er ein wenig mühſam hineingeſteckt werden muß, und der Bleyſtift, oder vielmehr deſſen Futteral wird auch in ſein gehöriges Loch eingeſetzt und aufgeſchraubt.

Iſt alles gehörig befolgt worden, ſo muß der untere hervorragende Theil des großen Lineals von den zwey kleinern Linealen eingefaßt werden, wenn man dies an jenes andrückt. In dieſer Lage ruhet das Inſtrument, und es wird in derſelben mittelſt Bindfaden bis zum nächſten Gebrauch erhalten.

III. Vervollkommung des Ellipſographen.

So ſehr als die bisherige Conſtruction unſers Inſtruments dem Zwecke, welchen wir dabey gehabt haben, entſpricht; ſo können wir doch in der

Voll-

Vollkommenheit deſſelben durch einen neuen Schritt ſehr viel gewinnen. Es iſt einmal gewiß, daß, wenn ſchon die Länge von drey Linien in einem großen Werke innerhalb der Gränzen der Willkührlichkeit iſt, dennoch das Inſtrument vollkommner wäre, wenn man die Eintheilung nach Belieben verkleinern könnte. Auch zieht die Dreyfaltigkeit der Mittelpunkte auf jeder der kleinen Lineale, bey jeder neuen Ellipſe, die man beſchreibt, die allerdings nicht unbeträchtliche Unbequemlichkeit nach ſich, daß man, nach Beſchaffenheit der Umſtände, bald dieſen Mittelpunkt, bald jenen brauchen, und mithin das Lineal des Mittelpunkt in C aufſchrauben und verfahren muß, wie wenn die Lage des Mittelpunkts der Länge nach veränderlich wäre, da ſie doch unveränderlich iſt. Zwar verurſachet die folgende Beſſerung einen kleinen Aufwand mehr in der Conſtruction; allein wir denken, daß dieſer kleine Aufwand, durch den größern Grad der Vollkommenheit wohl aufgewogen wird, wenigſtens in den Augen derer, die gern alles ſo vollkommen machen, als es ihnen möglich iſt. Für die andern iſt ja die erſte Beſchreibung da.

Um mit Ordnung zu verfahren, wollen wir alle Theile des vollkommenen Ellipſographen der zweyten Art durchgehen, wie wir ſie bey der erſten Art durchgegangen haben.

1. Das große Lineal.

Das große Lineal unterſcheidet ſich in dem neuen Inſtrumente nur dadurch, daß die Falze bey gleicher Tiefe als vorher, nemlich von 14 Linien, nur $1\frac{1}{4}$ Zoll breit iſt. Uebrigens bleibt alles übrige an demſelben wie vorher, nemlich der Träger des Zapfens, die Klötzchen an beyden Enden, und die Stellſchrauben.

2. Der Zapfen des Mittelpunkts C.

Es wird gar nichts daran geändert. Er behält ſeine Geſtalt und Lage ganz.

3. Das Centrallineal.

Der Theil deſſelben, der dem Mittelpunkte am nächſten iſt, iſt in Fig. 976 vorgeſtellt. Deſſen Breite iſt $2\frac{1}{2}$ Zoll und die Dicke 1 Zoll, wie vorher. Allein, anſtatt der vielen Löcher iſt das Lineal der Länge nach in zwey gleiche Theile durchgeſchnitten, ſo daß der lange Zwiſchenraum zwiſchen beyden Theilen 4 Linien breit iſt. In dieſen Zwiſchenraum kommen nun die Zapfen zu ſtehen, welche ſonſt in den Löchern waren, der Zapfen des Mittelpunkts ausgenommen, der in a ſein eigenes Loch hat. An beyden Enden hört der Zwiſchenraum auf. Dort iſt das Lineal ganz und völlig, um die zwey Theile beyſammen zu erhalten.

Die leichteſte Art, dieſes Lineal zu conſtruiren, iſt, daß man zwey Latten nehme, ſie recht genau im Winkel hobele, und jeder derſelben 1 Zoll Dicke, und 1 Zoll 1 Linie Breite gebe. Es ſey nun hi die Linie, auf welcher der Mittelpunkt ſich befinden wird, ſo ziehe man in der Weite von 1 Zoll die gerade gf derſelben parallel. Dann nehme man von dem inneren Rande jeder Latte an 6 Linien auf gf, und ſchneide jede Latte um ſo viel ein, daß ſie die Form der 977 Figur bekomme, wo die Schenkel A und B jeder für ſich 7 Linien breit ſind. Ferner bearbeite man mit dem Meiſel die inneren Seiten dieſer Schenkel winkelförmig, und zwar 1 Linie tief, wie der Durchſchnitt P des Lineals zeigt. Nun verfertige man ein Stück Holz cbed, welches zwiſchen dieſen beyden Schenkeln ſo paßt, daß die zwey Latten die gehörige Eintheilung von 4 Linien unter ſich behalten. Man leimt dieſes Stück ein, beſchnei-

ſchneidet das Ende halbzirkelförmig und ziehet über das ganze Ende eine Zwinge von ſtarken weiſſen oder gelben Bleche, welche in gk reichet. Endlich bohrt man das Loch des Mittelpunkts durch, und hiemit hat dieſes Ende ſeine Vollkommenheit erhalten. Das andere Ende wird auf die nemliche Art verfertigt, nur bleibt das Loch a und der runde Theil hdei weg.

Dabey aber muß man die Vorſicht brauchen, die Enden, oder wenigſtens das eine, nicht eher zu ſchließen, bis alle Stücke, die in das Lineal gehören, hineingeſchoben worden ſind, weil ſie alle mit Zwingen oder viereckigten Ringen verſehen ſeyn werden, um die zwey Theile des Lineals zuſammen zu halten.

4. Das Stiftlineal.

Es wird gerade wie das Centrallineal gebaut, und iſt ihm in allen Punkten gleich, wird aber mit einem kleinen Bindfaden an ſeinem Ende verſehn, wie es bey dem erſten Ellipſographen erinnert worden iſt.

Sind dieſe beyden Lineale fertig, ſo zeichnet man auf jedem derſelben zweyerley Eintheilungen, die man auf halbe und fünftels Linien treiben kann, wenn man dazu Luſt hat. Dieſe zwey Eintheilungen mögen nach dem franzöſiſchen und rheiniſchen, oder nach dem rheiniſchen und dem örtlichen Werkſchuhe gemacht werden, oder auch einer dieſer Schuhe in Decimal- und Duodecimaltheile abgetheilt werden. Die zwey Theile dieſer Lineale liefern die Bequemlichkeit zu einer ſolchen doppelten Eintheilung, indem die eine rechts, die andere links gezeichnet werden kann, wie Fig. 976 zeigt.

Dieſe Eintheilung muß bey dem Mittelpunkte a, Fig. 976 anfangen laſſen, und die Ziffern müſſen der Länge des Lineals nach geſchrieben werden.

5. Der Rollzapfen.

Deſſen unterſter Theil abg, Fig. 978, wird, wie in dem vorhergehenden Inſtrumente verfertiget; die Rolle hat 8 Linien im Durchmeſſer, und iſt 2 Linien dick. Der Deckel gb derſelben, welcher die erſte Platte ausmacht, hat 2 Zoll im Durchmeſſer, wie auch die zweyte Platte ec. Ihre Dicke iſt eine Linie. Die Entfernung von gb zu ec im Lichte iſt 13 Linien oder 1″ = 1‴; zwiſchen ec und df iſt der Zwiſchenraum 11 Linien. Allein anſtatt zweyer Plättleins in df, wie in Fig. 972, iſt eine Zwinge oder ein viereckigter Ring dfkl, von Meſſing oder Eiſenblech, in welchem die zwey Theile des Central-Lineals leicht geſchoben werden können. Mithin reicht deſſen oberer Theil bis an das Schraubenſtück i. Dieſe Zwinge wird in m und n im Feuer gelöthet. Ihre Breite iſt 1 Zoll.

Da ſie aber dazu dient, mit den übrigen, den Zapfen nach Willkühr, aber genau, auf der beſtimmten Eintheilung zu ſtellen, ſo werden zwey Löcher auf beyden Seiten des Zapfens in dem obern Theile derſelben gemacht, wobey in jedes eine kleine Zunge geſpannt wird, welche die Wirkung eines Zeigers verſehen muß. Man ſehe Fig. 976, wo die Zwinge in kl gezeichnet iſt. Dieſe Zungen müſſen genau in der nehmlichen geraden Linie des Mittelpunktes des Zapfens ſeyn. Wollte man ſich dieſer Mühe überheben, ſo könnte man die Eintheilung an einem Rande der Zwinge zählen, und jedesmahl 6 Linien ab oder zuthun, weil 6 Linien die halbe Breite der Zwinge ausmachen.

Der Theil zwiſchen ec und i kann nach Willkühr rund oder viereckigt ſeyn.

6. Der Bleyſtift.

Dieſer Theil wird vollkommen ſo gemacht, wie in der Beſchreibung des Ellipſographen gezeigt worden iſt. (I. 6.) was das Futteral, die Feder und den Bleyſtift ſelbſt betrifft. Nur muß hier wie bey dem Rollzapfen eine

Zwin-

Zwinge, Fig. 979, die Stelle der bloßen Platte vertreten. Dieſe Zwinge wird aus ſtarkem doppelten Weißbleche gemacht, und in a, wie die Scheibe ac, von Fig. 974, gelöthet. In c bedarf es des Löthens nicht, weil das mittlere Loth, welches die Zwinge an ihrem obern Theile erhält, nur ſo groß als nöthig iſt, um das Stück Schraube durchzulaſſen. Doch muß alles ſo eingerichtet ſeyn, daß, wann die Mutter angezogen wird, das Stift-Lineal davon gepackt werde, damit der Bleyſtift in ſeiner Lage feſt ſey. In Anſehung auf die Eintheilung geſchieht hier, was mit dem Rollzapfen geſchah.

7. Den Leitzapfen, Fig. 980.

Er iſt wie vorher, rund. Der Theil cd iſt 1½ Zoll lang, hat 4 Linien im Durchmeſſer. Dieſer Zapfen iſt, wie die vorhergehenden Stücke, mit einer Zwinge oder viereckigten Ringe verſehen, welcher ſich von den andern nur dadurch unterſcheidet, daß die Mitte des obern Theils cirkelförmig iſt, in der Weite von 1½ bis 2 Zoll; wie A in Fig. 980 zeigt.

Der Theil i, der unter dem Lineale iſt, iſt 1 Zoll lang, und an deſſen Ende abgeſtumpft. Bey c trägt es einige Schraubengänge, mittelſt welcher und einer Mutter der Zapfen an Ort und Stelle auf dem Lineale fixirt wird. Die Zwinge wird nur in a gelöthet, auf daß die Schraube ihre gehörige Wirkung äuſſern kann.

Sollte einer einen größern Ellipſographen ſich anſchaffen wollen, ohne die Theile deſſelben ſchwerer zu machen, und dabey finden, daß die Lineale, ihrer Länge halber, mehrere Unterſtützungspunkte bedürfen, als ſie hier haben: ſo kann er dergleichen bewegliche Unterſtützungen bekommen, wenn er Zapfen mit Rollen machen läßt, wie Fig. 978, mit dem Unterſchiede, daß die Scheiben ec und gb in demſelben entbehrlich ſind. Auch kann man das Löthen in den Zwingen erſparen, wenn man den Theil im des Zapfens etwas kleiner macht, als den untern Theil, ſo, daß die Zwinge in m auf einem kleinen Abſatze ruhe. Aber der untere Theil von m bis gb darf für das Centrallineal nicht größer ſeyn, als 4 m, ſonſt könnte dieſes Lineal nicht ganz an das große Lineal anliegen.

Für das Stiftlineal mögen dieſe Unterſtützungen, wie Fig. 979, gebraucht werden. Die Rolle kann aus hartem trocknen Holze, oder Knochen gemacht ſeyn, und 9 Linien im Durchmeſſer haben. Auch kann der Zapfen eine bloße blecherne Röhre ſeyn, die in ihrem untern Theile geſpalten wird, um die Rolle zu empfangen.

Ueberhaupt muß noch bemerkt werden, daß die Lineale aus ſehr hartem Holze verfertiget, und wo möglich mit Oelfarbe übermalt werden. —

Bey der Verbindung der Theile dieſes Ellipſographen iſt nichts beſonders zu erwähnen, als daß, ehe die Theile der Lineale geleimt und befeſtigt werden, alle Theile, die Zwingen haben, vorher eingeſchoben werden ſollen, oder man müſſe ſich eine Bequemlichkeit anſchaffen, dasjenige Ende dieſes Lineals, welches keinen Mittelpunkt hat, nach Bedürfniß öhren zu können, wozu ein jeder den Kunſtgriff leicht wird angeben können. Man könnte ſich allenfalls damit begnügen, daß man die Zwinge, welche ohnehin an dieſem Ende zur Befeſtigung angebracht iſt, mobil machte, wie auch das eingeſchobene mittlere Stück Holz cbed, Fig. 976.

Dieſe letzte Gattung von Ellipſographen, welche nur durch einen größern Grad von Vollkommenheit ſich unterſcheidet, oder überhaupt den bis jetzt beſchriebenen Mechanismus wollen wir den Ellipſographen der erſten Gattung heißen,

heißen, weil er in der Baukunſt ganz allgemein brauchbar iſt. Seine Größe hindert nicht, daß man die kleinſten Ellipſen bis auf 2 Schuhe Breite damit verfertigen kann, und doch kann man Ellipſen damit beſchreiben, von 30 Schuh Länge, beſonders wenn man die kleinen Lineale länger hält, als ſie angegeben worden ſind. Ihre Länge wird keine Hinderniſſe der Conſtruction in den Weg legen, weil man ſie nach Willkühr überall auf Rollen kann laufen laſſen, wie es gezeiget worden iſt. Braucht man einen noch größern Ellipſographen, ſo kann er, mit einer verhältnißmäßigen Erhöhung aller Dimenſionen, (welches jedoch nur bey ſehr großen Inſtrumenten nöthig iſt) ſeinen Zweck vollkommen erreichen. Dem Biegen des großen Lineals kann dadurch vorgebeugt werden, daß man kleine Klötze hie und da unterlegt, welche bey dem Streifen des Stiftlineals auf einen Augenblick weggeſchoben werden können.

Will einer ein kleines Inſtrument, ſo kann er die beſchriebenen Dimenſionen für alle Theile beybehalten, die Länge der Lineale ausgenommen. Wir hielten es nicht für rathſam, den Ellipſographen, der zur Baukunſt dienen ſoll, mithin manchen Zufällen unterworfen iſt, ſchwächer zu machen, als in dieſer Beſchreibung nöthig iſt.

Nun eilen wir zum Gebrauche dieſes Inſtruments. Wir denken, daß dasjenige, was allenfalls noch in der Conſtruction unbeſtimmt geblieben wäre, bey der Arbeit von dem Künſtler ſelbſt nachgeholt werden kann.

IV. Gebrauch des Ellipſographs.

Wir ſetzen voraus, daß derjenige, der dieſen Gebrauch machen will, dieſen Ellipſographen der erſten Gattung nicht nur beſitze, ſondern auch kenne, das heißt, mit dem Nahmen aller Theile deſſelben ſich bekannt gemacht habe. Weiter ſetzen wir voraus, daß der Zapfen des Mittelpunkts und der Rollzapfen, jedes an ſeinem gehörigen Orte ſey, das heißt, in dem Loche, das an dem einen Ende dieſer Lineale für ſie gemacht iſt. Ferner muß bemerkt werden, daß dieſe Zapfen der Länge nach auf ihren zugehörigen Zapfen ſich nicht bewegen, daß das Stift-Lineal AB das unterſte iſt, wie es die Fig. 968 zeigt, daß das Central-Lineal CD über demſelben in B ruhe, aber nicht unmittelbar darauf, welches aus der Conſtruction des Rollzapfens folgt, und daß das Centrallineal ſo geſtellt werden muß, mittelſt des Zapfens des Mittelpunkts C, daß, wenn es an das große Lineal angedrückt wird, es in der Falze dieſes großen Lineals ruhe, und das Stiftlineal ganz unten, unmittelbar über dem großen Lineale, auf dem Leitzapfen A ruhe. Endlich wirkt der Punkt B des Stiftlineals nie gegen P oder A an, ſondern der Rollzapfen bleibt immer am Ende dieſes Lineals; hingegen kann dieſer Zapfen auf dem Centrallineale mit ſammt dem Stiftlineale gegen C gedrückt und befeſtiget werden. Der Bleyſtift P hingegen kann auf dem Stiftlineale überall feſt gemacht werden; zu dem gegenwärtigen Gebrauche aber iſt ſeine Stelle immer zwiſchen dem Leit- und Rollzapfen, das heißt, zwiſchen A und B. Der Leitfaden verläßt das Stiftlineal nie, muß aber immer an EF ganz genau anliegen.

Wenn eine Ellipſe ſoll gezeichnet werden, mit dem beſchriebenen Ellipſographen und dabey, wie es immer der Fall iſt, die zwey Durchmeſſer derſelben gegeben ſind: ſo hat man die Länge CB, BA, und AP zu beſtimmen, das heißt, die Länge des Central-Lineals, die Länge des Stift-Lineals, und der Entfernung des Bleyſtifts von dem Leitzapfen.

Die

Die Regeln ſind folgende:

Für wahre Ellipſen muß immer BC ſo groß ſeyn als AB, das heißt, die Länge des Centrallineals der Länge des Stift-Lineals gleich. Mithin darf man nur jene beſtimmen, ſo hat man dieſe auch.

Die Länge des Centrallineals iſt immer gleich der halben Summe der halben Axen der zu beſchreibenden Ellipſe. Oder wenn wir R die Länge CB zwiſchen dem Mittelpunkte bis zum Rollzapfen, und A die halbe große Axe, oder die halbe Länge des elliptiſchen Bogens, a die halbe kleine Axe oder die Höhe dieſes elliptiſchen Bogens annehmen, ſo iſt $= \frac{A + a}{2}$. Das nemliche gilt auch, wenn R die Länge AB des Stift-Lineals vorſtellt. Die Länge AP oder die Entfernung des Bleyſtifts von dem Leitzapfen iſt der halben kleinen Axe gleich; oder AP = a. Geſetzt man müßte, z. B. ein Gewölb zeichnen, deſſen Länge 18 Schuh wäre und die Höhe 5 Schuh, ſo iſt die halbe große Axe = 9 Schuh, und die halbe kleine = 5 Schuhe. Dieſe zwey zuſammen addirt giebt 14 Schuhe an, für die Länge R oder für die Länge des Central- und Stift-Lineals. Folglich ſetzt man den Rollzapfen B in einer Entfernung von 7 Schuhen von dem Mittelpunkte C; ebenfalls den Leitzapfen A, 7 Schuhe weit von dem Rollzapfen B. Endlich ſetzt man den Bleyſtift 5 Schuhe weit von dem Leitzapfen.

Iſt dies geſchehen und man hat alles gehörig mit den Schrauben befeſtigt, ſo befeſtigt man das große Lineal an den zugehörigen Orten; mittelſt der zwey Stellſchrauben K, die man in ihre zugehörigen Löcher, F und E, einſetzt, und dann in die Unterlage einſchraubt; und hiemit iſt die ganze Zubereitung geſchehen.

Um die Ellipſe wirklich zu beſchreiben, legt man die beyden beweglichen Lineale ans große Lineal an, ſo daß das Stift-Lineal am weiteſten von C entfernt ſey.

In dieſer Lage werden die Mittelpunkte der Zapfen C, B, P, und A in einer geraden Linie, und in dieſer Ordnung ſtehen, weil alle dieſe Theile rund ſind und gleichen Durchmeſſers.

Nun greift derjenige, der die Ellipſe beſchreiben will, das Stift-Lineal bey dem Bindfaden G an, um den Zapfen an das große Lineal anzudrücken. Mit der andern Hand aber greift er an den Leitzapfen, um dieſen von dem großen Lineale zu entfernen. Iſt die Weite zu groß, ſo kann ein zweyter es thun. So wird fortgefahren, einerſeits den Leitzapfen beſtändig anzudrücken, anderſeits den Zapfen B zirkelförmig zu bewegen um den Mittelpunkt C, wodurch der Leitzapfen A die gerade Linie AC beſchreibt. Hat man C erreicht, ſo wird CD auf EF ſenkrecht ſtehen, der Leitzapfen gerade unter dem Zapfen des Mittelpunkts, wie es die punktirten Linien in Fig. 969 anzeigen. Dann ſetzt man die Bewegung des Leitzapfens nach F fort, und die des Rollzapfens auf dem zweyten Quadranten. Iſt man endlich ſo weit gekommen, daß die Mittelzapfen C, B, P, und A auf dieſer Seite in gerader Linie an das Lineal anliegen, ſo hat der Bleyſtift die halbe Ellipſe beſchrieben.

Den Praktikern zu Liebe wollen wir noch einige Exempel ausrechnen.

Geſetzt die halbe Länge des Bogens iſt 7′, 5″; die Höhe 3′, 9″, ſo addire man dieſe zwey Längen, und man erhält 11′, 2, deren Hälfte 5′, 7″ die Länge der Central- und Stift-Lineale, oder die Entfernung von B zu C und zu A iſt. Dann nimmt man von A, 3′, 9″, ſo hat man den Ort des Bleyſtifts, und

man operirt mit dem Inſtrumente wie vorher. Geſetzt die halbe Länge des Bogens iſt 5′, 8″, 9‴ die Höhe 4′, 7″, 3‴ ſo hat man

$$\begin{array}{r|l|l} & 5', 8'', 9''' & \\ 2 & 4, 7, 3 & \\ \hline & 10, 4, \tfrac{1}{2} & 5', 2'' \end{array}$$

5′, 2″ für BC, und BA und AP iſt 4′, 7″, 3‴. —

Mittelſt der Ellipſographen, deren bewegliche Lineale durchlöchert ſind, können dieſe Operationen geſchehen, ſo lange man keine Eintheilungen unter 3 Linien braucht, wie in den vorhergehenden Exempeln, weil die drey Mittelpunkte a, a, a, Fig. 975, die Mittel verſchaffen, die drey Reihen von Löchern nach Willkühr zu benutzen. Wenn aber der Fall vorkommen ſollte, wo die Aufgabe dergleichen Eintheilungen vorausſetzte, ſo müßte ſich der Architekt zu einem gewiſſen Opfer in der Genauigkeit verſtehen, oder die geſpaltenen Lineale brauchen, weil ſie jeder Eintheilung fähig ſind.

Wenn ein Gewölbe wirklich gezeichnet werden ſoll, ſo braucht man meiſtens zwey parallele halbe Ellipſen, um die Höhe der Steine, oder die Dicke des Mauerwerks zu beſtimmen. Dieſer zweyte Bogen kann entweder ſo beſchrieben werden, als wäre noch keiner da, indem ſeine Weite und Höhe gegeben ſind; oder man kann, ohne das lange Lineal zu verrücken, mit dem Verrücken des Leitzapfens A, gegen G um ſo viel, als der neue elliptiſche Bogen höher ſeyn ſoll, und des Rollzapfens B auf dem Lineale CB nach D um eben ſo viel, den Zweck erreichen.

Geſetzt, man hätte eine Ellipſe beſchrieben, deren Länge 20 Schuhe, die Höhe 7 Schuhe betrüge, und man wollte eine beſchreiben, die dieſer parallel, und überall um 1 Schuh von dieſer entfernt wäre: ſo dürfte man nur den Leitzapfen A um 1 Schuh gegen G vorrücken, das Stift-Lineal CB auch um ſo viel verlängern, und den Bleyſtift unverrückt laſſen; ſo hätte man die ganze Zubereitung fertig, und man hätte nur zu operiren wie vorher. Wenn die äuſſere Ellipſe ſchon beſchrieben wäre, und man wollte die innere zeichnen; ſo dürfte man nur dieſe Theile kürzer machen, und zwar um ſo viel, als man ſie vorher länger gemacht hatte, und auch den Bleyſtift unverrückt laſſen.

So viel von dem Gebrauche dieſes Inſtruments, um Ellipſen, wenigſtens gleichförmige Ellipſen, zu beſchreiben. Allein dieſes Inſtrument läßt ſich noch zu andern Krümmungen brauchen, welche, obſchon ſie nicht ſo üblich ſind, dennoch manchmal geſucht werden.

Geſetzt z. B. man wollte die andere Hälfte einer Ellipſe beſchreiben, nemlich diejenige, welche auf der kleinen Axe ruhet; ſo dürfte man nur das Stift-Lineal über CD hinaus verlängern, und an dieſem Ende, das heißt jenſeits von CD, den Bleyſtift befeſtigen. Die Länge CB des Central-Lineals wird immer gefunden, wie vorher; ſie iſt die Hälfte der Summe der halben Axe; die Länge AB iſt immer der Länge CB gleich; aber die Entfernung des Bleyſtifts von dem Leitzapfen iſt hier der halben großen Axe gleich. S. Fig. 981.

Wenn das Inſtrument gut gemacht und genau eingetheilt iſt, ſo wird man innerlich und äuſſerlich die zwey Hälften einer Ellipſe beſchreiben können, deren Viertel einander vollkommen gleich ſeyn werden. Das allerſicherſte Mittel, um das Inſtrument zu berichtigen, ohne lange Unterſuchung, beſonders im kleinen.

Die Conſtruction ſolcher halben Ellipſen mag da ſeine Anwendung finden, wo man Bögen bauen will, welche höher als der halbe Zirkel ſeyn ſollen, als bey Oefen, gothiſchen Gewölben, bombenfeſten Gebäuden ꝛc. —

Allein das iſt immer nur die gemeine reguläre Ellipſe, und das nemliche Inſtrument beſchreibt auch irreguläre Ellipſen, Eyfiguren ꝛc.

Dieſe Figuren entſtehen, wenn man die Schenkel, oder die Lineale CB und AB, ungleich macht. Wir haben geſehen, daß, um reguläre Ellipſen zu beſchreiben, es unumgänglich nöthig iſt, daß dieſe zwey Lineale einander gleich ſeyn. Mithin müſſen andere Ellipſen entſtehen, wenn man ſie ungleich macht.

Macht man zum Beyſpiel das Stift-Lineal kürzer, als das Central-Lineal, wie in Fig. 983, ſo entſtehen die dort gezeichneten krummen Linien, wenn man den Bleyſtift in die Punkte P, P, P ſetzt.

Bey dieſer Gattung von krummen Linien iſt zu merken, daß, um ſie zu beſchreiben, der Punkt B, wo der Rollzapfen nie einen halben, nicht einmal einen Viertelkreis beſchreibt, weil ſonſt der Leitzapfen in A nicht mehr am langen Lineale anliegen würde, ſondern, wenn das Lineal BA die verticale Lage erhalten, oder auf dem großen Lineale ſenkrecht ſteht, der Punkt B ſich dem großen Lineale wieder nähern muß, unterdeſſen der Leitzapfen gegen den Mittelpunkt C anrückt.

Dieſe krummen Linien ſind eben ſo leicht zu beſchreiben, als die wahre Ellipſe. In Anſehung auf die Dimenſionen kommt alles auf das Stift-Lineal an. Deſſen Länge iſt gleich der Summe der halben Axen; und die Entfernung PA des Bleyſtifts von dem Leitzapfen A giebt die eine, deſſen Entfernung PB von dem Rollzapfen P giebt die andere halbe Axe, wobey zu merken iſt, daß die große Axe bald horizontal bald ſenkrecht iſt, nach der Lage des Bleyſtifts.

Wollte man alſo eine ſolche Ellipſe beſchreiben, die z. B. 12 Schuh zur halben großen Axe, und 8 zur halben kleinen Axe hat, ſo würde das Stiftlineal 20 Schuh lang ſeyn müſſen; und der Bleyſtift 8 Schuh von A oder von B entfernt ſeyn, nachdem man eine Krümmung haben wollte, wie bPb oder cPc. Wenn man den Bleyſtift gleich weit von A und B ſetzt, ſo erhält man eine Krümmung aPa, welche gleichſam die Mittelſtraße zwiſchen den zwey Arten iſt.

Allein wie beſtimmt man BC, oder die Länge des Central-Lineals? Dieſe iſt willkührlich; ſie thut nichts zu den Haupt-Dimenſionen der Krümmungen, allein von derſelben hängt der größere oder kleinere Grad von Irregularität ab. Je ungleicher die Lineale, das Central- und Stift-Lineal, (dieſes immer kürzer als jenes) ſind, deſto weniger irregulär ſind die beſchriebenen krummen Linien; hingegen wächſt die Irregularität der Linien mit der Abnahme des Unterſchiedes der Lineale. Wird aber dieſer Unterſchied gleich 0, ſo wird auch die Irregularität = 0; die Krümmung wird nemlich zur wahren Ellipſe. Im theoretiſchen Theile dieſer Abhandlung werden wir ſehen, warum dieſes ſo ſtatt haben muß, da es doch wider die gewöhnlichen Grundſätze der ab- und zunehmenden Kräfte läuft, oder zu laufen ſcheint.

Von dieſer eben beſchriebenen krummen Linie wiſſen wir keinen ſonderlichen Gebrauch anzuzeigen, als allenfalls für den Gärtner, oder im Kleinen, für Cantomben. Einſtweilen haben wir ſie kennen lernen; vielleicht kommt einſt die Zeit, wo man ſie wird benutzen können. — Verlängert man das Stift-Lineal über den Rollzapfen B, wie in Fig. 981, und ſetzt den Bleyſtift auch

 außer-

äußerlich, ſo wird ebenfalls die andere Hälfte ähnliche Krümmungen, mit der nehmlichen Leichtigkeit, beſchrieben. Für die äuſſeren krummen Linien gelten auch die Anmerkungen, die Axen betreffend, die für die innern gemacht worden ſind.

Wenn man das Stiftlineal AB länger macht, als das Central-Lineal, ſo entſtehen die eigentlichen Ovale *) oder Eyfiguren, (wenigſtens zur Hälfte), die man gleichſam anſehen kann, als beſtünde jede derſelben aus zwey Hälften ungleicher Ellipſen, die die kleine oder die große Axe gemeinſchaftlich haben, nach dem der Bleyſtift innerhalb oder auſſerhalb des Rollzapfens B ſteht. Man ſehe die Fig. 982, wo bloß innere Linien gezeichnet ſind, weil dieſe bey weitem wichtiger ſind, als die äuſſern. Die ſtumpfe Seite iſt immer gegen den Mittelpunkt C gekehrt.

*) Gewöhnlich heißt man alle in ſich kehrende krumme Linien, mit zwey Axen, und insbeſondere die wahren Ellipſen Ovale. Dieſe Benennung iſt falſch und ſollte daher ganz abgehen. Die Ovale ſind die in Fig. 982 beſchriebenen Linien.

Die Art, wie dieſe halben Ovale beſchrieben werden, iſt folgende: Man nimmt zur Länge CB des Central-Lineals die Hälfte der Länge aa, bb, cc des zu beſchreibenden Ovals, und zur Entfernung des Bleyſtifts von dem Leitzapfen etwas mehr als die halbe kleine Axe, oder die größte Höhe des Bogens.

Dieſes Etwasmehr iſt theils beſtimmt, nachdem man das Stift-Lineal beſtimmt hat, oder nicht. Denn, wenn man irgend eine Länge für die Entfernung von dem Bleyſtifte zum Leitzapfen angenommen, welche um etwas größer ſey, als die große halbe Breite des Ovals, oder die Höhe des halben Ovals, ſo kann die Länge des Stift-Lineals daraus ſo beſtimmt werden, daß das Oval die verlangte Höhe erhalte; und umgekehrt, wenn man die Länge des Stift-Lineals, oder die Weite zwiſchen dem Rollzapfen und dem Leitzapfen angenommen hat, ſo daß ſie größer ſey, als die des Central-Lineals, ſo kann daraus die Lage des Bleyſtifts, oder deſſen Entfernung von dem Leitzapfen, ſo beſtimmt werden, daß das beſchriebene Oval ſeine gehörige Höhe erhalte. Bey dieſer letztern Beſtimmung wollen wir ſtehen bleiben. Wollen wir alſo das Oval wirklich beſchreiben, da beyde halbe Axen gegeben ſind, ſo nimmt man zuerſt, wie geſagt werden iſt, die große für die Länge des Central-Lineals; dann mache man AB oder das Stift-Lineal etwas länger, und bilde die folgende Proportion: wie ſich das Central-Lineal zum Stiftlineale verhält, ſo auch die wahre Höhe des Ovals zur ſchiefen Höhe oder zur Entfernung des Bleyſtifts von dem Leitzapfen.

Geſetzt, man müſte ein Oval beſchreiben, deſſen halbe Länge $= 9$ Schuhe, deſſen größte halbe Breite oder Höhe $= 5$ Schuhe wäre, ſo iſt das Central-Lineal 9 Schuhe. Es ſey denn das Stift-Lineal 12 Schuhe, ſo hat man nach der vorigen Regel $9 : 12 = 5 : x$, wo x oder das vierte Glied welches hier $6\frac{2}{3}$ iſt, die Entfernung des Bleyſtifts von dem Leitzapfen: und allgemein, wenn a die halbe Länge, p das Stift-Lineal b die Höhe und x die geſuchte Weite vorſtellt, ſo hat man $x = \frac{bp}{a}$. Hat man alle dieſe Größen gefunden, ſo verfährt man mit dem Inſtrumente wie gewöhnlich. Diejenigen, welche ſich die Ausrechnung dieſer Proportion nicht wollen gefallen laſſen, mögen unſer Oval mit zwey Viertel-Ellipſen, deren halbe große Axen ungleich, hingegen aber die halben kleinen Axen gleich ſind, zeichnen. Allein man wird

doch

doch die nemliche Linie nicht erhalten, und man wird hierin fehlen; wie man bey der Conſtruction der gemeinen Ellipſe mit den Cirkelbögen fehlte. Daher wollten wir immer rathen das wahre halbe Oval zu zeichnen, und nicht das aus zwey Ellipſenvierteln zuſammen geſetzte, ſo oft man nicht blos eine hübſche Eyfigur haben, ſondern dieſe Krümmung wirklich benutzen will.

V. Ellipſograph der zweyten Gattung. So vortreflich und einfach daß bis jetzt beſchriebene Inſtrument iſt, ſo vielfach deſſen Anwendung iſt, ſo müſſen wir doch geſtehen, daß wir an demſelben eine größere Einfachheit immer wünſchten, um deſſen Gebrauch für den bloßen Praktiker ganz brauchbar zu machen, und wir bemühten uns, ihm dieſe Eigenſchaften zu verſchaffen. Bey dieſer Arbeit verfielen wir endlich auf das Inſtrument, welches die Fig. 984 vorſtellt. Zwar ſchränkt ſich deſſen Gebrauch auf die Beſchreibung der einfachen Ellipſe ein, und zwar auf ein Viertel derſelben, ohne das Inſtrument zu verrücken. Dagegen iſt dieſes Inſtrument einfacher, wohlfeiler, dauerhafter und noch leichter im Gebrauche, als der Ellipſograph der erſten Gattung. Auch hat dieſes Inſtrument die ſeltene Eigenheit, daß man mit demſelben einen vollkommenen Cirkel beſchreiben kann, obſchon alles von demſelben geradlinicht iſt, und keine Central-Bewegung mit demſelben gemacht werden kann.

Dieſes Inſtrument beſtehet eigentlich aus einem großen rechtwinklichten, gleichſchenklichten Dreyecke, ECD, auf deſſen rechtwinklichten Schenkeln EC, CD ein Lineal AB, mit einem Bleyſtifte P ſich bewegt. Aus dieſer Bewegung entſtehen die Viertel-Ellipſen aPb, cPd ect. nachdem der Bleyſtift näher oder weiter von der Erde ſich befindet.

Die praktiſche Conſtruction oder der Bau dieſes Ellipſographen der zweyten Art iſt ganz einfach folgender:

1. Das Dreyeck CED.

Es iſt ganz einfach aus drey großen gut abgehobelten Linealen zuſammen geſetzt, welche in C einen rechten Winkel machen. Dieſe Lineale, beſonders die zwey, die den rechten Winkel bilden, müſſen ſo ſehr rechtwinklicht verfertigt werden, als möglich, und zwar auf der obern und untern Seite, denn dieſe zwey machen eigentlich das Inſtrument aus, da die lange Seite ED blos zu ihrer Befeſtigung dienet. Die Länge von CD und CE mag von 12 bis auf 20 Schuhe betragen, nach dem Belieben eines jeden. Die Länge von DE bekommt man genau bey dem Zuſammenſetzen. Die Dicke jeder dieſer 3 Seiten iſt 2 Zoll und die Breite 2 bis 3 Zoll.

Alles an dieſem Dreyecke, wie auch das bewegliche Lineal, muß aus ſehr trockenem Holze gemacht, und, wo möglich, mit Oelfarben übermalt werden, um das Biegen der Theile zu verhüten.

Bey der Zuſammenſetzung muß man aufs pünktlichſte beſorgt ſeyn, daß der Winkel C ein rechter Winkel ſey *), welches ſich zeigt, wenn man eine lange gerade Linie auf irgend einer Ebene ausziehet, dann mittelſt des rechten Winkels ein Perpendikel CD aufrichtet, hernach aber das Inſtrument umkehrt, ſo daß deſſen Seite EC in die entgegengeſetzte Lage komme. Wenn das Lineal CD das beſchriebene Perpendikel gerade deckt, ſo iſt der Winkel gut. Wo nicht, ſo iſt er um den halben Fehler zu klein oder zu groß. Erſt nach dieſer Unterſuchung muß der Theil DE befeſtiget werden. Der größeren Bequemlichkeit halber können die Stücke des Dreyecks ſo zuſammen gefügt werden,

daß man ſie leicht auseinander legen könne, wenn das Inſtrument nicht gebraucht wird.

*) Obſchon das Inſtrument auch Ellipſen beſchreiben würde, wenn ſchon der Winkel nicht ein rechter wäre. Allein die Berechnung der Theile iſt mit einem ſchiefen Winkel ſchwerer.

2. Das bewegliche Lineal AB.

Dieſes Lineal iſt etwas länger, als eine der Seiten CD oder CE. Es beſtehet aus zwo Latten von gleicher Größe und Dicke, die ſo zuſammengeſetzt werden, daß ſie in ihrer Mitte einen Raum von 4 Linien breit übrig laſſen. Man ſehe Fig. 976 welche dieſes Lineal vorſtellt. Seine Conſtruction iſt unter dem Abſchnitte, Vervollkommnung des Ellipſographs beſchrieben. Die Eintheilung auf den zwey Seiten dieſes Lineals kann nach Willkühr gröber oder feiner gemacht werden, wenn ſie nur recht genau iſt. Die Größe des Lochs a, Fig. 976, wird weiter unten beſtimmt.

3. Der erſte Leitzapfen A.

Aus der Beſchreibung des beweglichen Lineals hat man geſehen, daß am Anfange der Eintheilung ein Loch a ſich in dieſem Lineale befinde, und zwar in der Mitte der Breite des Lineals nach. Dieſes Loch dient zum Empfange des feſten Leitzapfens A. Dieſen ſtellt Fig. 985 vor. Er beſtehet aus zwey gleich langen, aber ungleich dicken Theilen a, b. Der Theil a iſt 4 Linien dick und der Theil b, 3 Linien. Dieſer wird ins Loch a, Fig. 976 geſteckt und geleimt; mithin iſt für dieſen Zapfen dieſes Loch nur 3 Linien weit. Beſſer iſt es noch, wenn der Zapfen aus Meſſing gemacht und abgedreht wird, ſo daß der Theil b nur 2½ Linie dick ſey, und über demſelben noch ein Schraubenſtück gelaſſen werde, welches zur Befeſtigung mittelſt einer Mutter wie o, Fig. C, dienen wird.

4. Der bewegliche Leitzapfen B.

Dieſer Leitzapfen wird gerade gemacht, wie der, den die Fig. 980 vorſtellt. Er iſt in dem Abſchnitte Vervollkommnung des Ellipſographs, hinlänglich beſchrieben. Dabey iſt bloß zu merken, daß der Theil d an demſelben anſtatt ½ Zoll, ein Zoll lang ſeyn muß, und daß am Theile i nichts nöthig ſey, als das Schraubenſtück. Die dicken Theile der hervorragenden, runden, freyen vielen Linien a, Fig. 985 d, Fig. 980, werden in dieſem Ellipſographen untenzu gekehrt, weil das bewegliche Lineal AB, Fig. 984. immer auf dem Dreyecke ruhen ſoll, und der Dienſt der zwey Leitzapfen darinnen beſtehet, daß es ſich nicht anders als nach dem Winkel c bewegen könne.

5. Der Bleyſtift P.

Er iſt ganz in dem Abſchnitte, Vervollkommnung des Ellipſographen, beſchrieben. Die Fig. 979 und 974 ſtellen es vor.

VI. Gebrauch des Ellipſographen der zweyten Gattung.

Dieſer Gebrauch iſt der einfachſte, den man ſich denken kann:

Man nehme die Länge der halben kleinen Axe, und trage ſie von A nach P auf, oder zähle von A nach P die Anzahl von Schuh, Zoll und Linien, die ſie beträgt, mache den Bleyſtift in P feſt; dann zähle man von dem Bleyſtifte (nemlich von den kleinen Zeigern an demſelben) an gegen B die Schuhe, Zolle und Linien, die die halbe lange Axe ausmachen, und befeſtige in B den beweglichen Leitzapfen. Nun legt man das Lineal ſo, daß der Leitzapfen A auf dem Lineale CE anliege, der andere aber das Eck C einnehme. Dann bewegt man es ſo, daß der Zapfen B immer am Lineale CD anliege, unterdeſſen der Zapfen

A auf EC nachkommt. Iſt der Zapfen A nach C gekommen; ſo iſt die Hälfte der verlangten Ellipſe durch den Bleyſtift beſchrieben werden. Weil aber die Zapfen 4 Linien dick ſind, ſo muß man folgende Vorſicht brauchen, um in keinen Irrthum zu fallen: es ſey XY gerade Linie, auf welcher der elliptiſche Bogen beſchrieben werden ſoll; Z der Punkt, wodurch die kleine Axe oder deren Verlängerung gehen wird; das Dreyeck DCE muß ſo geſtellt werden, daß CE von XY überall um 2 Linien abſtehe, und die Seite CD ebenfalls um 2 Linien von dem Punkte Z.

Will man die andere Hälfte des elliptiſchen Bogens haben, ſo nimmt man das bewegliche Lineal ab, ſchlägt das Dreyeck um, ſo daß E nach Y komme, und ſtellt das Inſtrument wieder ſo, daß die Linie XY, und der Punkt Z überall mit zwey Linien inwendig des Dreyecks hervorragen. Dann ſtellt man das Lineal wieder auf, und operirt wie vorher. Das Dreyeck kann mittelſt drey Stellſchrauben, die man in E, D, C ſchraubt, feſtgemacht werden. Ein einziges Beyſpiel wird dieſen einfachen Gebrauch vollkommen deutlich machen:

Geſetzt, die Höhe des Bogens wäre 4 Schuh, 7 Zoll, 5 Linien, und die halbe Länge desſelben 9 Schuhe, 4 Zoll 10 Linien, ſo nimmt man vom Anfang A der Eintheilung an, 4 Schuhe 7 Zoll, 5 Linien auf dem Lineal, und am Ende dieſer Länge befeſtige man den Bleyſtift. Von dem Bleyſtifte an nehme man 9 Schuh, 4 Zoll, 10 Linien, und am Ende derſelben mache man den beweglichen Leitzapfen feſt, und verfahre dann mit dem Lineale, wie vorgeſchrieben worden.

Bey dieſem Inſtrumente ſieht man wohl, daß man die Eintheilung auf dem Lineale AB erſparen kann, wenn man ſonſt einen Maaßſtab hat, auf welchen man ſich verlaſſen kann. Denn mittelſt dieſes Maaßſtabes können die Maaße um ſo leichter aufgetragen werden, da mit demſelben gar keine arithmetiſche Operation vorgenommen werden darf. Ein Vorzug, der die Brauchbarkeit dieſes Inſtruments ungemein erhöhet.

Wenn man die zwey Theile AP, PB gleich macht, ſo beſchreibt der Bleyſtift einen vollkommenen Viertelszirkel cPc; ein praktiſcher Beweis, daß der Cirkel als eine Ellipſe angeſehen werden kann, deren Axen gleich ſind.

Macht man AP, größer als PB, ſo entſteht eine Viertel-Ellipſe fPg, deren große Axe aufrecht ſteht. Sie unterſcheidet ſich von der vorhergehenden nur durch ihre Lage, wenn man die Axen in dieſen und in jenen gleich gemacht hat.

Gleichwie wir mittelſt dieſes Inſtruments einen Cirkel mit einer geradlinigten Bewegung beſchrieben haben, (welches allerdings merkwürdig iſt), ſo können wir mittelſt des Ellipſographen der erſten Gattung, wenn man ihn wie in Fig. 981 ſtellt, eine gerade Linie mit einer cirkelförmigen Bewegung beſchreiben; und dazu darf man nur den Theil BP ſo groß machen, als AB oder AC, und in P den Bleyſtift befeſtigen. Durch die Bewegung der beyden Lineale wird die gerade Linie C entſtehen, und zwar ſenkrecht AC. Mithin kann man die gerade Linie als eine Ellipſe anſehen, deren kleine Axe unendlich klein, oder ganz und gar gleich 0 iſt.

VI. Theoretiſche Unterſuchung des Ellipſograph und des Gebrauchs deſſelben.

Erſter Satz. Die krumme Linie, die jeder Punkt P des beweglichen Lineals AP des Ellipſographen der zweyten Gattung (Fig. 984) beſchreibt, iſt eine Ellipſe, deren halbe Axen AB und BP ſind.

Be-

Beweis. Es ſey EAD der rechte Winkel, auf welchem das Lineal ED ſich bewegt, und AH = x, CH = y, EC = a, CD = b, ſo hat man vermöge der Aehnlichkeit der Dreyecke AED, HCD,

CD : HD = EC : AH oder

b : HD = a : x

$$HD = \frac{bx}{a}.$$

Aber weil H ein rechter Winkel iſt, ſo iſt auch

$$CD^2 = CH^2 + HD^2 \text{ oder}$$

$$b^2 = y^2 + \frac{b^2x^2}{a^2},$$

woraus entſtehet $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ die bekannte Gleichung zur Ellipſe, wenn die Abſciſſen vom Mittelpunkte aus genommen werden. Mithin iſt A der Mittelpunkt aller Ellipſen die durch CD beſchrieben werden; und wenn ED auf EA liegt, das heißt, wenn C in B gekommen und ſeine größte Höhe erreicht hat, ſo iſt BA = CD die eine halbe Axe; und wenn ED auf AD liegt, ſo kommt C in H; und AG = EC iſt die andere halbe Axe. QED.

Zuſatz. Setzt man den beſchreibenden Punkt C in P, wo EP = PD; ſo hat man a = b, und alſo $y^2 = a^2 - x^2$, nähmlich die Gleichung zu dem Cirkel aus dem Mittelpunkte. Mithin beſchreibt der Mittelpunkt von ED einen Cirkel.

Wenn der Winkel A auch kein rechter wäre, ſo würde nichts deſto weniger C eine Ellipſe beſchreiben.

Es ſey E′AD der Winkel; man ziehe CB mit E′A parallel, und mache AB = x, BC = y, und BC : BH = a : e, ſo hat man gleich $BH = \frac{ey}{a}$, und $HD = \frac{bx - ye}{a}$. Aber aus der Aehnlichkeit der Dreyecke BCD, AED hat man $BD = \frac{bx}{a}$. Aber wegen des rechten Winkels in H iſt.

$$BC^2 - BH^2 = CD^2 - HD^2$$

$$\text{oder } y^2 - \frac{e^2y^2}{a^2} = b^2 - \frac{b^2x^2 - 2bexy + e^2y^2}{a^2},$$

und durch Reduktion $y^2 = \frac{2be}{a^2}xy + \frac{a^2b^2 + b^2x^2}{a^2}$.

Und nach ausgezogener Wurzel

$$y = \frac{bex \pm b\sqrt{(e^2x^2 - a^2x^2 + a^4)}}{a^2}$$

Da in der Wurzelgröße der Coefficient von x^2 iſt $e^2 - a^2$, und a immer größer als e, ſo iſt $e^2 - a^2$ eine negative Größe, mithin die krumme Linie die Ellipſe.

Zweyter Satz. Die krumme Linie, die jeder Punkt P des Stift-Lineals AB des Ellipſographen der erſten Gattung (Fig. 968) beſchreibt, iſt eine Ellipſe aus dem Mittelpunkte C, deren halbe Axen CB + BP und AP ſind.

Be=

Beweis. Man verlängere das Lineal AB, Fig. 985, bis BP = AB, und ziehe die gerade Linie CZ durch C und P: ſo wird B der Mittelpunkt eines Cirkels durch A, C, P ſeyn. Mithin wird der Winkel ACP ein rechter Winkel ſeyn, und der Endpunkt P immer auf CZ liegen. Mithin iſt die Bewegung des Lineals AB die nähmliche, als wenn AB noch einmal ſo lang wäre und ſich wie das Lineal des zweyten Ellipſographen bewegte. Mithin wird die zweyte Linie dadurch beſchrieben. Und da, Fig. 986, EP = AP, ſo iſt die große halbe Axe AP + PC, und die kleine CD.

Erſte Aufgabe. Die allgemeine Gleichung für die krumme Linie finden, welche der Ellipſograph der erſten Gattung beſchreibt.

Auflöſung. In Fig. 987 ſeyn AC, AD die beweglichen Lineale, CD das unbewegliche, $AC = a$, $AD = b$, $AB = c$, $BD = d$, $CD = z$, $CE = x$, $BE = y$, und es wird ſeyn $ED = \sqrt{(d^2 - y^2)}$, und
$CD = z = x + \sqrt{(d^2 - y^2)}$.

Aus C wird auf DA ſenkrecht gefällt, und man erhält

$$CD^2 - DF^2 = AC^2 - AF^2,$$

$$\text{oder } CD^2 - AC^2 = DF^2 - AF^2$$

$$\text{oder } z^2 - a^2 = (DF + AF).\, b.$$

$$\text{Folglich iſt } DF + AF = \frac{z^2 - a^2}{b}.$$

Es iſt aber $DF - AF = b$

$$2\,DF = \frac{z^2 - a^2}{b} + b, \text{ und } 2\,AF = \frac{z^2 - a^2}{b} - b$$

$$\text{oder } DF = \frac{z^2 - a^2 + b^2}{2b} \text{ und } AF = \frac{z^2 - a^2 - b^2}{2b}$$

$$\text{Folglich } CF^2 = a^2 - \left(\frac{z^2 - a^2 - b^2}{2b}\right)^2,$$

$$\text{und } BF = \frac{z^2 - a^2 + b^2}{2b} - d.$$

Es iſt aber im Dreyecke BCF, wegen des rechten Winkels F, $BC^2 = CF^2 + BF^2$, und im Dreyecke CBE, wegen des rechten Winkels E, $CB^2 = CE^2 + EB^2$, woraus entſtehet; $CF^2 + BF^2 = CE^2 + EB^2$,

$$\text{oder } a^2 - \left(\frac{z^2 - a^2 - b^2}{2b}\right)^2 + \left(\frac{z^2 - a^2 + b^2 - 2bd}{2b}\right)^2$$

$= x^2 + y^2$, und durch Reduktion

$$\frac{-z^4 + 2a^2z^2 + 2b^2z^2 - a^4 + 2a^2b^2 - b^4}{4b^2}$$

$$\frac{+z^4 - 2a^2z^2 + 2b^2z^2 - 4bdz^2 + a^4 - 2a^3b^2}{4b^2}$$

$$\frac{+4a^2bd + b^4 - 4b^3d + 4b^2d^2}{4b^2} = x^2 + y^2;$$

$$\text{oder } \frac{4b^2z^2 - 4bdz^2 + 4a^2bd - 4b^3d + 4b^2d^2}{4b^2} = x^2 + y^2;$$

$$\text{oder } \frac{(b - d)\,z^2 + a^2d - b^2d + bd^2}{b} = x^2 + y^2.$$ Der Kürze des

Ausdrucks wegen wollen wir machen $(a^2 - b^2 + bd)\, d = p^3$ und wir erhalten $\frac{cz^2 + p^3}{b} = x^2 + y^3$ oder $cz^2 + p^3 = bx^2 + by^2$. Es iſt aber $z = x + \sqrt{(d^2 - y^2)}$; folglich $c\,((x + \sqrt{(d^2 - y^2)})^2 = bx^2 + by^2 - p^3$; oder $cx^2 + 2cx\sqrt{(d^2 - y^2)} + cd^2 - cy^2 = bx^2 + by^2 - p^3$; oder $2cx\sqrt{(d^2 - y^2)} = (b - c)\, x^2 + (b + c)\, y^2 - p^3 - cd^2$. Es ſey nun $b - c = d$, $b + c = e$, $p^3 - cd^2 = q^3$, ſo hat man, wenn man quadrirt, $4c^2x^2(d^2 - y^2) = d^2x^4 + 2dex^2y^2 + e^2y^4 - 2dq^3x^2 - 2eq^3y^2 + q^6$; oder $4c^2d^2x^2 - 4c^2x^2y^2 = e^2y^4 + 2dex^2y^2 - 2eq^3y^2 + d^2x^4 - 2dq^3x^2 + q^6$, und alſo, wenn man mit e^2 dividirt, $y^4 + \frac{2dex^2 - 2eq^3 + 4c^2x}{e^2}\, y^2 = \frac{(4c^2d^2 + 2dq^3)\, x^2 - d^2x^4 - q^6}{e^6}$

und durch Ausziehung der Wurzel $y^2 = -\frac{dex^2 - eq^3 + 2c^2x^2}{e^2}$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{d^2e^2x^4 - 2de^2q^3x^2 + 2c^2dex^4}{e^4}\right.}$$

$$\frac{+ e^2q^2 - 4c^2eq^3x^2 + 4c^4x^4 + 4c^2d^2e^2x^2}{e^4}$$

$$\left.\frac{+ 2de^2q^3x^2 - d^2e^2x^4 - e^2q^6}{e^4}\right)$$

oder $y^2 = \frac{-(2c^2 + de)\, x^2 + eq^3}{e^2}$

$$\frac{\pm\sqrt{((4c^4 + 2c^2de)\, x^4 + (4c^2d^2e^2 - 4c^2eq^3)\, x^2)}}{e^2}$$

$$= \frac{-(2c^2 + de)\, x^2 + eq^3}{e^2}$$

$$\frac{\pm\, cx\sqrt{(4c^2 + 2de)\, x^2 + (d^2e - q^3)\, 4e)}}{e^2}$$, und alſo $y = \sqrt{}$

$[-(2c^2 + de)\, x^2 + eq^3 \pm cx\sqrt{((4c^2 + 2de)\, x^2 + (d^2e - q^3)\, 4e)}]$.

Dritter Satz. Im Ovalbogen verhält ſich die Länge des Stifts-Lineals zu der Entfernung des Bleyſtifts zum Leitzapfen, wie das Central-Lineal zur Höhe des Bogens.

Beweis. Es ſey (Fig. 988) AC = CF, oder das Centrallineal = a, und in A auf NL ſenkrecht, AB = FH, oder das Stiftlineal = p, die Höhe oder DI = b, die Entfernung des Stifts von dem Leitzapfen oder DB = z. Wegen der ähnlichen Dreyecke ABC, DBI, erhält man AB: BD = AC: DI, oder p : z = a : b. Mithin auch $z = \frac{pb}{a}$, der nähmliche Werth, den wir im praktiſchen Theile angenommen haben.

Zweyte Aufgabe. Aus der Länge und Höhe, und dem Verhältniſſe der durch die größte Höhe des Ovalbogen entſtandenen Segmente der Länge des Bogens, die Größe des Stift-Lineals zu finden.

Auflöſung. Es ſey alles in Fig. 988 wie in der vorigen Aufgabe, und ziehe ED mit BK parallel, und beſchreibe den halben Kreis NA, und ſage $\frac{1}{2}$ KL

oder

oder die gegebene halbe Länge des Bogens $= AC = a$, $ID = b$, $KI = e$, $AB = x$, $BD = z$, $AE = a - b = f$, $a - e = g$: ſo hat man aus dem dritten Satze $x : z = a : b$, und $z = \frac{bx}{a}$. Nun iſt $ED = CI = e - KC$, und $KC = CN - AD = a - x + z$; mithin $ED = e - a + x - z = x - z - g$. Es iſt aber $AD^2 = AE^2 + ED^2$; oder $(x - z)^2 = (a - b)^2 + (x - z - y)^2$, nur weil $a - b = f$ und $z = \frac{bx}{a}$; $(x - \frac{bx}{a})^2 = f^2 + (x - \frac{bx}{a} - g)^2$, oder $\frac{f^2x^2}{a^2} = f^2 + [\frac{fx}{a} - g]^2$, und durch die Entwickelung $\frac{f^2x^2}{a^2} = f^2 + \frac{f^2x^2}{a^2} - \frac{2fgx}{a} + g^2$ oder $\frac{2fgx}{a} = f^2 + g^2$, und $x = \frac{(f^2 + g^2)a}{2fg}$.

So glücklich als es iſt, daß x^2 aus der Gleichung verſchwand, ſo iſt doch dieſer Werth von x nicht eben der einfachſte. Das war die Urſache, warum wir ihn im praktiſchen Theile nicht anführten. Dergleichen Werthe, die einfach in den Augen des Theoretikers ſind, werden dem Praktiker ſehr ſchwer: weil dieſer immer ſeinen Werth in Worten ausgedrückt haben will, welches hier ſehr weitläuftig ſeyn würde.

Zuſatz. Da die Irregularität des Ovals von dem Verhältniſſe der Segmenten KI, IL, der Länge des Ovals abhängt, ſo muß die eben gefundene Formel für die Länge des Stift-Lineals anzeigen in welchem Verhältniſſe dieſe Länge mit der Irregularität des Ovals ſtehe. Zu dieſem Ende wollen wir in dem Nenner, ſtatt f und g ihre Werthe ſetzen; dadurch erhält man $x = \frac{(f^2 + g^2)a}{2(a - b)(a - e)}$. Nun iſt e immer das kleine Segment, und je kleiner e, deſto größer die Irregularität. Nun aber iſt je kleiner e, deſto gröſſer der Nenner, und alſo deſto kleiner der Werth von x. Folglich, je größer das Stift-Lineal, deſto kleiner die Irregularität; ein Satz, den wir im praktiſchen Theile angeführt haben.

Dieſer Satz ſcheint anfänglich ein wenig paradox. Es ſcheint nähmlich, daß die Irregularität mit der Größe des Stift-Lineals dem Central-Lineale gleich wird. Allein eben dieſer letzte Satz iſt falſch, und die Irregularität iſt im Oval am größten, wenn die zwey Lineale gleich ſind. Denn es gehört zu der Bildung des Ovals, daß der Leitzapfen H oder B immer dieſſeits von C bleibe: da zur Bildung der Ellipſe erfordert wird, daß er abwechſelnd dieſſeits und jenſeits C gleich lang laufe. Iſt aber $AB = AC$ im Oval: ſo kommt B nicht weiter als C, der höchſte Punkt D fällt in E, und e oder das kleine Segment KI iſt $= 0$. Mithin iſt hier $AB = AC$, die Irregularität unendlich groß, und der ſcheinbare Widerſpruch verſchwindet.

Dritte Aufgabe. Den radium curvaturae einer Ellipſe für jeden Punkt derſelben finden.

Auflöſung. Durch den gegebenen Punkt M (Fig. 989) ziehe man den Diameter Mo und deſſen Conjugatus BD, nebſt den Axen Ss und LI. Es ſey K auf Mo irgend ein Punkt, durch welchen ein Cirkel gehe, der zugleich durch

die drey unendlich aneinander nahen Punkte μ M m der Ellipſe geht, und H der Durchſchnitts-Punkt der Chorde μm und des Diameters MK, ſo hat man $\mu H. Hm = MH. HK$, oder $mH^2 = MH. HK$. Nun iſt durch die allgemeine Gleichung der Kegelſchnitte $MH^2 : MH. HO = CD^2 : CM^2$; alſo $MH. HK : MH. HO = CD^2 : CM^2$, oder $HK : HO = CD^2 : CM^2$, und weil MH unendlich klein iſt, auch gegen mH, ſo hat man $HK : 2 CM = CD^2 : CM^2$. Folglich $MK = \frac{2CD^2}{CM}$. Es ſey nun MA der Durchmeſſer des Cirkels durch μMm, ſo wird der Winkel MKA$=90°$ ſeyn, und ΔMKA dem ΔMCR ähnlich; folglich hat man $MR : MC = (MK = \frac{2CD^2}{CM}) : MA$. Alſo $\frac{1}{2} MA = \frac{CD^2}{MR}$. Nun iſt aus den Eigenſchaften der conjugirten Diameter $MR = \frac{CL. CS}{CD}$; alſo $\frac{1}{2}$ MA oder der geſuchte Radius $= \frac{CD^3}{CL. CS}$. Will man anſtatt der Durchmeſſer, die Normale in dieſem Werthe haben, ſo muß man ſich erinnern, daß wenn man aus dem Focus F und aus dem Mittelpunkte ſenkrechte Linien FG und CI auf die Tangente durch M fällt, man habe $MR^2 : CS^2 = MR. MN : CD^2$, und alſo $CD^2 = \frac{CS^2. MN}{MR}$. Setzt man nun dieſen Werth im Ausdrucke des geſuchten Radius $\frac{1}{2} MA = \frac{CD^2}{MR}$, ſo erhält man $\frac{1}{2} MA = \frac{CS^2. MN}{MR^2}$.

Es iſt aber der Parameter von Ss, $p = \frac{2CL^2}{CS}$, und $\frac{1}{2} p = \frac{CL^2}{CS}$; alſo $\frac{1}{2} p. CS = CL^2 = MR. MN$, alſo $MR = \frac{p. CS}{2MN}$, und $MR^2 = \frac{p^2. CS^2}{4 MN^2}$, und durch Subſtitution $\frac{1}{2} MA = \frac{MN^6}{\frac{1}{4} p^2}$, und zwar für alle Kegelſchnitte.

Nun iſt in der Ellipſe das Quadrat der Normale, oder MN^2

$$= \frac{4a^2px - 2apx^2 + a^2p^2 - 2ap^2x + p^2x^2}{4a^2},$$

wenn a die halbe große Axe und p deren Parameter iſt. Folglich iſt der geſuchte Radius der Krümmung,

$$\frac{(4a^2px - 2apx^2 + a\ p^2 - 2ap^2x + p^2x^2)}{4a^2}$$
$$\sqrt{}\ (\frac{4a^2px - 2apx^2 - - ect.}{4a^2}) : \frac{1}{4} p^2$$
$$= \frac{(4a^2px - rapx^2 + a^2p^2 - 2ap^2x + p^2x^2)}{2a^3p}$$
$$\sqrt{}\ (4a^2px - 2apx - - ect.)$$

und

und wenn man ſetzt
$4a^2px - 2apx^2 + a^2p^2 - 2ap^2x + p^2x^2 = v,$

ſo iſt der geſuchte Radius $= \frac{v\sqrt{v}}{2a^3p^2}$.

Zuſatz. Macht man in der angeführten Formel für die Normale $x = a$, ſo erhält man $MN^2 = \frac{2a^2p}{4a^2} = \frac{ap}{2}$. Es ſey nun die halbe kleine Axe $= b$, ſo iſt $p = \frac{2b^2}{a}$, und $MN^2 = b^2$, oder $MN = b$. Folglich iſt für den höchſten Punkt der Ellipſe die Normale der halben kleinen Axe gleich. Setzt man dieſen Werth in der allgemeinen Gleichung des radius curvaturae $\frac{MN^3}{\frac{1}{4}p^2}$, ſo hat man $\frac{b^3}{\frac{1}{4}p^2}$ oder $b^3 : \frac{1}{4}\frac{4b^4}{a^2} = \frac{a^2}{b}$ für den Werth des geſuchten Radius im höchſten Punkte der Ellipſe.

Setzt man in eben dieſer Formel der Normale $x = 0$, ſo iſt $NM^2 = \frac{p^2}{4}$, und $NM = \frac{1}{2}p = \frac{b^2}{a}$. Alſo iſt die Normale im Anfangspunkte dem halben Parameter gleich. Setzt man dieſen Werth in $\frac{MN^3}{\frac{1}{4}p^2}$, ſo findet man den Radius der Krümmung $\frac{\frac{1}{8}p^3}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{1}{2}p = \frac{b^2}{a}$.

Zuſatz. Wenn man von dem Werthe $\frac{a^2}{b}$ die halbe kleine Axe abzieht, ſo hat man $\frac{a^2}{b} - b$ für den Werth der großen Axe der generirenden Linie der Ellipſe, wie wir es im Praktiſchen gemacht haben.

Was die kleine Axe derſelben anbetrifft, ſo haben wir für ſie $a - \frac{b^2}{2a}$ anſtatt $a - \frac{b^2}{a}$, das wir eben gefunden haben, genommen. Dazu liegt die Urſache in folgenden.

Vierte Aufgabe. Die Gleichung zu der krummen Linie zu finden, deren Entwickelung die Ellipſe generirt.

Auflöſung. Es ſey Fig 990 (Aaaa) die Ellipſe, die durch die Evolution von EC entſtanden iſt, BH der radius osculator für den Punkt B, BK, NH gerade Linien, die von deſſen Endpunkten auf der großen Axe AD der Entwickelten Azaa. Es ſey $NH = y$, $AN = Z$; ſo hat man wegen der Aehnlichkeit der $\Delta\Delta$; $BG : GK = NH : NG$ und $NG = \frac{GK \cdot y}{BG}$; und wegen des rechten Winkels in N, $GH^2 = NH^2 + NG^2$, oder $(BH - BG)^2 = y^2 + GK^2 \cdot NH^2$, oder $(BH - BG)^2 \cdot BG^2 = BG^2 \cdot y^2 + GK^2 \cdot NH^2$, oder $(BG^2 + GK^2)\, y^2 = (BH - BG)^2 \cdot BG^2$, folglich $y^2 = \frac{(BH - BG)^2 \cdot BG^2}{BG^2 + GK^2}$.

Da nun BH der radius osculator, BG die Normale, und GK = der Subnormale iſt, mithin alle dieſe Linien mit dem x der Ellipſe gegeben ſind: ſo bedarf es einer bloßen Subſtitution, um die Gleichung für $y^2 = NH^2$ mit dem x der entwickelten Ellipſe zu finden.

Mit der Subnormale, der Normale und GH findet man NG ohne die y der einen oder der andern krummen Linie, mithin auch die Relation zwiſchen x = AK der Ellipſe und z = AN der entwickelnden EHC ebenfalls ohne NH.

Mithin wenn dieſe Subſtitutionen alle gemacht werden, bleibt immer y^2 auf einer Seite, und erhält keine höhern Dimenſionen. Folglich iſt die entwickelnde EHC eine Ellipſe einer höhern Ordnung, wenn der Coefficient von der höchſten Potenz von z negativ iſt; und in dieſem Falle wäre es auch wahr, daß die Ellipſe von einer Ellipſe entwickelt wird, wie von der Parabel.

Zuſatz. Da nun nicht daran gedacht werden darf, dieſe krumme Linie jemals mechaniſch conſtruiren zu können: ſo mußten wir uns mit einer gemeinen Ellipſe behelfen, welche am Ende nicht ſo ſehr davon abweicht (in der Zeichnung), als es die Gleichung anzuzeigen ſcheint. Weil aber dieſe Krümmung etwas weniger concav ausfällt, als die gemeine Ellipſe gleicher Länge und Höhe: ſo haben wir die kleine Axe unſrer generirenden Ellipſe etwas gröſſer gemacht, als die der Krümmung EHC ſeyn ſollte; woraus die Formel für dieſe halbe Axe $a - \frac{b^2}{2a}$ entſtanden iſt.

Wenn man bedenkt, daß dieſe zwey krummen Linien in der Gegend HC ſichtlich in einander fallen, und daß die Radien nicht nur einer, ſondern unendlich vieler Ellipſen, die die Dicke des Gewölbes ausmachen, paſſen ſollen: ſo wird man finden, daß der Gebrauch der gemeinen Ellipſe eine vortrefliche Näherung giebt. —

Ellipſoid, iſt eine Kugel, welche aus der Bewegung einer halben Ellipſe um ihren Diameter hervorgebracht wird. Weil nun die Ellipſe zwey verſchiedene Diameter hat, einen größern und einen kleinen, ſo entſtehen dadurch zweyerley Arten von Ellipſoiden, ein länglichtes und ein dickes. Es iſt aber ein länglichtes Ellipſoid dasjenige, das entſteht, wenn ſich eine halbe Ellipſe CBA um den größern Diameter BA beweget, wodurch der Körper länger als dick wird Fig. 993; und ein dickes Ellipſoid, wenn ſich eine halbe Ellipſe CBA um den kleinen Diameter BA beweget, wodurch der Körper dicker als lang wird Fig. 992 das länglichte Ellipſoid, auch Langkugel, wird insgemein ſchlechtweg Ellipſoid, und das dicke Ellipſoid, Breitkugel, Dickkugel, wird insgemein Sphäroid genannt.

Es giebt noch eine dritte Art von Ellipſoiden welche entſtehen, wenn eine Ellipſe, durch einen ſchiefen Diameter in zwey gleiche Theile getheilt, und wenn dann ein ſolches Stück um ſeine Axe beweget wird. Dieſer Birnförmige Körper, wird ein geometriſches Herz genannt:

Inhalt der Afterkugeln.

Wenn 1 : p die Verhältniſſe des Halbmeſſers zum Umkreiſe iſt, x die Abſciſſe auf der Axe, um welche die Drehung geſchiehet, und y die Ordinate, ſo iſt der allgemeine Ausdruck für das Element des Körpers $= \frac{1}{2} py^2 dx$, worinnen man für y^2 oder dx ſubſtituiren muß. Es ſey nun die halbe große Axe = a, die halbe kleine = c, ſo iſt, wenn der Anfang der Abſciſſen vom Mittelpunkte auf der großen Axe genommen wird,

für

für die Ellipſe $a^2c^2 - c^2x^2 = a^2y^2$

$$c^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2$$

$$\tfrac{1}{2}\, pc^2 dx - \frac{pc^2x^2 dx}{2a^2} = \tfrac{1}{2} py^2\, dx$$

$$\tfrac{1}{2}\, pc^2x^2 - \frac{pc^2x^3}{6a^2} = \int \tfrac{1}{2}\, py^2 dx$$

wird alſo $x = a$, ſo iſt die halbe länglichte elliptiſche Afterkugel $= \frac{1}{2}\, pc^2a - \frac{1}{6}\, pc^2a = \frac{1}{3}\, pc^2a$, und folglich die ganze $\frac{2}{3}\, pc^2a$.

Wird der Anfang der Abſciſſen gleichfalls vom Mittelpunkte, aber auf der kleinen Axe genommen, ſo iſt die Gleichung für die Ellipſe $a^2c^2 - a^2x^2 = c^2y^2$, und man ſiehet ohne Rechnung, daß hieraus der Inhalt für die ganze platt gedrückte Afterkugel $\frac{2}{3}\, pa^2c$ wird.

Wenn man alſo $\frac{2}{3}\, pac$ mit c multiplicirt, erhält man die länglichte; wenn man es mit a multiplicirt die platt gedruckte Afterkugel. Alſo verhält ſich, die länglichte zur platt gedruckten, wie die kleine Axe c zur großen a.

Die um die länglichte umſchriebene Walze hat 2a zur Höhe, und c zum Halbmeſſer. Ihr Inhalt iſt alſo pc^2a. Alſo verhält ſich die länglichte Afterkugel zum umſchriebenen Cylinder, wie $\frac{2}{3}\, pc^2a : pc^2a = 2 : 3$. Und da ſich die Walze zum Kegel verhält wie $3 : 1$; ſo iſt die länglichte Afterkugel zum Kegel, der mit der umſchriebenen Walze einerley Höhe und Halbmeſſer hat, wie $2 : 1$.

Die um die platt gedruckte Afterkugel umſchriebene Walze hat 2c zur Höhe und a zum Halbmeſſer. Ihr Inhalt iſt alſo pa^2c, alſo verhält ſich die platt gedruckte Afterkugel zum umſchriebenen Cylinder wie $\frac{2}{3}\, pa^2c : pa^2c = 2 : 3$, und folglich auch zum Kegel, wie $2 : 1$.

Die Kugel, die die große Axe zum Durchmeſſer hat, iſt $\frac{2}{3}\, a^3p$, und die die kleine Axe zum Durchmeſſer hat $\frac{2}{3}\, c^3p$. Daher verhält ſich die

länglichte Sphäroide zur großen Kugel $= \frac{2}{3}\, pc^2a : \frac{2}{3}pa^3 = c^2 : a^2$
kleinen Kugel $= \frac{2}{3}\, pc^2a : \frac{2}{3}pc^3 = a : c$
platte Sphäroide zur großen Kugel $= \frac{2}{3}\, pa^2c : \frac{2}{3}a^3p = c : a$
kleinen Kugel $= \frac{2}{3}\, pa^2c : \frac{2}{3}pc^3 = a^2 : c^2$.

Hieraus folgen ferner folgende Verhältniſſe: weil die länglichte zur platt gedruckten Afterkugel $= c : a$ und wie $c : a$ ſo die plattgedrückte zur großen Kugel, ſo iſt die platte Afterkugel die mittlere Proportionalgröße zwiſchen der länglichten Afterkugel, und der großen Kugel.

Weil ferner die platte zur länglichten wie $a : c$, und wie $a : c$ ſo die länglichte zur kleinen Kugel: ſo iſt die länglichte die mittlere Proportionalgröße, zwiſchen der plattgedruckten Kugel und der kleinen Kugel.

Daher endlich verhält ſich die kleine Kugel zur länglichten Afterkugel, wie die länglichte zur platten; und die länglichte zur platten, wie die platte zu der großen, d. i. die länglichten und platten Afterkugeln, ſind 2 mittlere Proportionalgrößen zwiſchen der kleinen und großen Kugel.

Exempel. In Ermangelung einer richtigen Feinwage, ſoll der Werth einer aus Silber verfertigten Zitrone durch die Geometrie berechnet werden. Sie hält $2\frac{1}{4}$ Zoll in der Länge, und 2 Zoll in der Dicke, rheinländiſchen Maaßes.

Aufl.

Aufloͤſung. Da die Figur einer Zitrone den Ellipſoiden ſehr nahe, wo nicht ganz damit uͤbereinkoͤmmt, ſo muß ſie auch nach der elliptiſchen Formel berechnet werden.

Folglich $\frac{2\frac{3}{4}.\ 2^2.\ 3,14}{6}$

$= \frac{\frac{11}{4}.\ 4.\ 3,14}{6}$

$= \frac{11.\ 3,14}{6} = \frac{34,54}{6} = 5,756$ Kubikz.

Da nun ein rheinlaͤndiſcher Kubikzoll Silber 3283 Gran coͤllniſchen Gewichtes wiegt, und die Mk. Silber ungefaͤhr auf 20 fl. angeſetzt werden kann, ſo gilt die Proportion

1 Mk. : 20 fl. = 3283 Gr. : x fl.
5760 : 20 = 3283 : x
5760. x = 20. 3283
x = $\frac{65660}{5760}$ = 11 fl. $23\frac{23}{24}$ kr.

Findung der Oberflaͤchen.

Wenn alle Buchſtaben bedeuten was ſie jetzt bedeutet haben, ſo folgt aus der Gleichung $ay^2 = a^2c^2 - c^2x^2$ daß $\surd\,(dx^2 + dy^2)$ $= \frac{dx \surd\,(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}{a \surd\,(a^2 - x^2)}$, oder wenn man m^2 fuͤr $a^2 - c^2$ ſetzt, $\frac{dx \surd\,(a^4 - m^2x^2)}{a \surd\,(a^2 - x^2)}$. Unter der Vorausſetzung des Verhaͤltniſſes des Halbmeſſers zum Umkreiſe $= 1 : p$, iſt der allgemeine Ausdruck des Elements der Flaͤche $py \surd\,(dx^2 + dy^2)$, worinnen man den kaum angegebenen Werth, und den von y, naͤhmlich $\frac{c \surd\,(a^2 - x^2)}{a}$ zu ſubſtituiren hat, um das beſondere Element der Flaͤche der laͤnglichten Ellipſe zu finden. Dieſes iſt alſo

$\frac{pc \surd\,(a^2 - x^2)}{a} . \frac{dx \surd\,(a^4 - m^2x^2)}{a \surd\,(a^2 - x^2)}$

oder $\frac{pcdx \surd\,(a^4 - m^2x^2)}{a^2}$ oder $\frac{pcmdx}{a^2} \surd\,(\frac{a^4}{m^2} - x^2)$.

Ziehet man aus der Groͤße hinter dem Wurzelzeichen die Quadratwurzel wirklich aus, und multiplicirt ſie wieder in das davor ſtehende, ſo erhaͤlt man

$\frac{pcmdx}{a^2} (\frac{a^2}{m} - \frac{mx^2}{2a^2} - \frac{m^3x^4}{8a^6} - \frac{m^5x^6}{16a^{10}} - \frac{5m^7x^8}{128a^{14}}$ etc.)

$pcdx(1 - \frac{m^2x^2}{2a^4} - \frac{m^4x^4}{8a^8} - \frac{m^6x^6}{16a^{12}} - \frac{5m^8x^8}{128a^{16}}$ etc.)

und dieſes integrirt giebt,

$pcx (1 - \frac{m^2x^2}{6a^4} - \frac{m^4x^4}{40a^8} - \frac{m^6x^6}{112a^{12}} - \frac{5m^8x^9}{1152a^{16}}$ etc.)

Wird

Wird x zu a, ſo iſt die Oberfläche der halben länglichten Afterkugel

$$= pac\ (1 - \frac{m^2}{6a^2} - \frac{m^4}{40a^4} - \frac{m^5}{112a^6} - \frac{5m^8}{1152a^8}\ etc.)$$

oder wenn man vor m^2 wieder $a^2 - c^2$ ſetzt,

$$pca\ (1 - \frac{a^2 - c^2}{6a^2} - \frac{(a^2 - c^2)^2}{40a^4} - \frac{(a^2 - c^2)^3}{112a^6} \frac{5\,(a^2 - c^2)^4}{1152\,a^8} etc).$$

oder endlich $pc\ (a - \frac{a^2 - c^2}{6a} - \frac{(a^2 - c^2)^2}{40a^3} - \frac{(a^2 - c^2)^3}{112a^5}$

$- \frac{5\,(a^2 - c^2)^4}{1152a^7}$ u. ſ. w.) welches, wenn man $a = c$ ſetzt, zu pa^2 oder der Oberfläche der halben Kugel wird.

Soll ſich die Ellipſe um die kleine Axe drehen, ſo giebt auf eben dieſe Weiſe die Gleichung $a^2c^2 - a^2x^2 = c^2y^2$ die Fläche

$$= pax\ (1 - \frac{m^2x^2}{6c^4} - \frac{m^4x^4}{40c^8} - \frac{m^6x^6}{40c^8} - \frac{m^6x^6}{112c^{12}} - \frac{5m^3x^8}{1152c^{16}}\ etc).$$

Wächſt x bis es $= c$ ſo iſt die Oberfläche der halben platt gedruckten Afterkugel

$$= pac\ (1 - \frac{m^2}{6c^2} - \frac{m^4}{40c^4} - \frac{m^6}{112c^6} - \frac{5m^8}{1152c^8}\ etc.);$$

oder wenn man abermals $a^2 - c^2$ für m^2 ſubſtituirt

$$pac\ (1 - \frac{a^2 - c^2}{6c^2} - \frac{(a^2 - c^2)^2}{40c^4} - \frac{(a^2 - c^2)^3}{112c^6} - \frac{5\,(a^2 - c^2)^4}{1152\,c^6}\ etc.)$$

oder endlich

$$pa\ (c - \frac{a^2 - c^2}{6c} - \frac{(a^2 - c^2)^2}{40\,c^3} - \frac{(a^2 - c^2)^3}{112c^5} - \frac{5\,(a^2 - c^2)^4}{1152c^7}\ etc).$$

Woraus abermals die halbe Kugelfläche wird, wenn man $c = a$ ſetzt.

Ellipſoidiſche Körper (eckigte), heißen die Körper, ſo aus Lang- oder Dickkugeln entſtanden, indem man ihre Oberflächen nach allerhand Figuren ausgeſchnitten hat.

Die eckicht ellipſoidiſchen Körper ſind ſowohl in bloßen regulären als in vermiſcht regulären und ſymmetriſchen Figuren möglich. Sie haben niemals mehr als zwey Standflächen, und ſind an ihrem bauchigten Umfange ohne Mühe zu erkennen.

Eigentliche eckichte Ellipſoiden ſowohl auf einander folgende oder zuſammenhängende, als zerſtreute Arten ſind folgende. Auf einander folgende heiſſen diejenigen, welche ganze Suiten von allerhand Ecken, in Abſicht auf ihre Stand- oder Grundfläche formiren; und zerſtreuete diejenigen, welche keine Suiten formiren.

Aufeinander folgende Arten eckichter Ellipſoiden.

I. Art. 1. Leget zum Grunde welche reguläre Figur ihr wollet; umgeben ſie mit ſo vielen iſoſceliſchen Trapezien, als die Grundfläche Ecken hat, und hänget an jedes Trapezium ein gleichſeitiges Dreyeck. 2) Machet das Netz zweymal.

Auf dieſe Weiſe iſt Fig. 994 über ein reguläres Dreyeck, und Fig. 995 über ein reguläres Viereck, ein eckichtes Ellipſoid conſtruirt worden. Sollet nun

nun die Standflächen 5 oder 6eckicht ſeyn, ſo wird ein reguläres Fünf- oder Sechseck zum Grunde gelegt.

II. Art. 1) Umgebet eine zum Grunde gelegte reguläre Figur, mit ſo vielen länglichten Vierecken, als die Grundfläche Ecken hat, und hänget an jedes derſelben ein gleichſeitig Dreyeck. 2) Machet das Netz zweymal.

Auf dieſe Weiſe ſind die halben Netze zu den eckichten Ellipſoiden Fig. 996 und 997 beſchrieben worden. In dem erſten liegt ein Dreyeck, in dem letztren ein Viereck zum Grunde. Sollen die Grundflächen fünf- oder ſechseckicht ſeyn, ſo wird ein reguläres Fünf- oder Sechseck zum Grunde gelegt.

III. Art. Umgebet ein reguläres Fünfeck mit fünf gleichſeitigen Dreyecken; hänget an jedes Dreyeck, ein reguläres Viereck, an jedes Viereck wieder ein gleichſeitiges Dreyeck, und an eines dieſer Dreyecke ein gleichſeitiges reguläres Fünfeck, nach Anleitung des Netzes Fig. 998.

2. Umgebet ein reguläres Sechseck, mit ſechs gleichſeitigen Dreyecken, and hänget an jedes Dreyeck ein reguläres Viereck. Machet das Netz zweymal, ſo wird der ganze Körper beſtehen, aus 2 regulären Sechsecken, 12 gleichſeitigen Dreyecken, und 12 regulären Vierecken. Fig. 999.

IV. Art. 1. Beſchreibet Fig. 1000 ein reguläres Dreyeck CDE und hänget an ſelbiges das reguläre Viereck ABCD. Halbirt die Seiten der Figuren, ſo entſtehet das kleinere gleichſeitige Dreyeck FGH, und das kleinere Quadrat IKLG.

Das Dreyeck FGH wird Fig. 1001 die Grundfläche eines eckichten Ellipſoids. Es wird aber das gleichſeitige Dreyeck, mit drey gleichſchenklichten Dreyecken umgeben, deren Schenkel, aus der Seite des gefundenen kleinern Quadrats IKLG genommen werden. An jeden gleichſchenklichten Triangel wird ein Quadrat, an jedes Quadrat wieder ein gleichſchenklichter Triangel, und an die Grundlinie eines derſelben, ein gleichſeitiger Triangel gehänget, ſo wie dieſes Verfahren an dem Netze Fig. 1001 dargeleget worden.

2. Beſchreibet Fig. 1002 ein reguläres Sechseck ABCDEF, und hänget an ſelbiges das reguläre Viereck CDON. Halbirt die Seiten der Figuren, ſo entſtehet das kleinere reguläre Sechseck GHIKLM und das kleinere reguläre Viereck PQRS.

Das Sechseck wird Fig. 1003 die Grundfläche eines eckichten Ellipſoids. Es wird aber das Sechseck mit ſechs gleichſchenklichten Dreyecken umgeben, deren Schenkel aus der Seite des gefundenen kleinen Quadrats PQRS genommen werden. An jeden gleichſchenklichten Triangel wird ein Quadrat, von der Größe des gefundenen PQRS angehängt; an jedes Quadrat wieder ein gleichſchenklichtes Dreyeck, und an einen derſelben, ein zweytes Sechseck von der Größe des gefundenen GHIKLM geſetzet, ſo wie Fig. 1003 zeiget.

V. Art. Das erſte hierher gehörige Ellipſoid, beſtehet aus zwey regulären Sechsecken (welches die Standflächen ſind) aus 6 ſymmetriſchen Sechsecken und 6 regulären Quadraten Fig. 1004. Das Netz wird zweymal gemacht.

Das zweyte Ellipſoid beſtehet aus 2 regulären Achtecken (welches die Standflächen ſind) aus 8 ſymmetriſchen Sechsecken, 8 regulären Quadraten und 4 regulären Sechsecken Fig. 1005. Das Netz wird 2mal gemacht, nur daß die regulären Sechsecke das zweytemal auſſen gelaſſen werden.

Das dritte Ellipſoid, beſtehet aus 2 regulären Zehnecken (welche die beyden Standflächen ſind) aus 10 ſymetriſchen Sechsecken, 10 regulären Vierecken, und 10 gleichſchenklichten Trapezien, welche aus regulären Sechsecken,

deren

deren Seiten, den Seiten der andern Figuren gleich ſind, erzeugt werden, und deswegen 5 gebrochne 6 Ecke bey Zuſammenlegung der Figuren vorſtellen. Man beſchreibet nähmlich reguläre Sechsecke, ziehet eine Diagonale durch die Mitte, und kerbet ſolche auf der Pappe ein, Fig. 1006. Das Netz wird 2mal gemacht, nur daß das 2temal die zur Formirung der Trapezien dienenden Sechsecke wegbleiben.

Das vierte Ellipſoid beſtehet aus 2 regulären Zwölfecken (welche die beyden Standflächen ſind) aus 12 ſymetriſchen Sechsecken, 12 regulären Quadraten und 12 regulären Sechsecken Fig. 1007. Das Netz wird zweymal gemacht.

II. Zerſtreuete Arten eckichter Ellipſoiden.

Das erſte beſtehet aus 10 regulären Vierecken, und 8 gleichſeitigen Triangeln. Die beyden Standflächen ſind Vierecke. Fig. 1008. das Netz wird 2mal gemacht.

Das zweyte beſtehet aus 2 regulären Fünfecken, welche die Standflächen ſind, 10 regulären Vierecken und 10 gleichſeitigen Dreyecken Fig. 1009. das Netz wird zweymal gemacht.

Das dritte beſtehet aus 2 regulären Sechsecken, welche die Standflächen ſind, 6 regulären Vierecken, und 6 gleichſchenklichten Trapezien, die Trapezien werden aus der Hälfte eines regulären Sechsecks erzeuget, und das Netz wird zweymal gemacht. Fig. 1010.

Das vierte beſtehet aus 2 regulären Achtecken, welche die Grundflächen ſind, aus 16 gleichſeitigen Dreyecken, 16 regulären Vierecken, 16 regulären Fünfecken, und 16 gleichſchenklichten Dreyecken. Fig. 1011, das Netz wird zweymal gemacht, nur daß das zweyte Mal die oberſten 8 gleichſchenklichten Dreyecke wegbleiben.

Das fünfte beſtehet aus 2 regulären Zehnecken, welche die Standflächen ſind, 15 regulären Vierecken, 10 regulären Sechsecken, und 10 gleichſeitigen Dreyecken. Fig. 1012.

Ellipticität nennen einige neuere die Verhältniſſe des Unterſchiedes der großen und kleinen Axe der Ellipſe zu der einen oder der andern Axe oder den aus jenem und einer von dieſem als aus Zähler und Nenner zuſammen geſetzten Bruch, der, wenn a die große, c die kleine Axe vorſtellt, überhaupt $\frac{a-c}{a}$ oder $\frac{a-c}{c}$ iſt. Wäre a = 6, c = 5 ſo wäre die Ellipticität = $\frac{1}{6}$ oder $\frac{1}{5}$. Bliebe a = 6 und b wäre = 4, ſo wäre die Ellipticität = $\frac{2}{6}$ oder $\frac{2}{4}$. Alſo iſt die Ellipticität dafür größer, je größer dieſer Bruch, je länglichter die Ellipſe, je mehr ſie vom Kreiſe unterſchieden iſt.

Elliptiſch Hyperboliſche Fläche, ſiehe Flächen der erſten und zweyten Ordnung (35).

Elliptiſch Paraboliſcher Körper, ſiehe Flächen der erſten und zweyten Ordnung (39).

Elliptiſche Afterkugel, ſiehe Ellipſoid.

Elliptiſche Ringe, ſiehe Ringe.

Elliptiſche Monde, ſiehe Monde.

Elliptiſcher Bogen.

I. Rectification elliptiſcher und hyperboliſcher Bogen von *Nic. Landerbeck.*

Fig. 1013 ſey eine Ellipſe, deren halbe große Axe CA = a, die halbe kleine CB = b, Abſciſſe CD = x, Bogen BM = z, ſo iſt

$$Z = \frac{\int dx.\sqrt{(a^2 - \frac{(a^2-b^2)}{a^2}.x^2)}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

Ap ſey eine Hyperbel, deren halber Axis transverſus CA = a; conjugatus AF = b, Abſciſſe Cd = x, Bogen Am = Z

$$= \frac{\int dx.\sqrt{(\frac{a^2+b^2}{a^2}.x^2 - a^2)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

Nimmt man für die Ellipſe $c^2 = \frac{a^2}{a^2-b^2}$, und für die Hyperbel $c^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$, und $x = \frac{a}{v}$, ſo iſt $Z = \frac{a}{c}.\int -\frac{dv}{v^2}.\frac{\sqrt{(c^2v^2-1)}}{\sqrt{(v^2-1)}}$ ein elliptiſcher Bogen, in dem v vom Unendlichen bis an 1 abnimmt, und $Z = \frac{a}{c}.\int -\frac{dv}{v^2}.\frac{\sqrt{(1-c^2v^2)}}{\sqrt{(1^2-v^2)}}$ ein hyperboliſcher, in dem v von 1 bis 0 abnimmt.

Man nehme für die Ellipſe $r = \frac{\sqrt{(c^2v^2-1)}}{c\sqrt{(v^2-1)}}$, ſo iſt $v = \frac{\sqrt{(c^2r^2-1)}}{c\sqrt{(r^2-1)}}$.

Wenn man nun jede dieſer Gleichungen quadrirt, und mit $c^2r^2v^2$ dividirt, und nachdem differenziirt, ſo bekömmt man $-\frac{2dv}{v^3} - \frac{2dr}{r^3} = -2\frac{drv}{c^2r^3v^3}$ dieſes mit $\frac{avr}{2}$ multiplicirt und integrirt, giebt $a\int\frac{-dv}{v^2}r + a\int\frac{-dr}{-r^2}.v = \frac{a}{c^2vr} + C$; das iſt $\frac{a}{c}\int -\frac{dv}{v^2}.\frac{\sqrt{(c^2v^2-1)}}{\sqrt{(v^3-1)}} + \frac{a}{c}\int -\frac{dr}{r^2}.\frac{\sqrt{(c^2r^2-1)}}{\sqrt{(r^2-1)}} = \frac{a}{cvr} + C$ die Summe zweyer elliptiſcher Bogen, einer in v, der andere in r ausgedrückt. Weil die gefundenen elliptiſchen Bogen gleich ſind, und gleichfalls beſtändig, wenn r = v $= \frac{\sqrt{(c^2v^2-1)}}{c\sqrt{(v^2-1)}}$, das iſt, wenn $v^2 = vr = \frac{c+\sqrt{(c^2-1)}}{c}$, ſo ſey ihre Summe 2 Q, ſo kommt für die Ellipſe $C = 2Q - \frac{a}{(c^2+c\sqrt{(c^2-1)}}$, und $\frac{a}{c}.\int -\frac{dv}{v^2}.\frac{\sqrt{(c^2v^2-1)}}{\sqrt{(v^2-1)}} + \frac{a}{c}\int -\frac{dr}{r^2}.\frac{\sqrt{(c^2r^2-1)}}{\sqrt{(r^2-1)}} - 2Q$ $= \frac{a}{c^2vr} - \frac{a}{c^2+c\sqrt{(c^2-1)}}$, in algebraiſchen Ausdrücken.

Für die Hyperbel nehme man $r = \frac{\sqrt{(1-v^2)}}{\sqrt{(1-c^2v^2)}}$, ſo iſt $v = \frac{\sqrt{(1-r^2)}}{\sqrt{(1-c^2r^2)}}$, und weil $\int -\frac{dv}{v^2 r} + \int -\frac{dr}{r^2 v} = \frac{1}{vr}$, ſo drückt $\frac{a}{c}\cdot \int -\frac{dv}{v^2}\cdot\frac{\sqrt{(1-c^2v^2)}}{\sqrt{(1-v^2)}} + \frac{a}{c}\cdot\int\frac{dr}{r^2}\cdot\frac{\sqrt{(1-r^2)}}{\sqrt{(1-r^2)}} = \frac{a}{cvr} + C$ die Summe zweyer hyperboliſcher Bogen in v und r aus. Iſt $r = v = \frac{\sqrt{(1-v^2)}}{\sqrt{(1-cv^2)}}$, das iſt, wenn $v^2 = vr = \frac{1-\sqrt{(1-c^2)}}{c^2}$, ſo coincidiren die hyperboliſchen Bogen, und ſind zugleich beſtändig.

Iſt ihre Summe $= 2Q$, ſo iſt $2Q - \frac{ac}{1-\sqrt{(1-c^2)}}$, alſo $\frac{a}{c}\cdot\int\frac{-dv}{v^2}\cdot\frac{\sqrt{(1-c\,v^2)}}{\sqrt{(1-v^2)}} + \frac{a}{c}\cdot\int -\frac{dr}{r^2}\cdot\frac{\sqrt{(1-c^2r^2)}}{\sqrt{(1-r^2)}} - 2Q = \frac{a}{avr} - \frac{ac}{1-\sqrt{(1-c^2)}}$ algebraiſch.

Conſtruktion. Man nehme $CE = 1$, verzeichne eine gleichſeitige Hyperbel, deren Mittelpunkt E, die halbe Axe $= \sqrt{2a}$, und die Aſymptote OE iſt, ſo gehet ſie durch A. Man nehme $OE = v$, $EN = \sqrt{\frac{(c+\sqrt{(c^2-1)})}{c}}$; $EG = r = \frac{\sqrt{(c^2v^2-1)}}{c\sqrt{(c^2-1)}}$, und ziehe OT, NL, GK, parallel mit CA, und TMD, LRS und KPQ, parallel mit OE, ſo ſind in der Ellipſe allezeit die Bogen $BM + BP - 2PR = RP - MR = \frac{a}{c^2vr} - \frac{a}{c^2+c\sqrt{(c^2-1)}}$, was für einen Werth v, nur größer als 1, hat.

Man nehme $Eo = v$, $En = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{1-c^2})}}{c}$, $Eg = r = \frac{\sqrt{(1-v^2)}}{\sqrt{(1-c^2)}}$, und ziehe ot, nl, und gh, parallel mit CA, und tmd, lsr, und Kpq. $Am + Hp - 2Ar = rp - mr = \frac{a}{cvr} - \frac{ac}{1-\sqrt{(1-2^2)}}$ ſo lange v kleiner als 1 iſt.

Schwed. Abh. vom Jahr 1777. B. 39. S. 138.

II. Lamberts Rectification elliptiſcher Bogen.

1. Es ſey AB. Fig. 1015 die längere Axe der Ellipſe ADB, die halbe kürzere Axe ſey CD, der Brennpunkt E, eine beliebige Abſciſſe CP, ihre Ordinate PM. Man ſetze

$CA = ED = a$
$CD = b$
$CE = e$
$CP = x$, $Pp = dx$
$PM = y$, $Mn = dy$

 der

der Winkel Mmn $= \omega$
der Bogen DM $= v$

ſo iſt $y = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$

$dy = \sqrt{\frac{b x dx}{a \sqrt{(a^2 - x^2)}}}$

$dv = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$= \frac{dx}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{a^2 - x^2}\right)}$.

Und da $a^2 - b^2 = e^2$ iſt,

ſo iſt $dv = \frac{dx}{a} \sqrt{\left(\frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}\right)}$.

2. Was man nun gleich nach der Erfindung des Integralkalkuls hiebey that, iſt, daß man die Wurzelgröße $\sqrt{\left(\frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}\right)}$ in eine unendliche Reihe auflößte, und ſodann jedes Glied dieſer Reihe, mit $\frac{dx}{a}$ multiplicirt, beſonders integrirte. Um dieſes vorzunehmen, wollen wir Kürze halber, $a = 1$ und ſodann $P = \sqrt{\left(\frac{1 - e^2 x^2}{1 - x^2}\right)}$ ſetzen.

Nun iſt

$$\sqrt{(1 - e^2 x^2)} = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 x^2 - \frac{1}{2.4} e^4 x^4 - \frac{1.3}{2.4.6} e^6 x^6 - \text{etc.}$$

$$1 : \sqrt{(1 - x^2)} = 1 + \tfrac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \text{etc.}$$

Und dieſe beyden Reihen mit einander multiplicirt geben.

$$\begin{aligned} P = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 x^2 & - \frac{1}{2.4} e^4 x^4 - \frac{1.3}{2.4.6} e^6 x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} e^8 x^8 - \text{etc.} \\ + \tfrac{1}{2} x^2 & - \frac{1}{2.2} e^2 x^4 - \frac{1}{2.4.2} e^4 x^6 - \frac{1.3}{2.4.6.2} e^6 x^8 - \text{etc.} \\ & + \frac{1.3}{2.4} x^4 - \frac{1.3}{2.2.4} e^2 x^6 - \frac{1.3}{2.4.2.4} e^4 x^8 - \text{etc.} \\ & + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 - \frac{1.3.5}{2.2.4.6} e^2 x^8 - \text{etc.} \\ & + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} x^8 - \text{etc.} \end{aligned}$$

3. Bringt man nun die Brüche einer jeden Columne auf einerley Nenner, ſo findet ſich

$P = 1.$

$P = 1.$
$+ (1 - e^2) x^2 : 2$
$+ (3 - 2e^2 - e^4) x^4 : 2.\ 4.$
$+ (15 - 9e^2 - 3e^4 - 3e^6) x^6 : 2.\ 4.\ 6.$
$+ (105 - 60e^2 - 18e^4 - 12e^6 - 15e^8) x^8 : 2.\ 4.\ 6.\ 8.$
$+ (945 - 525e^2 - 150e^4 - 90e^6 - 75e^8 - 105e^{10}) x^{10} : 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.$
$+$ etc.

4. Nun laſſen ſich alle dieſe Coefficienten erſtlich durch $1 - ee = bb$ theilen, und damit erhält man den einfachern Ausdruck.

$P = 1.$
$+ b^2 y^2 : 2$
$+ (3 + e^2) b^2 x^4 : 2.\ 4$
$+ (15 + 6e^2 + 3e^4) b^2 x^6 : 2.\ 4.\ 6$
$+ (105 + 45e^2 + 27e^4 + 15e^6) b^2 x^8 : 2.\ 4.\ 6.\ 8$
$+ (945 + 420e^2 + 270e^4 + 105e^8) b^2 x^{10} : 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10$
$+$ etc.

5. Für dieſen Ausdruck ſetze man ferner

$P = 1.$
$+ \alpha.\ b^2 x^2 : 2$
$+ \beta.\ b^2 x^4 : 2.\ 4$
$+ \gamma.\ b^2 x^6 : 2.\ 4.\ 6$
$+ \delta.\ b^2 x^8 : 2.\ 4.\ 6.\ 8$
$+ \varepsilon.\ b^2 x^{10} : 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10$
$+$ etc.

ſo findet ſich

$\alpha = 1.$
$\beta = (3 + e^2).\ \alpha$
$\gamma = (5 + 3e^2).\ \beta - 8.\ 1.\ \alpha.\ e^2$
$\delta = (7 + 5e^2).\ \gamma - 8.\ 3.\ \beta.\ e^2$
$\varepsilon = (9 + 7e^2).\ \delta - 8.\ 6.\ \gamma.\ e^2$
$\zeta = (11 + 9e^2).\ \varepsilon - 8.\ 10.\ \delta.\ e^2$
$\eta = (13 + 11e^2).\ \zeta - 8.\ 15.\ \varepsilon.\ e^2$
$\theta = (15 + 13e^2).\ \eta - 8.\ 21.\ \zeta.\ e^2$
etc.

Da hier die Reihen nach den ungeraden Zahlen, und den Trigonalzahlen achtfach genommen fortgehen, ſo ſiehet man, daß wenn e in Zahlen gegeben iſt, die Werthe von α, β, γ, δ, ε etc. ſehr leicht können gefunden werden.

6. Nun iſt $dv = P.\ dx.$ Demnach

$$dv = dx \left(1 + \frac{\alpha b^2 x^2}{2} + \frac{\beta b^2 x^4}{2.\ 4} + \frac{\gamma b^2 x^6}{2.\ 4.\ 6} + \text{etc.}\right.$$

welches

$$v = x + \frac{\alpha b^2 x^3}{2.\ 3} + \frac{\beta b^2 x^5}{2.\ 4.\ 5} + \frac{\gamma b^2 x^7}{2.\ 4.\ 6.\ 7} + \text{etc. giebet.}$$

7. Ungeachtet nun das Geſetz des Fortganges dieſer Reihe gefunden iſt, und die Reihe ſelbſt in Zahlen, jedesmal ſehr leicht kann berechnet werden, ſo convergiren die Coefficienten dennoch ſehr langſam, und dieſes macht ihren Ge-

Gebrauch beſchwerlich. Wir werden uns demnach nach andern Methoden umzuſehen haben. Die erſte, die ſich am natürlichſten darbietet, und damit man ebenfalls nicht ſehr weit reicht, iſt folgende.

8. Man ſetze in der Formel

$$dv = dx \sqrt{\left(\frac{1 - e^2x^2}{1 - x^2}\right)}$$

ſey $x = \text{ſin}\, \varphi$

ſo ſtellet φ in der That den Cirkelbogen vor, welcher mit dem elliptiſchen Bogen DM gleiche Abſciſſe $PC = x$ und gleichen Halbmeſſer $CB = 1$ hat.

Da nun $d\varphi = \dfrac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

ſo haben wir $dv = d\varphi \sqrt{(1 - e^2\, \text{ſin}\, \varphi^2)}$,

wird dieſer Ausdruck in eine Reihe aufgelößt, ſo findet man

$$dv = d\varphi\,(1 - \tfrac{1}{2} e^2\ \text{ſ.}\,\varphi^2 - \frac{1}{2.\,4} e^4\, \text{ſ.}\,\varphi^4 - \frac{1.\,3}{2.\,4.\,6} e^6\, \text{ſ.}\,\varphi^6 - \text{etc.}$$

Nun laſſen ſich die geraden Dignitäten, der Sinus eines Winkels, durch die Coſinus des doppelten, 4, 6, 8 etc. fachen Winkels ausdrücken. Und damit haben wir

$$\left.\begin{array}{l}
d\varphi\,(1 - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} e^2 - \dfrac{1}{2.\,4}\tfrac{3}{8} e^4 - \dfrac{1.\,3}{2.4.6}\tfrac{10}{32} e^6 - \text{etc.} \\
\quad + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} e^2\, \text{coſ}\, 2\,\varphi + \dfrac{1}{2.\,4}.\tfrac{4}{8} e^4 \text{coſ} 2\varphi + \dfrac{1.\,3}{2.\,4.\,6}\tfrac{15}{32} e^6\, \text{coſ} 2\varphi + \text{etc.} \\
\quad\quad - \dfrac{1}{2.\,4}.\tfrac{1}{8} e^4 \text{coſ} 4\varphi + \dfrac{1.\,3}{2.\,4.\,6}\tfrac{6}{32} e^6\, \text{coſ} 4\varphi - \text{etc.} \\
\quad\quad\quad + \dfrac{1.\,3}{2.\,4.\,6}\tfrac{1}{32} e^6 \text{coſ}^6\, \varphi + \text{etc.}
\end{array}\right\}$$

Und da überhaupt $d\psi\ \text{coſ}\ \psi = \text{ſin}\ \psi$ iſt, ſo ergiebt ſich hieraus

$$\begin{array}{l}
v = \varphi\,(1 - \dfrac{1}{2.\,2} e^2 - \dfrac{1.\,3}{2.\,4.\,8} e^4 - \dfrac{1.\,3.\,10}{2.\,4.\,6.\,32} e^6 - \text{etc.}) \\
\quad + \text{ſ.}\ 2\ \varphi\ (\dfrac{1}{2.\,4} e^2 + \dfrac{1.\ 4}{2\ 4.\,16} e^4 + \dfrac{1.\,3.\,15}{2.\,4.\,6.\,64} e^6 + \text{etc.}) \\
\quad\quad - \text{ſ} 4\,\varphi\ (\dfrac{1.\,1}{2.\,4.\,32} e^4 + \dfrac{1.\,3.\ 6}{2.\,4.\,6.\,128} e^6 + \text{etc.}) \\
\quad\quad\quad + \text{ſ.}\ 6\,\varphi\,(\dfrac{1.\,3}{2.\,4.\,6.\ 192} e^6 + \text{etc.}) \\
\quad\quad\quad\quad + \text{etc.})
\end{array}$$

oder nach geſchehener Reduktion der Coefficienten

$$\begin{array}{l}
v = \varphi\,(1 - \tfrac{1}{4} e^2 - \dfrac{1.\,3}{4.\ 16} e^4 - \dfrac{1.\,9.\,5}{4.\,16.\,36} e^6 - \dfrac{1.\,9.\,25.\,7}{4.\,16.\,36.\,64} e^8 - \text{etc.} \\
+ \dfrac{\text{ſ}2\varphi}{4}\ (\dfrac{1}{1.\,2} e^2 + \dfrac{1.\,3}{2.\,3.\,4} e^4 + \dfrac{1.\,9.\,5}{3.\,4.\,4.\,16} e^6 + \dfrac{1.\,9.\,25.\,7}{4.\,5.\,4.\,16.\,36} e^8 + \text{etc.}
\end{array}$$

—

$$- \frac{\text{ſ}\,4\,\phi}{32}\left(\frac{1.3}{1.2.3.4}e^4 + \frac{1.9.5}{2.3.4.5.4}e^6 + \frac{1.9.25.7}{3.4.5.6.4.16}e^8 + \frac{1.9.25.49.9}{4.5.6.7.4.16.36}e^{10} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{\text{ſ}\,6\,\phi}{192}\left(\frac{1.9.5}{1.2.3.4.5.6}e^6 + \frac{1.9.25.7}{2.3.4.5.6.7.4}e^8 + \frac{1.9.25.49.9}{3.4.5.6.7.8.4.16}e^{10} + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{\text{ſ}\,8\,\phi}{1024}\left(\frac{1.9.25.7}{1.2.3.4.5.6.7.8}e^8 + \frac{1.9.25.49.9}{2.3.4.5.6.7.8.9}e^{10} + \text{etc.}\right).$$

$+$ etc.

9. In Anſehung dieſer Reihe können wir nun verſchiedenes anmerken. Man ſieht erſtlich überhaupt, daß ſie noch ziemlich geſchwinde convergirt, wenn die Eccentricität e merklich kleiner als 1 iſt. Sodann giebt ſie für jede Abſciſſe x in der That unendlich viele Werthe. Denn da wir hiebey

$$x = \text{ſin}\,\phi$$

geſetzt haben, ſo entſpricht dieſem Sinus nicht bloß der Bogen ϕ, ſondern auch der Bogen $180° - \phi$, und damit überhaupt die Bögen $360°.\,n + \phi$ und $360°.\,n + 180° - \phi$, deren Zahl unendlich iſt. Alle dieſe Werthe laſſen ſich in der gefundenen Reihe für ϕ ſetzen. Endlich wenn man $\phi = 90°$ ſetzt, ſo wird $\text{ſ}\,2\phi = \text{ſ}.\,4\,\phi = \text{ſ}\,6\,\phi$ etc. $= 0$

$$\text{und}\ \phi = \tfrac{1}{2}\pi$$

wenn man nähmlich $\pi = 3,1415926\ldots$ ſetzt. Damit wird der Quadrant der Ellipſe ſchlechthin nur.

$$V = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \frac{1.3}{4.16}e^4 - \frac{1.9.5}{4.16.36}e^6 - \text{etc.}\right)$$

Und damit zeigt dieſe mit $\frac{1}{2}\pi$ multiplicirte Reihe das Verhältniß des Umkreiſes der Ellipſen zum Umkreiſe des auf AB zu beſchreibenden Cirkels an. Da nun, wenn $e = 1$ wird, die Ellipſe ſich in die gerade Linie AB verwandelt, ſo iſt alsdann $V = 1$ demnach

$$1 = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \tfrac{1}{4} - \frac{1.3}{4.16} - \frac{1.9.5}{4.6.36} - \frac{1.9.25.7}{4.6.36.64} - \text{etc.}\right)$$

Und ſo verhält ſich die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{4} - \frac{1.3}{4.16} - \frac{1.9.5}{4.16.36} - \text{etc.}$$

zur Einheit, wie der Halbmeſſer zum Quadranten des Cirkels.

10. Wir wollen aber noch andere Reihen für die Rectification der Ellipſe aufſuchen, und zu dieſem Ende die Formel (8)

$$dv = d\phi.\sqrt{(1 - e^2\,\text{ſin}\,\phi^2)}$$

nochmals vornehmen, um für ϕ und e andere Werthe zu ſetzen. Es iſt nähmlich $\text{ſin}\,\phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\,\phi$.

Und demnach $dv = d\phi.\sqrt{(1 - \frac{1}{2}e^2.\cos 2\,\phi)}$

Man ſetze nun $\frac{1}{2}e^2 = \text{ſin}\,\lambda^2$

ſo iſt $1 - \frac{1}{2}e^2 = \cos\lambda^2$

demnach $dv = d\phi.\sqrt{(\cos\lambda^2 + \text{ſin}\,\lambda^2\ \cos 2\,\phi)}$

oder $\dfrac{2dv}{\cos\lambda} = 2d\phi.\sqrt{(1 + \text{tang}\,\lambda^2.\cos 2\,\phi)}$.

Hier iſt nun λ ſo beſchaffen, daß wenn $e = 1$ iſt, auch $\text{tang}\,\lambda = 1$ wird, und daß hingegen, wenn $e < 1$ iſt, $\text{tang}\,\lambda$ noch viel kleiner wird. Man ſetze z. E. $e = \frac{1}{2}$, ſo iſt hie $\lambda^2 = \frac{1}{8}$, $\text{coſ}\,\lambda^2 = \frac{7}{8}$, $\text{tang}\,\lambda^2 = \frac{1}{7}$. Und wenn $e = \frac{1}{10}$, ſo wird $\text{tang}\,\lambda^2 = \frac{1}{99}$ etc. Nun giebt die letzte Formel die Reihe

$$\frac{2dv}{\text{coſ}\,\lambda} = 2d\phi\,(1 + \tfrac{1}{2}\,t\lambda^2.\,\text{coſ}\,2\phi$$

$$- \frac{1}{2.\,4}\,t\lambda^4.\,\text{coſ}\,2\varphi^2\,t + \frac{1.\,3}{2.\,4.\,6}\,t\lambda^6.\,\text{coſ}\,2\varphi^3$$

$$- \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6.\,8}\,t\lambda^8.\,\text{coſ}\,2\varphi\,4\,t\ \text{etc.})$$

Und damit erhält man

$$\frac{2dv}{\text{coſ}\,\lambda} = 2d\,\phi\,(1 + \tfrac{1}{2}\,t\lambda^2.\,\text{coſ}\,2\varphi$$

$$- \frac{1}{2.\,4}\,t\lambda^4.\,\text{coſ}\,4\,\varphi + \frac{1.\,3}{2.\,4.\,6}\,t\lambda^6.\,\text{coſ}\,6\,\varphi)$$

$$- \frac{1}{2.4.2}\,t\lambda^4. \qquad + \frac{1.\,3.\,3}{2.4.6.4}\,t\lambda^6.\,\text{coſ}\,2\,\phi)$$

welches nach allen Reductionen

$$\frac{v}{\text{coſ}\,\lambda} = \phi\,(1 - \frac{1}{4.\,4}\,t\,\lambda^4 - \frac{3.}{4.4.8.8}\,t\,\lambda^8 - \frac{3.\,5.\,7.\,9}{4.4.8.8.12.12}\,t\lambda^{12} - \text{etc.})$$

$$+ \text{ſ}\,2\phi\,(\tfrac{1}{4}\,t\lambda^2 + \frac{1.\,3}{4.\,4.\,8}\,t\lambda^6 + \frac{1.\,3.\,5.\,7}{4.4.8.8.12}\,t\lambda^{10} + \text{etc.})$$

$$- \tfrac{1}{2}\,\text{ſ}\,4\varphi\,(\frac{1}{4.\,8}\,t\lambda^4 + \frac{3.\,5}{4.4.8.12}\,t\lambda^8 + \frac{3.\,5.\,7.\,9}{4.4.8.8.12.16}\,t\lambda^{12} + \text{etc.})$$

$$+ \tfrac{1}{3}\,\text{ſ}\,6\varphi\,(\frac{1.\,3}{4.8.12}\,t\lambda^6 + \frac{1.\,3.\,5.\,7}{4.4.8.12.16}\,t\lambda^{10} + \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9.\,11}{4.\,4.\,8.\,8.\,12.\,16.\,20}\,t\lambda^{14} + \text{ect.})$$

$$- \tfrac{1}{4}\,\text{ſ}\,8\varphi\,(\frac{1.\,3.\,5}{4.\,8.\,12.\,16}\,t\lambda^8 + \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9}{4.\,4.\,8.\,12.\,16.\,20}\,t\lambda^{12} + \text{etc.})$$

$$+ \text{etc.}$$

giebt. Ueber dieſe Reihe laſſen ſich, wie über die vorhergehende (8) ganz ähnliche Anmerkungen machen. Sie giebt für jede Abſciſſe $x = \text{ſin}\,\varphi$ unendlich viele Werthe von v, und wenn $x = \text{ſin}\,\phi = 1$ wird, ſo bleibt für den ganzen Quadranten der Ellipſe die ganz einfache Reihe

$$v = \tfrac{1}{2}\,\pi.\,\text{coſ}\,\lambda\,(1 - \frac{1}{4.\,4}\,t\lambda^4 - \frac{3.\,5}{4.4.8.8}\,t\lambda^8 + \text{etc.})$$

11. Es geſchieht übrigens nicht immer, daß man den Bogen $MD = v$, durch die Abſciſſe $CP = x = \text{ſin}\,\varphi$ finden will, und beſonders kam bey Beſtimmung der Figur der Erde und der Länge eines jeden Grades des Mittagskreiſes die Frage vor, daß man jeden Bogen $DM = v$ unmittelbar durch den Winkel $Mmn = \omega$ beſtimmen ſollte, weil, wenn DC die halbe Axe der Erde vorſtellt, der Winkel $Mmn = \omega$ dem Abſtande eines jeden Ortes vom Pol, demnach der Aequatorshöhe oder der Ergänzung der Pol-Höhe zu 90 Graden gleich iſt. Nun iſt vermöge der Natur der Ellipſe

tang

$\text{tang}\,\omega = b.\ \text{tang}\,\varphi$

Demnach $x = \text{ſin}\,\varphi = \dfrac{\text{tang}\,\omega}{\sqrt{(bb + \text{tang}\,\omega^2)}}.$

Und ſo kann für jede Aequatorshöhe ω die Abſciſſe $x = \text{ſin}\,\varphi$ leicht gefunden, und die Länge des Bogens DM $= v$ berechnet werden. Wir wollen aber ſehen, wie ſich v unmittelbar durch ω finden läßt.

12. Hier haben wir nun

$$y = b\sqrt{(1 - xx)}$$

$$-dy = bxdx : \sqrt{(1 - xx)}$$

$$\text{tang}\,\omega^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{b^2x^2}{1 - xx}$$

$$x = \frac{\text{ſin}\,\omega}{\sqrt{(1 - e^2\ \text{coſ}\,\omega^2)}}$$

$$dx = \frac{(1 - e^2).\ d\,\text{ſin}\,\omega}{(1 - e^2.\ \text{coſ}\,\omega^2)\,3:2}$$

$$dv = dx.\ \text{ſec}\,\omega = \frac{bb.\ d\omega}{(1 - e^2\,\text{coſ}\,\omega^2)\,3:2}$$

$$\text{oder}\ dv = \frac{bb.\ d\omega}{(1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}e^2.\ \text{coſ}\,2\omega)\,3:2}$$

welches, wenn $\tfrac{1}{2}e^2 = \text{ſin}\,\lambda^2$ geſetzt wird

$$dv = \frac{bb}{\text{coſ}\,\lambda^3}.\ \frac{d\omega}{(1 - \text{tang}\,\lambda^2.\ \text{coſ}\,2\omega)\,3:2}$$

und damit die Reihe

$$\frac{2005\lambda^3}{bb}.\ dv = 2d\omega\,(1 + \tfrac{3}{2}\,t\lambda^2.\ \text{coſ}\,2\,\omega + \frac{3.\,5}{2.\,4}\,t\lambda^4.\ \text{coſ}\,2\omega^2 + \text{etc.})$$

giebt, welche nach behörigen Reduktionen ſich in

$$\frac{v}{\text{coſ}\,\lambda} = \omega\,(1 - \frac{1}{4.\,4}\,\text{tang}\,\lambda^4 - \frac{1.\,3.\,5}{4.\,4.\,8.\,8}\,t\lambda^8 - \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9}{4.\,4.\,8.\,8.\,12.\,12}\,t\lambda^{12} - \text{etc.})$$

$$+ \text{ſ}\,2\,\omega\,(\frac{1.\,3}{4}\,t\lambda^2 + \frac{1.\,3.\,3}{4.\,4.\,8}\,t\lambda^6 + \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,3}{4.\,4.\,8.\,8.\,12}\,t\lambda^{10} + \text{etc.})$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\text{ſ}\,4\,\omega\,(\frac{3.\,5}{4.\,8}\,t\lambda^4 + \frac{3.\,5.\,3.\,5}{4.\,4.\,8.\,12}\,t\lambda^8 + \frac{3.\,5.\,7.\,9.\,3.\,5}{4.\,4.\,8.\,8.\,12.\,16.\,20}\,t\lambda^{12} + \text{etc.})$$

$$+ \tfrac{1}{3}\,\text{ſ}\,6\,\omega\,(\frac{3.\,5.\,7}{4.\,8.\,12}\,t\lambda^6 + \frac{3.\,5.\,7.\,9.\,5.\,7}{4.\,4.\,8.\,12.\,16}\,t\lambda^{10} + \frac{3.\,5.\,7.\,9.\,11.\,13:\,5.\,7}{4.\,4.\,8.\,8.\,12.\,16.\,20}\,t\lambda^{14} + \text{etc.})$$

$$+ \tfrac{1}{4}\,\text{ſ}\,8\,\omega\,(\frac{3.\,5.\,7.\,9}{4.\,8.\,12.\,16}\,t\lambda^8 + \frac{3.\,5.\,7.\,9.\,11.\,13.\,7.\,9.}{4.\,4.\,8.\,12.\,16.\,20}\,t\lambda^{12} + \text{etc.})$$

$$+ \tfrac{1}{5}\,\text{ſ}\,10\,\omega\,(\frac{3.\,5.\,7.\,9.\,11}{4.\,8.\,12.\,16.\,20}\,t\lambda^{10} + \text{etc.})$$

$$+ \text{etc.})$$

verwandelt. Auch dieſe Reihe giebt für jeden $\text{ſin}\ \omega$ unendlich viele Werthe von v, und für den ganzen Quadranten wird ſchlechthin

$$V = \frac{1}{2}\pi . \operatorname{cof}\lambda\left(1 - \frac{1}{4.\ 4}\ t\,\lambda^4 - \frac{1.\ 3.\ 5}{4.\ 4.\ 4.\ 8}\ t\,\lambda^8 - \text{etc.}\right)$$

13. Um hiervon eine Anwendung auf die Mittagskreiſe der Erde zu machen, ſo werden wir uns am wenigſten irren, wenn wir mit Newton

$$AC : CD = 230 : 229$$

ſetzen. Denn das Mittel aus allen Ausmeſſungen ſtimmt mit dieſem Verhältniſſe ganz ordentlich überein, und dieſes Mittel iſt vielfach zuverläſſiger, als man aus einzelnen Ausmeſſungen geſchloſſen.

Es iſt demnach.

$$AC = DE = 1$$

$$CD = \frac{229}{230} = 0,9956523 = b$$

$$CD^2 = \frac{52441}{52900} = 0,99132325 = b^2$$

$$CE^2 = \frac{459}{52900} = 0,00867675 = e^2$$

$$CE = 0,0931490 = e$$

$$\tfrac{1}{2}e^2 = \frac{459}{105800} = \operatorname{fin}\lambda^2 = 0,00433837$$

$$1 - \tfrac{1}{2}e^2 = \frac{105341}{105800} = \operatorname{fin}\lambda^2 = 0,99566163$$

$$\operatorname{tang}\lambda^2 = \frac{249}{105341} = 0,00435728$$

$$\operatorname{tang}\lambda^4 \text{ — — } = 0,00001899$$

$$\operatorname{tang}\lambda^6 \text{ — — } = 0,00000008$$

$$\operatorname{cof}\lambda \text{ — — } = 0,9983002.$$

Demnach, wenn man dieſe Werthe in der Formel des (12) ſetzt,

$$\frac{V}{0,9983002} = 0,99999881.\,\omega + 0,00326796 \operatorname{fin} 2\omega + 0,00000445 \operatorname{fin} 4\omega + 0,00000001 \operatorname{fin} 6\omega$$

oder $V = 0,9982991.\ \omega + 0,0032624.\ \operatorname{fin} 2\omega + 0,0000044.\ \operatorname{fin} 4\omega.$

Dieſes iſt demnach der Ausdruck für die Länge eines jeden Bogens DM vom Pol an gerechnet in Decimaltheilen des Halbmeſſers des Aequators A.C. Wollen wir uns auch hier an das Mittel aus allen Ausmeſſungen halten, ſo werden wir AC = 3277123 franzöſiſche ſechsfüßige Klaftern ſetzen können. Mit dieſer Zahl werden demnach vorſtehende Decimalzahlen multiplicirt, und ſo haben wir die Länge eines jeden Bogens in Klaftern

$$V = 3271549.\ \omega + 10691.\ \operatorname{fin} 2\omega + 14.\ \operatorname{fin} 4\omega$$

Hier

Hier iſt nun der erſte Coefficient der Halbmeſſer eines Cirkels, deſſen Umkreis dem Mittagskreiſe der Erde gleich iſt, und beym Nachrechnen findet ſich, daß ein Grad dieſes Cirkels eine Länge von 57099 Klaftern hat. Die beyden andern Glieder zeigen an, wie die Grade des Mittagskreiſes ungleich werden. Man ſieht auch leicht, daß, wenn man die Bögen v für jede Grade berechnen will, man das zweyte Glied nur bis auf $\omega = 45°$ und das dritte nur bis auf $22\frac{1}{2}°$ zu berechnen hat, um die Werthe auch für mehrere Grade zu haben. Ich habe hiezu den Abacus ſinum gebraucht, und damit beyliegende Tafel berechnet, welche in der erſten Columne die Grade der Aequatorshöhe, in der zweyten die Länge der Bogen v = DM, in der dritten die Länge jeder Grade, und, in der vierten die Polhöhen enthält. Das Verhältniß des erſten Grades zum letzten iſt ſehr genau wie 77 zu 76 oder wenn man dieſe Zahlen dreyfach nimmt, wie 231 zu 228, und eben ſo genau findet ſich

$$\sqrt[3]{231} : \sqrt[3]{228} = 230 : 229$$

das Verhältniß des Diameters des Aequators zur Axe. Ein Grad auf dem Aequator hat 57 197 Klafter, und iſt demnach mit dem 52. Grad der Breite von gleicher Größe

Elev. Aeq.	Diſtantia a polo.	Longit. grad.	Elev. Poli.	Elev. Aeq.	Diſtantia a polo.	Longit. grad.	Elev. Poli.	Elev. Aeq.	Diſtantia a polo.	Longit. grad.	Elev. Poli.
0	0	——	90	30	1722250	——	60	60	3435205	——	30
1	57473	57473	89	31	1779530	57280	59	61	3492111	56906	29
2	114946	57473	88	32	1836798	57268	58	62	3549007	56896	28
3	172418	57472	87	33	1894055	57257	57	63	3605892	56885	27
4	229889	57471	86	34	1951299	57244	56	64	3662766	56874	26
5	287358	57469	85	35	2008531	27232	55	65	3719630	56864	25
6	344824	57466	84	36	2065751	57220	54	66	3776485	56855	24
7	402288	57464	83	37	2122959	57208	53	67	3833329	56844	23
8	459749	57461	82	38	2180154	57195	52	68	3890165	56836	22
9	517206	57457	81	39	2237336	57182	51	69	3946991	56826	21
10	574659	57453	80	40	2294506	57170	50	70	4003809	56818	20
11	632107	47448	79	41	2351662	57156	49	71	4060619	56810	19
12	689551	57444	78	42	2408806	57144	48	72	4117420	56811	18
13	746989	57438	77	43	2465937	57131	47	73	4174214	56794	17
14	804421	57432	76	44	2523055	57118	46	74	4231001	56787	16
15	861847	57426	75	45	2580260	57105	45	75	4287781	56780	15
16	919267	57420	74	46	2637251	57091	44	76	4344554	56773	14
17	976680	57413	73	47	2694330	57079	43	77	4401321	56767	13
18	1034085	57405	72	48	2751396	57066	42	78	4458083	56762	12
19	1091483	57398	71	49	2808449	57053	41	79	4514840	56757	11
20	1148872	57389	70	50	2865489	57040	40	80	4571592	56752	10
21	1206253	37381	69	51	2922516	57027	39	81	4628339	56747	9
22	1263626	57373	68	52	2979531	57015	38	82	4685082	56743	8
23	1320989	57363	67	53	3036533	57002	37	83	4741822	56740	7
24	1308343	57354	66	54	3093522	56989	36	84	4798558	56736	6
25	1435687	57344	65	55	3150499	56977	35	85	4855292	56734	5
26	1493021	57334	64	56	3297464	56965	34	86	4912024	56732	4
27	1550344	57323	63	57	3264417	56953	33	8	4968754	56730	3
28	1607657	57313	62	58	3321358	56941	32	88	5025482	56728	2
29	1664959	57302	61	59	3378287	56929	31	89	5082210	56728	1
30	1722250	57291	60	60	3435205	56918	30	90	5138937	56727	0

14. Um aber wiederum zur Rektification der Ellipſe zurück zu kehren, ſo finden wir ebenfalls die Formel

$$dv = \frac{dy}{b} \sqrt{\left(\frac{b^4 + e^2 y^2}{b^2 - y^2}\right)}$$

Man ſetze hier $b = 1$

$$y = \text{ſin}\ \psi$$

ſo iſt $\frac{1}{2} e^2 = \text{tang}\ x^2$

$$dv = d\psi \sqrt{(1 + \tfrac{1}{2} e^2 - \tfrac{1}{2} e^2 \cos 2\psi)}$$

$$= d\psi \sqrt{(\sec x^2 - \text{tang}\ x^2 \cos 2\psi)}$$

demnach $dv.\ \cos x = d\psi.\ \sqrt{(1 - \text{ſin}\ x^2.\ \cos 2\psi)}$

welches nach allen Reduktionen $v.\ \cos x =$

$$\psi \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 4} \text{ſ}.\ x^4 - \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8} \text{ſ}.\ x^8 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12} \text{ſ}.\ x^{12}\ \text{etc.}\right)$$

$$- \text{ſ}.\ 2\psi \left(\tfrac{1}{4} \text{ſ}.\ x^2 + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 8} \text{ſ}.\ x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12} \text{ſ}.\ x^{10} + \text{etc.}\right)$$

$- \frac{1}{2}$

$$-\tfrac{1}{2}\text{ſ}.4\psi\left(\frac{1}{4\cdot 8}\,\text{ſ}.\,x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 12}\,\text{ſ}.\,x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8\cdot 12\cdot 16}\,\text{ſ}.\,x^{12} + \text{etc.}\right)$$

$$-\tfrac{1}{3}\text{ſ}.6\psi\left(\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 12}\,\text{ſ}.\,x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}\,\text{ſ}.\,x^{10} + \text{etc.}\right)$$

$$-\tfrac{1}{4}\text{ſ}.8\psi\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}\,\text{ſ}.\,x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20}\,\text{ſ}.\,x^{12} + \text{etc.}\right)$$

$$-\tfrac{1}{5}\text{ſ}.10\psi\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20}\,\text{ſ}.\,x^{10}\ \text{etc.}\right)$$

$$-\ \text{etc.}$$

giebt. Dieſe Formel hat mit der vom (10) einerley Coefficienten. Sie iſt aber in Abſicht auf die Werthe von e etwas ſtärker convergirend, weil, wenn $e = 1$; $\sin x = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ iſt.

Lamberts Beyträge. 3. Theil. S. 35 folg.

Elliptiſches Cirkelinſtrument, ſiehe Ellipſograph.

Ellipſoides, ſiehe Ellipſen von höhern Geſchlechte; auch Flächen der erſten und zweyten Ordnung (32).

Endpunkt (Markſch.) ſiehe abgegebene Punkt.

Endliche Auflöſungskunſt, ſiehe Analyſis finitorum.

Endliche Reihe, ſiehe Reihe.

Endliche Unterſchiede, ſiehe Differentiae finitae.

Engliſche Meßkette, ſiehe Guntersketle.

Engliſcher Quadrant, ſiehe Quadrant.

Engliſches Längenmaaß, ſiehe Längenmaaß.

Engymeter. Dieſes iſt ein Werkzeug, wodurch man die Entfernung zweyer Dinge von einander, die nicht über eine Viertelmeile von dem Ort, wo man ſtehet, entfernt ſind, beſtimmen kann. S. Diſtanzenmeſſer.

Enneakontagonal ein 90eck.

Enneakoſiogonal ein 900eck.

Enneadekagonal ein 19eck.

Enneagonalzahl, *Numerus enneagonus* iſt eine Polygonal-Zahl, die aus der Summirung einer arithmetiſchen Progreſſion entſteht, darin das erſte Glied 1, der Unterſchied der Glieder 7 iſt. Es ſey nähmlich die arithmetiſche Progreſſion 1. 8. 15. 22. 29. 36. 43. 50. ſo ſind die Enneagonal-Zahlen 1. 9. 24. 46. 75. 111. 154. 204. u. ſ. w. Denn $1 + 8 = 9$; $1 + 8 + 15 = 24$; $1 + 8 + 15 + 22 = 46$, u. ſ. w.

Enneagonum ein 9eck.

Enneakiſchiliagonal ein 9000eck.

Enneakismyriagonal ein 90000eck.

Entfernte Gegenſtände, ihr Gebrauch in der praktiſchen Geometrie, ſiehe Gegenſtände.

Entfernung, **Weite**, **Diſtantia**, iſt die kürzſte Linie zwiſchen zweyen Dingen. Daher iſt auf einer ebenen Fläche die Weite zweyer Punkte eine gerade Linie; denn ſie iſt die kürzſte zwiſchen denſelben. Die Entfernung eines Punkts von einer Linie oder einer Linie von einer Linie, oder auch beyder von einer Fläche, iſt die Perpendikularlinie, welche von dem gegebenen Punkte, oder von einem in der einen Linie angenommenen Punkte auf die andere Linie oder die gegebene Fläche gezogen wird. Hingegen die Weite zweyer Punkte auf der Kugel-Fläche, als z. E. zweyer Oerter auf der Erdkugel, iſt der zwiſchen ihnen

nen liegende Bogen des größten Cirkels, der durch die beyden Oerter um die Erdkugel herum beſchrieben worden, weil dieſer Bogen die kürzſte Linie iſt, die man auf einer Kugelfläche zwiſchen beyden Punkten beſchreiben kann.

Entfernungen, Behutſamkeiten ſolche zu meſſen.

I. Behutſamkeit die man anwenden muß, die Entfernungen auf der Erde zu beſtimmen, vom Herrn Caſſini von Thury. (Abh. der pariſer Akad. überſetzt von Steinwehr 11 B. S. 628). Nichts ſcheint in der Theorie einfacher und leichter zu ſeyn, als daß man auf den Boden eine Strecke durch geometriſche Arbeit mißt. Es kommt zuförderſt nur darauf an, daß man eine Grundlinie, oder die Weite zwiſchen zwey Dingen genau weiß. Denn wenn man aus den beyden Enden derſelben die Lagewinkel zwiſchen dem dritten Dinge, das man beſtimmen will, beobachtet, ſo hat man durch die leichteſte Rechnung der praktiſchen Trigonometrie, die Lage dieſes Dinges, und ſo nach und nach die Lage aller andern, die man hat meſſen wollen.

Dieſe in der Vorſtellung ſo leichte Arbeit, erfordert in der Ausübung große Behutſamkeit, wenn alles genau ſeyn ſoll. Die geringſten überſehenen Umſtände können in große Irrthümer ſtürzen, ſonderlich wenn man eine große Strecke zu meſſen hat.

Was man für Vorſicht bey Meſſung einer geraden Linie beobachten muß, wird unter der Rubrik: gerade Linie zu meſſen, gezeiget.

Nachdem man das rechte Maaß der Grundlinie feſt geſetzt, muß man auch gewiß ſeyn, die Winkel ſeyn genau: das kömmt aber nicht allein auf die Geſchicklichkeit des Beobachters, ſondern auch auf die Güte des Inſtruments an. Jener muß, nachdem er das feſte Seherohr auf ein entferntes Ding dergeſtalt gerichtet, daß es genau auf dem Durchſchnitte des horizontalen und ſenkrechten Faden ſtehet, das bewegliche Seherohr, genau auf eben daſſelbige Objekt richten. In dieſer Lage befeſtiget er es; und macht es ſo, daß das Haar auf der beweglichen Albidade genau auf den Punkt o am Anfange der Theilung falle. Oder giebet auf den Unterſchied acht, damit er in Verbeſſerung jedes Winkels darauf ſehen könne; das nennet man den Parallelismus. Dieſe Arbeit erfordert große Genauigkeit, denn auf ihr beruhet zum Theil die Genauigkeit aller beobachteten Winkel. Zu dem Ende muß man ein recht deutliches und nettes Objekt wählen, das zugleich ſo weit entfernt iſt, daß die horizontale Weite zwiſchen den beyden Seheröhren, die nicht immer genau eins über den andern liegen, nicht einen merklichen Unterſchied verurſachen. Denn eine Weite von 2 Zoll zwiſchen den Achſen dieſer, auf ein, 1000 Toiſen weit entferntes Ding gerichtete Seheröhre, macht einen Irrthum von 5 bis 6 Sekunden den man gar nicht auſſer Acht zu laſſen hat. Sodann muß man dahin ſehen, daß die beyden Dinge, deren Weite man genau meſſen will, in dem Durchſchnitte der Fäden des Seherohrs, die einander in rechten Winkeln durchkreutzen, geſetzt werden. Dieſe Dinge ſtehen oft, eins höher über dem Horizont als das andere. Deswegen muß man das Inſtrument in eine ſchiefe Lage bringen, wenn eins von dieſen Dingen z. E. in dem Mittelpunkte des einen Fernglaſes, das andere aber darunter oder darüber in dem darauf gerichteten Seherohre ſtehet. Alsdann aber iſt der zwiſchen dieſen beyden Dingen beobachte Winkel nicht der wahre, ſondern größer oder kleiner, wie man aus Fig. 1016 ſehen kann. Hier iſt AB die Weite zwiſchen dieſen Dingen, die eins in A, eins in B ſtehen, und ſie iſt kleiner, als die Weite AC, welche nach der Theilung des Quadranten gemeſſen wird. Ein gleicher Irrthum wird

ſich

ſich finden, wenn die ſenkrechten Fäden der beyden Fernröhren nicht genau parallel ſind, wie ſich denn das gar oft ſo trifft, dem hilft man dadurch ab, daß man die beyden Dinge genau in den Mittelpunkt des Seherohrs bringt.

Damit man gewiß werde, die Winkel ſeyen an einen und eben demſelben Orte genau beobachtet, pfleget man von dieſen Orte aus, die Winkel zwiſchen unterſchiedenen, rund um dem Horizonte ſtehenden Dingen zu beobachten. Man nimmt die, welche 90° ſo nahe als möglich kommen. Denn je weniger beobachteter Winkel rund um den Horizont ſind, deſto weniger Irrthum iſt in der Summe. Iſt dieſe Summe genau gleich 360°, auch bis auf einige Sekunden, ſo urtheilt man, jeder von den andern beobachteten Winkeln habe ſeine wahre Größe. Iſt der Unterſchied von etlichen Sekunden zu viel oder zu wenig, ſo vertheilt man auf jeden Winkel, eine, dem ganzen Unterſchiede proportionirliche Zahl. Dieſe Methode hat aber doch ihre Unbequemlichkeiten. Sie ſetzt zuförderſt voraus, die Theilungen der Grade des Quadranten, ſeyn einander alle gleich. Sonſt könnte man den Umfang des Horizonts genau von 360° haben, wenn auch jeder dazu gebrauchte Winkel nicht ſeine wahre Größe hatte; denn der Mangel an einem könnte durch den Ueberſchuß des andern erſetzet werden. Sodann wird dabey angenommen, der Mittelpunkt des Inſtruments habe ſich weder zur rechten noch zur linken, durch einen unvermutheten Zufall verrückt. Auf Reiſen aber, da man es auf Thürme, oder an andere ſchwer zugängliche Oerter bringen muß, begiebt ſich dieſes nur gar zu oft. Drittens wird vorausgeſetzt, die, zu Beſtimmung des Horizonts Umfanges beobachteten Dinge, ſeyn alle in einer Fläche, die durch das Auge des Beobachters gehet; hierauf aber muß man auch ſehen.

Deshalben erwäge man, daß da die Erde rund, oder doch faſt kugelförmig iſt, alle am Horizont, in einer Höhe über dem Gleichſtande der See liegenden Dinge, unter der Fläche erſcheinen müſſen, die gegen den, aus unſeren Auge nach dem Mittelpunkt der Erde gehenden Radius ſenkrecht iſt. Sie thun die Wirkung unterſchiedener, an der Grundfläche einer Pyramide oder eines Kegels liegender Dinge, auf deren Spitze der Beobachter ſtehe. Beſtände dieſe Pyramide aus vier gleichſeitigen Dreyecken, ſo würde die Summe der 4 beobachteten Winkel um den Horizont, nur von 240° anſtatt 360° ſeyn die ein Cirkel hat. Dieſes Exempel ſoll nur dazu dienen, daß man ſich von der nothwendigen Verminderung in der Summe derer um den Horizont beobachteten Winkel, auch alsdann wenn ſie über der Meeresfläche ſo hoch als der Ort, daher man ſie beobachtet, erhoben ſind, einen Begriff mache. Wenn man den Unterſchied, der nach den unterſchiedenen Weiten dieſer Dinge ſeyn muß, berechnet, ſo findet man, daß in der Weite von 30000 Toiſen 2′40″ Unterſchied in der Summe der 4 beobachteten Winkel, jeder von 90° ſeyn müſſe, und die alſo zuſammen nur 359°57′20″ machen. Es wäre alſo unrecht, wenn man in ſolchen Falle zu jeden beobachteten Winkel, wie man zu thun pfleget 40″ hinzuſetzte. Nun iſt zwar wahr, es giebt nicht viel Oerter, da man von allen Seiten Dinge in einer gleichen Weite ſehen könne. Aber es giebt doch einige wo es geſchiehet.

Dieſe Unterſchiede nehmen im Verhältniſſe der Quadratwurzeln der Weiten ab. Denn die Höhen der ſcheinbaren Gegenſtände vermindern ſich in dem Verhältniſſe der Quadratwurzeln dieſer Weiten; und die auf eine Fläche reducirten Winkel am Scheitel zweyer ſehr platten Kegel, vermindern ſich gleich-

falls in dem Verhältniſſe der Quadratwurzeln ihrer Höhen. Wenn alſo in dem Umfange des Horizonts in der Weite von 30000 Toiſen ein Unterſchied von 2′40″ iſt, ſo iſt nur immer von 16″ an eben dem Umfange des Horizonts abzurechnen, der zwiſchen Dingen beobachtet worden, die nur 15000 Toiſen, vom Orte der Beobachtung entfernt ſind. Wenn alſo die Weiten noch kleiner ſind, wie es ſo meiſtentheils zutrifft, ſo kann man ihn gar bey Seite ſetzen.

Bey dem bisher angeführten ſetzet man voraus, die gebrauchten Objekte ſeyn faſt in einer Höhe; wie, wenn auf Thürmen, die in einer Ebene lägen beobachtet wird. Auf einem hohen Berge aber iſt der Unterſchied weit größer. Wenn alle beobachteten Dinge unter dem künſtlichen Horizont 48 Minuten ſind, ſo muß man, ſie liegen in welcher Weite ſie wollen, von der Summe der vier Winkel 2′40″ abrechnen. Sind ſie 24′ darunter, ſo gehen 40″, und ſind ſie 12′ darunter, ſo gehen 10″ u. ſ. w. ab. Alſo kann eine kleinere Tiefe als 12′ nicht geachtet werden. Eben ſo iſt es an einem niedrigern Orte z. E. in einer Ebene, die mit Bergen umgeben iſt, die den Horizont auf allen Seiten einſchränken.

Man hat hier angenommen, alle Objekte ſeyn gleich hoch über, oder gleich tief unter dem Horizonte. Eben das würde ſeyn, wenn ſie alle in einer ſchiefen Ebene lägen, die weit über oder unter das Auge des Beobachters ginge. Wenn ſie aber unterſchiedlich, einige über andere unter den Horizont, wechſelweiſe geneigt ſind; ſo wird daraus eine gar unterſchiedene Wirkung entſtehen, denn alsdann wird die Summe der beobachteten Winkel 360° um eine Größe übertreffen; die man auf folgende Art beſtimmt.

Man wählet ſich eins von den Objekten, deſſen ſcheinbare Höhe der Höhe des Orts, wo man beobachtet, gleich oder wenig davon unterſchieden ſey. Man miſſet den Winkel zwiſchen dieſem Objekte, und einem andern tiefern oder höhern, und beſtimmt die Höhe des letztern. Dieſe Objekte können zwar, einige weiter als andere entfernt ſeyn, man kann ſie aber als gleichweit abliegend anſehen. Denn hier kommt es nur auf die Neigung der Geſichtsſtrahlen an, die man ſo weit als man will verlängern kann, bis ſie eine Fläche antreffen, darauf man die beobachteten Winkel reduciren muß.

Es ſey alſo Fig. 1017 A der Ort des Standes, B das Subjekt in der Fläche des Horizontes ABEF; C ſey ein anderes über der Fläche dieſes Horizontes erhabenes Objekt. Von C fälle man die ſenkrechte Linie CE auf BF, und ziehe A und F zuſammen. Im Dreyecke BAC, deſſen Winkel BAC beobachtet iſt, und deſſen Seiten AB, AC, die man für gleich annimmt, z. E. jede von 10000 Toiſen ſind, findet man den Werth der Seite BC. In dem in E rechtwinklichten Triangel AEC, deſſen Hypotenuſe AC, 10000 Toiſen iſt, und deſſen Winkel CAE die ſcheinbare Höhe des Punktes C, über dem Horizont miſſet, wird man den Werth der Seiten AE, CE; und in dem in E rechtwinklichten Triangel BEC, deſſen Hypothenuſe BC nebſt der Seite CE bekannt iſt, den Werth der Seite BE finden. Und endlich hat man in dem Triangel BAE, deſſen drey Seiten AB, AE, BE bekannt ſind, den Werth des Winkels BAE, welcher die Weite zwiſchen den beyden, auf die Fläche des Horizonts reducirten Objekten, B und C mißt.

Nimmt man an, das dritte Objekt ſey in I, auf der Fläche des Horizonts, wie, wenn in einer Ebene ein Berg iſt, darauf man ſich gerichtet; ſo wird man den Werth des Winkels AEI auf der Fläche des Horizonts finden, der auf den beobachteten Winkel CAI trifft. Mithin wird man den Werth des Winkels BAI haben, von dem wir gefunden, er müſſe kleiner ſeyn als die Sum-

me

me der Winkel BAC, CAI, und dieſes um faſt 20″, wenn die ſcheinbare Höhe des Punktes C 0° 45′ iſt, und die Winkel BAC, CAI jeder von 60° ſind. Dieſer Unterſchied iſt 1′20″, wenn die Höhe des Punktes C 1′30″ iſt, u. ſ. f. Sind aber die Objekte über oder unter dem Horizont, weniger hoch oder tief, wie es meiſtens iſt, z. E. das zweyte Objekt C iſt über dem Horizont, ein drittes D unter demſelben, ſo wird man den Winkel CAD, zwiſchen dieſen Objekten auf die Fläche des Horizonts auf folgende Art reduciren.

Aus D ziehet man DH, gegen den Horizont ſenkrecht, welche die mit BF parallele CH in H antrifft. Im Triangel CAD, deſſen Seiten CA und AD gleich und jede von 10000 Toiſen angenommen werden, hat man den Werth der Seite CD; und ſpricht: wie ſich DH als das Maaß der Höhe des Punktes C über D verhält zu CD oder HF, der Höhe des Punktes C über der horizontalen Fläche ABEF, die durch das Auge des in A ſtehenden Beobachters gehet: ſo verhält ſich CD zu CI, welches von CD abgezogen DI giebt.

In dem in E rechtwinklichten Triangel AEC, deſſen Hypothenuſe AC, nebſt dem Winkel CAE, der die Höhe des Objekts C über dem Horizont mißt, bekannt iſt, hat man den Werth von AE und CE; und in dem in E rechtwinklichten Triangel CEI, deſſen Seiten CE und CI bekannt ſind, findet man den Werth der Seite EI; gleich wie im Triangel IDF, deſſen Seiten DI und DF bekannt ſind, den Werth der Seite IF, welche zu EI hinzugeſetzt EF giebet. Endlich findet man in dem in F rechtwinklichten Triangel AFD, deſſen Seiten FD, AD bekannt ſind, den Werth der Seite AF. Und da die drey Seiten AE, EF, AF bekannt ſind, den Werth des Winkels EAF, auf der Fläche des Horizonts, der zu dem Winkel CAD gehöret, den man zwiſchen C und D beobachtet hat.

Wenn man nach dieſer Methode annimmt, das Objekt C ſey 0°45′ über dem Horizont erhoben, und D ſo viel unter denſelben vertieft, ſo wird man finden, da der Winkel CAD 60°0′0″ iſt, der Winkel EAF, auf der Fläche des Horizonts müſſe 59°58′59″, mit einem Unterſchiede von 1′1″ ſeyn, der auf dem ganzen Umfange des aus ähnlichen Winkeln zuſammen geſetzten und mit ſo geordneten Dingen wechſelweiſe beſetzten Horizonte 6′6″ betragen würde.

Wenn Fig. 1018 das 3te Ding D nicht unter, ſondern über dem Horizont, aber nicht ſo hoch als C iſt, ſo verlängert man CD bis in I, bis ſie die Fläche des Horizontes AEI in I antrifft. Da in dem Triangel CAD angenommenermaßen AC und AD, die den beobachteten Winkel CAD begreifen, gleich ſind, ſo hat man den Werth von CD, und ſpricht wie CK oder CE — DF iſt zu CE, alſo CD zu CI. Nimmt man alſo CD weg, ſo bleibet DI. Hernach beſtimmet man, wie oben, die Größe des Winkels FAI, der zu DAI gehöret, und der, von EAI abgenommen, den Winkel EAF auf der Fläche des Horizonts giebt, der zum beobachteten Winkel CAD gehöret.

Man kann um die lange Rechnung zu vermeiden, die Fläche des Triangels ABC Fig. 1019, als die Hauptſeite einer Pyramide betrachten, deren Scheitel in C iſt, und deren Höhe über der Horizontsfläche ABF, durch CE gemeſſen wird, die folglich auf der Linie AE ſenkrecht iſt. Man hat alſo im Triangel AEC dieſe Analogie: AE verhält ſich zu AC, wie der Coſinus des Winkels EAC, der die Höhe des Punktes C, über dem Horizont, vom Orte A des Standes zu ſehen, miſſet, zum ſin. tot. Wenn man hernach die Seite der Py-

Pyramide ACB auf der horizontalen Fläche ABEF ſenket, in welchem Falle ſich der Punkt CE nähert, der alsdann auf der Linie CG iſt, welche gegen AB ſenkrecht iſt, ſo hat man: AE iſt zu AC, wie der Sinus des Winkels ACG, Complement des beobachteten Winkels CAB, zwiſchen B und C, zum Sinus des Winkels AEG, Complement des Winkels BAE auf die Fläche des Horizonts reduciret. Man hat aber gefunden AE ſey zu AC wie der Sinus des Complements der ſcheinbaren Höhe des Dinges C, über dem Horizonte, zum ſinus totus; alſo hat man folgende Analogie: wie der Coſinus der ſcheinbaren Höhe eines Objekts über dem Horizonte ſich verhält zum ſin tot. alſo der Coſinus des beobachteten Winkels, zwiſchen B und C, zum Coſinus dieſes, auf die Fläche des Horizonts reducirten Winkels.

Man kann auf den Plan des Horizontes auch den zwiſchen zwey Dingen, davon das eine in dieſer Fläche, das andre drüber oder drunter iſt, beobachteten Winkel, vermittelſt der ſphäriſchen Trigonometrie reduciren. Man beſchreibe Fig. 1020 einen Cirkelbogen BEF, der den Horizont vorſtellet, und deſſen Mittelpunkt in A, am Orte des Standes iſt. Nimmt man an der Bogen BC meſſe den zwiſchen dem Objekte B am Horizonte, und dem Objekte C, das um die Größe CE darüber erhoben iſt, beobachteten Winkel BAC, ſo iſt in dem, in E rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyecke BEC, die Hypotenuſe BC und der Bogen CE bekannt. Man ſpricht alſo nach den Regeln der ſphäriſchen Trigonometrie: Wie der Coſinus des Bogens CE, der durch die Höhe des Objekts C, über dem Horizonte gemeſſen wird, ſich verhält zum ſinus totus: Alſo der Coſinus des Bogens BC, der durch den beobachteten Winkel BAC gemeſſen wird zum Coſinus des Bogens BF, der den, auf die Fläche des Horizonts reducirten Winkel BAE mißt. Dieſe Analogie iſt eben dieſelbe, die oben aus der geradlinichten Trigonometrie abgeleitet wurde. Man kann ſie alſo als einen Beweis der Aufgabe annehmen, nach welcher man in einem ſphäriſchen Dreyecke, eine von den Seiten beſtimmen ſoll, wenn die Hypotenuſe und eine der andern Seiten gegeben iſt.

Wenn die beyden Dinge C, D, eines über, eins unter der Fläche ABFR Fig. 1021 des Horizonts ſind; ſo ziehet man aus C, auf dem Radius AC die ſenkrechte CH, die in der Fläche des Objekts ACD ſey, und auf die Fläche des Horizonts in I trifft; AD verlängert man bis in H; und ziehet aus den Punkten C, D, H, die ſenkrechten Linien CE, DF, HG auf die Fläche des Horizontes. In dem in C rechtwinklichten Triangel CAH hat man: der Sinus des Winkels CHA, Compl. des zwiſchen C und D beobachteten Winkels CAD, verhält ſich zum ſinus totus, wie AC oder AD zu AH, das iſt wie DF, welches durch den Sinus der Tiefe des Objekts D unter dem Horizont gemeſſen wird, zu HG. Man hat auch HG + CE: CE = CH Tangente des Winkels CAD: CI Tangente des Winkels CAI, der alſo ſowohl als der Winkel HAI bekannt ſeyn wird. Man ſpricht daher nach den oben vorgeſchriebenen Regeln: wie der Coſinus der Höhe des Dinges C, über dem Horizont ſich zum ſinus totus verhält, ſo der Coſinus des Winkels CAI, zum Coſinus des auf die Fläche des Horizonts reducirten Winkels, der durch den Winkel EAI gemeſſen wird; und wie der Coſinus des Winkels HAI ſich verhält zum Coſinus dieſes Winkels der durch den Winkel IAG gemeſſen wird: ſo hat man wenn man ihn zum Winkel EAI ſetzet, den Winkel EAG auf der Fläche des Horizonts der zu den beobachteten Winkel CAD zwiſchen C und D gehöret.

Wenn

Wenn Fig. 1022 die Dinge C und D beyde über dem Horizont ſind, ſo ziehet man aus C auf den Halbmeſſer AC die ſenkrechte CI, welche auf die Fläche des Horizonts in I trifft, und verlängert die Linie AD bis in H. In dem, in C rechtwinklichten Dreyeck AHC, hat man den Sinus des Complements des beobachteten CAH zum ſinus totus, wie CA oder AD zu AH; oder wie DF, Sinus des Winkels DAF, der die Höhe des Punktes D über dem Horizont miſſet, ſich zu HG verhält. Ziehet nun HG von CE dem Sinus des Winkels CAE, der die Höhe des Punktes C über dem Horizont miſſet, ab, ſo hat man CK; und ſpricht: wie CK zu CE iſt, alſo CH Tangente des Winkels CAH zu CI Tangente des Winkels CAI, der folglich bekannt iſt. Ziehet man davon den Winkel CAH ab, ſo bleibet der Winkel HAI. Da die Winkel CAI, HAI bekannt ſind; ſo findet man wie oben, die Winkel EAI und GAI auf der Fläche des Horizonts, die dazu gehören, oder damit übereinſtimmen. Ziehet man GAI von EAI ab, ſo hat man den Winkel EAG auf der Fläche des Horizontes, der mit dem beobachteten Winkel CAH übereinſtimmt.

Es giebt Fälle da der auf die Fläche des Horizonts reducirte Winkel größer als der zwiſchen zweyen ungleich hohen Dingen beobachtete ſeyn wird, z. E. wenn die Reduktion für den Winkel CAI kleiner als die für den Winkel HAI iſt, das geſchiehet oft, wenn der Winkel CAH ſehr groß iſt.

Der reducirte Winkel iſt auch, wie man angemerkt, größer als der beobachtete, wenn die beyden Objekte in Anſehung der Fläche des Horizonts gleich hoch oder gleich tief ſind. So ſtellet z. E. in Fig. 1019 C den Ort des Standes über dem Horizont vor, von da man den Winkel BAC zwiſchen B und A, die man in gleicher Weite annehmen kann, beobachtet hat. In dieſem Falle heißt es: wie ſich der Coſinus von CE, Höhe des Punktes C über den Horizont, welche durch den Winkel CAE, oder den ihm gleichen CBE gemeſſen wird, zum ſinus tot verhält, alſo der Sinus des Winkels ACG, Hälfte des beobachteten Winkels ACB zum Sinus des Winkels AEG, Hälfte des Winkels AEB, der auf die Fläche des Horizonts reducirt worden.

Aus dem Bisherigen erhellet, man müſſe, wenn man das Inſtrument durch den Umfang des Horizonts prüfen will, Objekte wählen, deren Erhöhungen und Vertiefungen wenig merklich iſt; und wenn man keine in der erforderlichen Lage hat, ihre Höhe zugleich beobachten, um die Reduktion zu machen, und in der Verbeſſerung des Inſtruments in Rechnung zu bringen. Man ſiehet auch, daß wenn ein Winkel, die Zahl derer in der Theilung entſtandenen Grade übertrifft, (in welchem Fall man ſein Maß nur durch die Summe der beyden Winkel haben kann), ſo müſſe man ſo viel möglich, vermeiden, daß das Zwiſchen-Objekt über oder unter der Fläche ſey, die durch das Auge des Beobachters und die beyden äußerſten Objekte gehet. Sonſt man ihn auf die Fläche des Horizonts reduciren, um den Irrthum, der in dem ganzen Winkel ſeyn möchte, zu vermeiden. Hat man aber darauf nicht acht, ſo kann man von der Mittagslinie oder ſenkrechten Linie, die man beſchreiben will, gar ſehr abgehen, wenn auch die Winkel auf das genaueſte beobachtet worden.

Eben ſo wird es mit den folgenden und allen andern Dreyecken, ſowohl der Mittagslinie als ſenkrechten. Die Dinge auf welche mehr Dreyecke zu ſtoßen, ſind gemeiniglich höher; denn man ſiehet ſie von vielen Orten. Und deßhalb muß die Summe der daſelbſt beobachteten Triangel, von dieſer Summe, wenn ſie auf eine horizontale Fläche reducirt iſt, deſto mehr unterſchieden ſeyn.

Viele von dieſen Irrthümern müſſen zwar einander nöthwendig aufheben. Denn wenn die Summe der reducirten Winkel zuweilen kleiner als die Summe der beobachteten iſt, ſo iſt ſie auch manchmal größer. Dieſe Erſetzung kann aber niemals gleich ſeyn; ſonderlich wenn ein ſich ein viel höheres Ding als die meiſten andern, die es umgeben, findet. Alſo iſt es eine Quelle von Irrthümern, die auf folgende Art zu verſtopfen ſeyn möchte.

Es würde ſchwer ſeyn, mit eben den Quadranten, damit man die Winkel am Horizont nimmt, die Höhe aller daſelbſt entdeckten Dinge zu nehmen. Denn man müſte ihn endlich vertical ſtellen, ſeinen Mittelpunkt ändern und ein Haar mit Bley daran hängen, um daſelbſt die Höhen zu nehmen. Daß iſt aber langweilig und faſt unmöglich. Hierzu aber kann man folgendes Inſtrument Fig. 1023 gebrauchen, das der Picardiſchen Waſſerwage ähnlich iſt. Es beſtehet aus einem Fernglaſe AB, von einem Fuße, deſſen Röhre merklich iſt, und aus einem zwey Zoll breiten Linial CD, das in rechten Winkeln daran geheftet iſt und eben vorſtehet, damit an den Mittelpunkt C ein Haar mit Bley befeſtiget werden könne. Das Ende dieſes Linials theilet man durch concentriſche Cirkel und Queerlinien in 10 Grade, und jeden Grad in 10 Theile, und ſetzet o in der Mitte, ſo, daß zu beyden 5 Grad ſind. Das überſteigt die größte Höhe, die man nöthig haben möchte. Zwey Stangen Eiſen HI, KL helfen das Linial feſt halten, und es wird ganz zugedeckt, damit der Wind es nicht berühre. Unten aber ſiehet man durch ein Glas die Theilungen und Höhen. Hinter dieſem Linial iſt eine platte eiſerne Stange, ſie endigt ſich mit einem Cylinder, der in die Röhre des Fußes des Inſtruments gehet, und vermittelſt der Schrauben richtet man ihn gar genau, auf das Objekt deſſen Höhe man nehmen will. Denn man unterſcheidet daran die halben Minuten ſo deutlich als 10″ an einem Quadranten von 2 Fuß, das iſt zu ſolcher Arbeit genug, wo eine Minute mehr oder weniger, in die Reduktion der beobachteten Winkel keinen merklichen Irrthum bringen kann. Iſt der Unterſchied der Höhen kleiner als 15′ ſo überſiehet man ihn, wenn nur der Winkel nicht gar zu ſpitzig und kleiner als 20° iſt. Sonſt muß man darauf acht haben, nach der angegebenen Methode, die Seiten und Winkel der Dreyecke auf die Fläche des Horizonts zu reduciren. Das iſt aber nach der Strenge nöthig, damit man von der erſten Richtung nicht abweiche, und die Strecke die man meſſen will genau beſtimme, denn ob man gleich durch die Berechnung der Seiten der auf unterſchiedenen Flächen gebildeten Dreyecke, die Größe ihrer Seiten bis zur Grundlinie genau weiß, dieſe aber an den Enden meſſen kann; daher ſie auch derjenigen, die aus der Folge der Dreyecke erwächſt, gleichförmig ſeyn kann: ſo iſt es doch aus angeführten Urſachen nicht möglich, gewiß zu ſeyn, daß man von der erwählten Richtung nicht abgegangen.

Nachdem wir nun gezeiget, wie behutſam man verfahren müſſe, um die Irrthümer zu vermeiden, die von der Ungleichheit des Bodens entſtehen, ſo iſt auch nöthig diejenigen zu erwägen, daran die Lage des Ortes, wo man beobachtet, Urſache ſeyn kann.

Wenn man ſich immer in den Mittelpunkt des Objekts, des einen von den Punkten des Triangels macht, ſtellen könnte, ſo wäre alle Reduktion unnöthig, und die beobachteten Winkel würden die wahren ſeyn, da aber dieſes gar ſelten geſchiehet, muß man ſie darauf reduciren; und dann muß man die Weite des Orts wo man ſtehet, von den beobachteten Dingen und die genaue Lage des Inſtruments in Anſehung des Mittelpunkts des Objekts wiſſen. Die

Wei-

Weiten kann man nicht eher, als nach dem Triangel gemacht, wiſſen; wobey man die Lage des Inſtruments, z. E. ABD Fig. 1024 in Anſehung des Mittelpunkts C des Standes, Acht, hat. Man richtet das unbewegliche Seherohr AB auf ein Objekt, und ſtellet das bewegliche AE in die Richtung des Mittelpunkts C, um den Winkel BAC oder HAC ingleichen den Winkel DAC oder IAC zu haben. Kennet man die Winkel IAC, HAC, und die Weiten IA, AH nebſt der Weite AC des Mittelpunkts des Objekts vom Mittelpunkt des Quadrantens; ſo kennet man die Winkel AHC, AIC; wenn die von dem beobachteten Winkel BAD oder HAI abgezogen werden, geben ſie den auf den Mittelpunkt des Objekts reducirten Winkel HCI. Es iſt wie man leicht begreift nicht nöthig die Größe der Seiten AI, AH um genaue Reduktionen zu machen genau zu kennen; ſo wenig als des Winkels BAC genaue Größe. Denn eine Minute mehr oder weniger in der Größe des Winkels und 20 oder 30 Toiſen weniger oder mehr an den großen Seiten in einer Weite von 8000 bis 10000 Toiſen, wird nicht einen Unterſchied von einer Secunde verurſachen, wenn der Winkel AIC oder AHC nicht eine Minute oder zwo größer iſt. Deswegen kann man auch ſo fort den Triangel berechnen, ohne auf die Reduktion zu ſehen, damit man die Seiten erhalte, die man zur Reduktion gebrauchen will.

Dieſe Reduktionen müſſen auf unterſchiedene Art geſchehen, nachdem die Lage des Inſtruments gegen den Mittelpunkt und die Objekte verſchieden ſind. Denn entweder iſt der Mittelpunkt des Inſtruments genau in der Richtung des Mittelpunkts des Standes, und eines der Objekte, oder in der Mitte zwiſchen zwey Objekten oder zur Rechten und Linken zweyer Objekte. In dem erſten Falle beruhet die Reduktion bloß auf der Weite des Objekts, welches nicht in der Richtung des Mittelpunkts des Ortes wo man beobachtet und des Mittelpunkts des Quadranten iſt. Und alsdann iſt nur ein Winkel zu verbeſſern. Im zweyten Falle beruhet ſie auf der Weite der beyden Objekte, und alsdann hat man zwey Winkel zu verbeſſern. Endlich muß man in dem dritten einen Winkel zuſetzen und einen abnehmen. Der Unterſchied iſt, das, was man abnehmen oder zuſetzen muß, um den wahren Winkel zu heben. Wenn man aber einen Winkel durch die Summe zweyer andern beſtimmt, muß man zum Zwiſchenobjekte einen Ort von bekannter Weite wählen, und es ſo machen, daß der Mittelpunkt A des Inſtruments genau in eben derſelben Lage ſey.

Jetzt iſt noch übrig die Behutſamkeit zu unterſuchen, die man beobachten muß, um die von den Inſtrumenten abhängenden Irrthümern zu verbeſſern. Nachdem man alle Objekte um den Horizont, deren Höhe nicht ſo groß iſt, daß ſie in den beobachteten Winkeln einen Unterſchied hervorbringen könne, gewählt hat, faßt man den Umfang des Horizonts in vier oder fünf Winkel, und beſtimmt jeden dieſer Winkel durch die Summe etlicher andern. Giebt der Umfang des Horizonts 360° bis auf einige Sekunden und die Summe der Partialwinkel iſt dem ganzen Winkel mit einem Unterſchiede gleich, der die kleinen Irrthümer, die man in jeder Beobachtung machen kann, nicht übertrifft; ſo kann man gewiß ſeyn das Inſtrument ſey gut getheilet. Iſt ein gröberer Irrthum dabey, ſo prüfe man eben dieſelben Winkel noch einmal. Bleiben die Irrthümer, ſo bringt man ſie in eine Tabelle, die man zu dem Ende beſonders verfertiget, in Anſchlag.

II. Scherffer über die Fehler ſo bey Diſtanz-Meſſungen vorfallen können.

Er-

Erſter Fall. Wenn ein Winkel richtig; der mangelhafte aber der geſuchten Seite entgegen ſtehet, und die Lage der Grundlinie gegeben wird.

1. In dieſem Falle befinden wir uns jederzeit, da eine ſenkrechte Höhe AB Fig. 1046 abzumeſſen iſt, zu welcher man auf einer Fläche FEA hinzugehen kann, in dem uns dazu der rechte Winkel A unfehlbar bekannt iſt, das Maaß der Grundlinie AE wirklich genommen wird, und man ſich bey dem Winkel E leichtlich um etliche Minuten verirret. Es können aber auch dieſe Umſtände ſonſt vorkommen, als zum Beyſpiele, wenn man die Entfernung der Oerter A und B Fig. 1047 ſuchet, derer nur einem beyzukommen iſt, und die Beſchaffenheit der Gegend nur eine Grundlinie der Lage AEF geſtattet: ſetzen wir nun, der Winkel A werde uns ohne allen Fehler, auf was Art es immer geſchehe, gegeben, ſo ſiehet man die vollkommene Aehnlichkeit mit dem nur jetzt gemeldeten Falle. Allein wir kehren zu der 1046ſten Figur zurück, in welcher bey A ein rechter Winkel, die ſenkrechte Höhe AB zu ſuchen vorgeſtellet wird.

Wir wählen nun den Stand bey E, und ſetzen, man nehme anſtatt des Winkels BEA einen andern DEA, doch alſo, daß der Fehler DEB nur einige Minuten beträgt. So wird demnach der Fehler in der geſuchten Höhe BD ſeyn; und wenn man aus dem Mittelpunkte E mit dem halben Durchmeſſer EB, einen kleinen Cirkelbogen BC beſchreibet, den man als eine gerade Linie betrachten kann, ſo verhält ſich der Fehler des Winkels zu dem Fehler in der Höhe, wie BC, zu BD, das iſt, weil die Winkel ABE, ADE nur ein wenig unterſchieden ſind, wie AE zu BE.

Allein man ſiehet ſehr leicht, daß, wenn man den kleinen Winkel BEC als beſtändig annimmt, die Größe des Bogens BC veränderlich werde, nach der Größe des halben Durchmeſſers BE, und es ſich alſo fügen könne, daß obſchon das Verhältniß BD zu BC abnimmt; dennoch die eigentliche Größe BD wachſe. Denn übertragen wir den Stand in F, und machen BFc mit BEC gleich, ſo wird zwar das Verhältniß Bd zu Bc kleiner, als BD zu BC, wegen eines größern Winkels bey d, als bey D; und doch wird Bd größer ſeyn als BD. Es ſtehet uns demnach die Auflöſung folgender Aufgabe bevor:

2. Aufgabe. Man ſuchet in der Linie AF den Punkt E, daß ſofern man in dem Winkel BEA, um eine gegebene Anzahl Minuten fehlet, der Fehler in der geſuchten Seite AB, nämlich BD, der kleinſte aus allen ſey.

Auflöſung. Weil der Winkel BEC als bekannt angenommen wird: ſo können wir ihn folgender Geſtalt ausdrücken $\frac{\pi}{R}$, allwo π einen mit dem halben Durchmeſſer R beſchriebenen Bogen bedeutet, der die gegebene Anzahl der Minuten enthält, indem ja die Winkel ſich gerade wie die Bögen, und umgekehrt wie die halben Durchmeſſer verhalten. Wir haben demnach $R : \pi = BE : BC$ das iſt, wenn wir ſetzen $AB = a$, $AE = x$, $R : \pi = \sqrt{(a^2 + x^2)} : BC = \frac{\pi}{R}\sqrt{(a^2 + x^2)}$. Auſſerdem geben die ähnlichen Triangel DBC, BEA, $(AE = x) : (BE = \sqrt{(a^2 + x^2)}) = (BC = \frac{\pi}{R}\sqrt{(a + x^2)} : (BD = \frac{\pi}{R}(\frac{a^2 + x^2}{x}))$, welcher Ausdruck ein Kleinſtes enthält, und iſt ſeine Differenz $= 0$ zu ſetzen. Folglich mit Hinweglaſſung der beſtändigen Größe $\frac{\pi}{R}$, hat

man

man $-\frac{a^2dx}{x^2}+dx=0$, oder $x^2=a^2$, und endlich $x=\pm a$, allwo das Zeichen $\pm$ alſo zu verſtehen iſt, daß es gleichviel gelte, man nehme den Punkt E auf der rechten, oder linken Seite der geſuchten Höhe.

Aus dieſem folget, man müſſe die Grundlinie ſo lang machen, daß der Winkel DEA 45° am nächſten komme.

3. Daß in dem Ausdrucke $\frac{\pi}{R}\left(\frac{a^2+x^2}{x}\right)$ ein Kleinſtes enthalten ſey, läßt ſich auch ſynthetiſch erweiſen, und zwar nicht allein für den Fall, daß bey A ein rechter Winkel ſey, ſondern es mag dieſer von was immer für einer Größe ſeyn. Man ſtelle ſich vor, ein durch B, und C (Fig. 1047) beſchriebener Cirkel berühre die Seite AF in E. Ziehet man die Linien CE, BE; CF, BF, ſo erhellet, daß der Winkel CEB größer ſey, als CFB, wo man immer auſſer E den Punkt F annimmt, indem das Maß des vorigen der halbe Bogen BC, des letzten aber nur $\frac{1}{2}$ BC — $\frac{1}{2}$ bc iſt. Wenn man demnach den Winkel BFG mit BEC gleich machet, ſo iſt nöthig, daß er einen größern Bogen BCg abſchneide, und mithin auch die verlängerte Linie Fg einen größern Theil BG, als BC iſt, von AB hinwegnehme. Setzen wir nun, der Winkel CEB ſey eben der Fehler $\frac{\pi}{R}$, den man bey E begeht, da A gegeben wird, ſo iſt klar, man könne keinen vortheilhafteren Stand, als E erwählen.

Es verſteht ſich ſchon, daß der Fehler im Anſehen der ganzen Seite AB klein ſey; und weil aus den Anfangs-Gründen der Geometrie bekannt iſt, es ſtehe AC : AE = AE : AB, ſo hat man $AE^2 = AC.\,AB$, oder $AE=\sqrt{AC.\,AB}$; das iſt, wegen $\sqrt{AC.\,AB} = AC.\,\frac{1}{2}\,BC$ beynahe, muß AE beynahe mit AB gleich ſeyn. Die Urſache kann dem nicht verborgen ſeyn, der weiß, daß $\sqrt{(ax+xx)}$ nach aller Schärfe ſo viel gelten, als $x+\frac{1}{2}a$, wenn a im Anſehen x unendlich klein iſt, und daß dieſe Berechnung der wahren Größe um ſo viel näher komme, je kleiner a gegen x iſt.

Aus dieſem muß man ſchließen, im Falle daß der Winkel A gegeben wird, und man die Seite AB ſuchet, damit man in ihr am wenigſten fehle, müſſe die Grundlinie ſo lang gemacht werden, daß der Winkel E = 90° — $\frac{1}{2}$ A werde, denn auf dieſe Weiſe wird auch AE dem AB faſt gleich.

Es ſcheinet allhier, dem berühmten Herrn Marinoni ſey etwas wiederfahren, was auch den größten Männern begegnen kann, da er (Coroll. 1. pag. 179) ſpricht: Drittens, daß in beyden Seiten die kleinſten Fehler ſich äuſſern, wenn der Winkel bey B 90° hält; da doch dieſes allein von der Seite kann geſagt werden, welche mit der bekannten Grundlinie den fehlerhaften Winkel einſchließt, nicht aber von der entgegengeſetzten. Ein rechter Winkel kann nur machen, daß die Fehler in der geſuchten Länge gleich ſeyen, man nehme hernach den mangelhaften Winkel zu groß, oder zu klein; nicht aber daß ſie die kleinſten werden.

Zweyter Fall. Wenn der mangelhafte Winkel der geſuchten Seite entgegen ſtehet, der andre keinem Fehler unterworfen, und die Wahl der Grundlinie auch der Lage nach bey uns iſt.

4. Obſchon es ſich nicht ſogleich zuträgt, daß bey gänzlich freyer Wahl der Grundlinie nur ein Winkel fehlerhaft ſey, nicht aber auch der andere, der zwiſchen der Grundlinie und geſuchten Seite enthalten iſt, ſo halten wir doch für gut, auch dieſen Fall zu unterſuchen.

Es ſey demnach die geſuchte Seite AB (Fig. 1048), der Winkel A auſſer der Gefahr eines Fehlers, ob er ſchon vor ſich größer oder kleiner ſeyn kann; man ſuchet den Stand E, aus welchem der Fehler CB, wenn es möglich, der kleinſte werde, da der Fehler CEB in dem Winkel beſtändig angenommen wird.

Aus der ſynthetiſchen Auflöſung (3) iſt klar, daß, was man immer für einen Winkel bey A annimmt, damit der Fehler in der Länge AB der kleinſte ſey, nothwendig erfordert werde, daß AB mit AE gleich gemacht werde, und folglich der Winkel $ABE = AEB = 90° - \frac{1}{2} A$.

Den Winkel A ſetze man $= x$, die geſuchte Seite $AB = AE = l$, und die Linie AF falle auf EB ſenkrecht; aus dem, was wir angenommen haben, erſiehet man leicht, daß EB durch AF in zwey gleiche Theile, wenigſtens beynahe, geſchnitten werde; und man hat $R : \cos \frac{1}{2} x = AB : AF = l : AF = \frac{l.\cos \frac{1}{2} x}{R}$; wie auch $R : \sin \frac{1}{2} x = l ; BF = \frac{l.\sin \frac{1}{2} x}{R}$, folglich EB oder $CE = \frac{2.l.\sin \frac{1}{2} x}{R}$. Hieraus hat man ferner $R : \pi = \frac{2.l.\sin \frac{1}{2} x}{R} : CD = \frac{2.\pi.l.\sin \frac{1}{2} x}{R^2}$. Endlich ſtehet $AF : AB = \cos \frac{1}{2} x : R = CD : CB = \frac{2.\pi.l.\sin \frac{1}{2} x}{R.\cos \frac{1}{2} x}$, welches, weil es ein Größtes, oder ein Kleinſtes enthalten ſoll, uns giebt $\frac{\cos \frac{1}{2} x.\, d \sin \frac{1}{2} x - \sin \frac{1}{2} x.\, d \cos \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} = 0$, oder $\cos \frac{1}{2} x.\, d \sin \frac{1}{2} x = \sin \frac{1}{2} x.\, d \cos \frac{1}{2} x$, mithin $d \sin \frac{1}{2} x : d \cos \frac{1}{2} x = \sin \frac{1}{2} x : \cos \frac{1}{2} x$.

In der Figur 1049 ſtelle PCM den Winkel $\frac{1}{2} x$ vor: wegen der rechten Winkel MmC, rmp, ſind auch die Winkel Mmr, Cmp, CMP gleich, und giebt ſich $Mr : rm = CP : PM$, das iſt, $d \sin \frac{1}{2} x : d \cos \frac{1}{2} x = \cos \frac{1}{2} x : \sin \frac{1}{2} x$. Nun aber haben wir gefunden $d \sin \frac{1}{2} x : d \cos \frac{1}{2} x = \sin \frac{1}{2} x : \cos \frac{1}{2} x$ welches unmöglich geſchehen kann, es ſey denn $\sin \frac{1}{2} x = \cos \frac{1}{2} x$, oder $\frac{1}{2} x = 45°$, und $x = 90°$.

Es iſt handgreiflich, daß CB deſto kleiner werde, jemehr die eigentliche Größe des Bogens CD abnimmt, und jemehr der Winkel B zunimmt; beydes aber geſchieht bey Verminderung der Länge CB, oder des Winkels A. Und aus dieſem liegt am Tage, daß der gefundene Ausdruck nicht ein Kleinſtes, ſondern vielmehr ein Größtes enthalte, im Falle, daß bey A ein rechter Winkel iſt, den man den größten ſpitzigen Winkel nennen kann, und die Winkel A zu den ſpitzigen gehören ſollen. In der Sache ſelbſt iſt allhier weder ein Größtes noch ein Kleinſtes: denn ſofern der Winkel A unendlich abnimmt, verſchwindet aller Fehler CB; nimmt er aber bis 180 Grade zu, ſo wird der Fehler CB unendlich groß, wie es ſich aus dem Ausdrucke ſelbſt leicht herleiten ließ: $CB = \frac{2\pi\, l.\sin \frac{1}{2} x}{R.\cos \frac{1}{2} x}$: denn $\cos \frac{1}{2} x$ kann unendlich abnehmen, wenn x auf 180 kömmt, und dieſes geſetzt, wird $CB = \infty$. Hingegen kann auch $\cos \frac{1}{2} x$ dem R gleich werden, und alsdann wird $\sin \frac{1}{2} x = 0$, mithin $CB = 0$.

Aber was für eine Regel werden wir aus dem bisher geſagten für die Wahl des Winkels A, und der Seite AE herleiten? Keine andere, als folgende:

Man

Man nehme die Grundlinie, ſo viel als möglich, jederzeit mit der geſuchten Seite gleich, welches man erhält, wenn der Winkel E von 90° $- \frac{1}{2}$ A am wenigſten abweichet: den Winkel A aber nehme man ſo klein, als ohne Gefahr eines Fehlers geſchehen kann. Denn ſollte auch allda ſich ein Fehler einſchleichen; ſo müßten wir uns auf einen andern Fall beziehn.

5. Allein wie hätten wir uns zu verhalten, ſofern der irrige Winkel nicht der geſuchten Seite gegenüber ſtünde, ſondern der andere, den wir für richtig angenommen haben? Die Antwort auf dieſe Frage iſt ſo leicht, daß ich ſie nicht einmahl vortragen wollte.

AB (Fig. 1050) ſey wiederum die geſuchte Seite, der Fehler des Winkels A = BAC, und die Linie BF enthalte mit AB einen rechten Winkel. Es iſt ſonnenklar, daß wenn in dem zweyten Winkel G oder F kein Fehler vorgehet, und man den Stand in der Linie BF, es ſey auch bey G, oder bey F, wählet, kein merklicher Fehler in der Länge AB zu befürchten ſey, weil ſo lang der Winkel BAC nur in einigen Minuten beſtehet, die Länge AB von AC nicht merklich kann unterſchieden ſeyn, als die ebenfalls faſt ſenkrecht gegen BF ſtehet, man nehme hernach den Winkel A zu groß oder zu klein.

Setzet man aber den Stand auſſer der Linie FB, als zum Beyſpiele in E, ſo iſt es nicht möglich, daß EB von AC einen Theil AH abſchneide, der nicht merklich von der geſuchten Länge AB unterſchieden ſey, und wird allezeit der in dem Winkel A begangene Fehler ſich zu jenem, der die Seite AB unrichtig macht, verhalten, wie die Bogenhöhe oder der Sinus des Winkels B, zu der Bogenhöhe oder dem Sinus des Mitwinkels. Und weil die Bogenhöhen einerley verbleiben, es mögen die Winkel geſpitzt oder ſtumpf ſeyn, ſo gilt eben dieſes Verhältniß auch in dem Falle, da der Stand E über die Linie BF hinausgeſetzt wird.

Man muß hieraus ſchließen, daß der Fehler in der geſuchten Seite AB um ſo viel kleiner werde, jeweniger der Winkel B von einem rechten abweichet; oder man müſſe den Stand G alſo erwählen, daß die Winkel A und G einer des andern ſein Mitwinkel ſey.

Dritter Fall. Wenn die Wahl des Standes in der gegebenen Lage einer Linie zu machen iſt, und beyde Winkel irrig ſind, alſo, daß die Fehler nicht allein der Größe nach, ſondern auch in der Gattung gleich ſind, das iſt, wenn beyde Winkel entweder zu groß, oder beyde zu klein genommen werden.

6. Dieſe Umſtände ereignen ſich weit öfterer, als die vorigen, weil nicht ſelten die herumliegende Gegend nur auf einer Seite eine hinlängliche Ebene darbietet, auf welcher man die Grundlinie nehmen kann, und die Winkel meiſtens durch ebendaſſelbige Werkzeug uns müſſen bekannt werden.

AB (Fig. 1051) ſey demnach die geſuchte Seite des Dreyeckes. Man könnte anfangs glauben, der Unterſchied zwiſchen der wahren Länge AB und der irrigen AC, wenn beyde Winkel zu klein genommen werden, oder der Fehler der geſuchten Seite, werde alsdann der kleinſte, wenn AE dem AB faſt gleich iſt, in welchem Falle dieſer Fehler HB betrüge. Allein dieſer Fehler muß durch den Bogen CD beſtimmt werden, und iſt zu BH annoch der Theil AD hinzuzuſetzen, der ſich zu dem von uns angenommenen Fehler BF oder CD, welcher in dem Winkel A begangen wird, wie die Bogenhöhe des Mitwinkels zu der Bogenhöhe des Winkels B verhält. Denn die bey G und D rechtwinklichte Dreyecke GHB, DHC ſind ähnlich, und GBH = DCH iſt der Mitwinkel des ABE, indem GBE von 90° nicht unterſchieden iſt. Nun aber iſt dieſer Mit-

winkel der Hälfte des Winkels A gleich (wie man aus der 1048ten Figur leicht verſtehet); und weil A nicht ſo klein ſeyn muß, kann das Verhältniß HD zu DC nicht übergangen werden, wenn DC eine Größe hat, die mit in die Rechnung kommen ſoll.

Dieſes zum vorausgeſetzt, ſiehet man, daß die Größe DB oder CF von der Länge des Punkts C der Linie AF abhänge, allwo ſie nämlich von der Linie EG geſchnitten wird. Je näher C gegen A zu liegen kömmt, deſto größer wird der Fehler DB; je näher es aber gegen F hinzurücket, deſto kleiner muß der Fehler werden. Es iſt aber klar, C müſſe näher zu dem Winkel A hinzukommen, wenn BK größer wird (K iſt der Punkt, in welchem die ſenkrechte Linie BI ſich mit EG ſchneidet): im Gegentheile müſſe C näher gegen F fallen, wenn BK kleiner wird.

Eben dieſes verſtehet ſich, wenn beyde Winkel zu groß genommen werden. Denn ſofern man aus dem Mittelpunkte A (Fig. 1054) mit AB einen Cirkelbogen BD beſchreibet, wird C um ſo viel mehr von D abſtehen, je größer BK wird; hingegen wird C dem D um ſo viel näher ſeyn, je kleiner BK iſt: daß es alſo außer Zweifel iſt, der Fehler BD (Fig. 1051) oder DC (Fig. 1054) werde alsdann der kleinſte, wenn BK ein Kleinſtes iſt: und beziehet ſich demnach gegenwärtiger Fall auf den erſten. Es iſt deswegen nur nöthig, daß (Fig. 1052) der Theil IE der Grundlinie mit BI gleich genommen werde, das iſt, daß der Winkel E von 45° am wenigſten abweiche.

7. Es äußert ſich hier eine nicht geringe Unbequemlichkeit, daß nähmlich die Grundlinie AE, deren Maß man wirklich zu nehmen gezwungen iſt, weit länger ſeyn muß, als die geſuchte Seite ſelbſt. Und dieſe Beſchwerde kann ſo groß ſeyn, daß es nicht die Mühe bezahle, den kleinſten Fehler zu haben, beſonders weil man ohne das in den angenommenen Umſtänden nicht den ganzen vermeiden kann. Damit man aber den Fehler in die Rechnung bringe, ſo beſchreibe man mit dem halben Durchmeſſer EC (Fig. 1052. 1053) aus E einen Bogen CO, wie auch aus A zwey andere CD, LF. Man ſetze: die Bogenhöhe des Winkels B iſt zu dem halben Durchmeſſer, wie der Fehler des Winkels E zu CL. Auf dieſe Weiſe findet man CL = DF. Alsdann ſetze man wiederum: die Bogenhöhe des Winkels B verhält ſich zu der Bogenhöhe ſeines Mitwinkels, wie der Fehler des Winkels A zu FB. Iſt der Winkel B ſtumpf, ſo fällt F über B hinaus; iſt er aber ſpitzig, ſo wird F zwiſchen A und B liegen, wie es in der 1052ten und 1053ten Figur zu ſehen iſt. Iſt endlich B ein rechter Winkel, ſo fällt F auf B. Mithin iſt im erſten Falle der Fehler dem Unterſchiede zwiſchen CL und BF gleich; im zweyten der Summe im dritten nur allein dem CL.

Allein es hat das Anſehen, es gebreche mehr an der Wahrſcheinlichkeit, wenn man annimmt, daß die Fehler in beyden Winkeln von einerley Gattungen ſeyn, das iſt daß man beyde entweder zu groß, oder beyde zu klein nehme, indem für die entgegengeſetzte Gattung bey einem jeden Winkel eine gleichſtarke Wahrſcheinlichkeit ſtehet, und wir uns nicht in dem Falle befinden, daß etwa in dem Halbcirkel, oder Quadranten, deſſen man ſich bedienet, ein beſonderer Fehler zu merken ſey. Wir wollen alſo nun auch unterſuchen, wie wir uns zu verhalten haben, wenn die Fehler, die in den Winkeln begangen werden, von entgegen geſetzter Art ſind, die Grundlinie aber ihrer Lage nach gegeben wird.

Vier-

Vierter Fall. Wenn die Grundlinie ihrer Lage nach gegeben wird, und die Fehler der Winkel A und E einander entgegen ſind. Fig. 1055. 1056.

8. Man nehme erſtlich an, (Fig. 1055) daß der Winkel A zu groß, der Winkel E zu klein genommen werde, doch alſo, daß die Fehler von gleicher Größe ſind. Wenn man die Grundlinie AE ſo weit verlängert, bis der Winkel E einem rechten gleichkomme, ſo hat man den geſuchten Stand E. Man ſtelle ſich vor, auf dem kleinen Bogen DB, der den Fehler des Winkels A mißt, werde ein kleiner Halcirkel BDF beſchrieben, wie auch ein großer EAB. Es wird DB von einem kleinen Bogen des Halbcirkels EAB, wenn er bis auf AD hinausgezogen wird, nicht mehr unterſchieden ſeyn, als in dem Verhältniſſe der Bogenhöhe des Mitwinkels DAB zu dem halben Durchmeſſer, welches dem Sinne nach das Verhältniß zweyer gleichen Größen iſt, wenn DAB nur ſehr klein iſt. Es ſind deswegen die Winkel DAB, DEB für gleich zu halten, und wenn man in dem Maße des rechten Winkels AEB um den Abgang DEB fehlet, ſo muß uns die Auflöſung des Dreyeckes ADE die Seite AD mit der wahren Länge AB ohne allen merklichen Unterſchied gleich geben.

Auf gleiche Weiſe ſiehet man, daß ſofern der Winkel A (Fig. 1056) um BAD zu klein, und der Winkel AEB um BED zu groß angeſetzt wird, wenn man einen kleinen Halbcirkel BFD, und einen größern AEB beſchreibet, die Winkel BAD, BEF gleich ſeyn müſſen, als derer Schenkel auf einem gleichen Bogen BD ruhen, und auch in dieſem Falle die gefundene Seite AD mit AB gleich ſey.

9. Dieſe Beſtimmung des Standes E folgt aus dem, was wir angenommen haben. Allein weil auch das Widerſpiel ſich leicht ereignen kann, indem die Wahrſcheinlichkeit widriger Fehler nur um eine Stufe größer iſt, als daß man Fehler von gleicher Gattung begehe, ſo will ich dieſe Wahl nicht für jedesmahl eingerathen haben, beſonders wenn der Winkel bey A ſehr groß iſt. Denn ſollte man in der That auf gleiche Art in den Winkeln fehlen, ſo wäre der Fehler in der geſuchten Seite zu dem Fehler des Winkels A am nächſten, wie die Summe aus der Bogenhöhe des Mitwinkels B und dem halben Durchmeſſer, zu der Bogenhöhe des Winkels B, gleichwie es ohne Mühe zu erſehen iſt, wenn man von dem Punkte, in welchem die irrigen Seiten des Dreyeckes zuſammen ſtoßen, nach B eine kleine Linie zieht. Vielleicht wäre es in dieſen Umſtänden thunlicher, daß man den Winkel E 45° nehme, oder von ſolcher Größe, daß die Seite AE mit AB faſt gleich werde.

Wenn der Winkel A nicht ſo groß iſt, könnte vielleicht dieſes die Wahl eines rechten Winkels bey E vorzüglicher machen, daß es nicht allein wahrſcheinlicher ſey, man begehe widrige Fehler, ſondern auch daß gemeiniglich in den Halbcirkeln oder Quadranten der Punkt des neunzigſten Grades genauer, denn andere, beſtimmet werde, ja auch ſich mehrerley Arten einen rechten Winkel zu beſtimmen darbieten; daß mithin leicht geſchehen könne, daß man in dem Winkel E gar keinen Fehler begehe, folglich der Fehler des Winkels A ſich zu dem Fehler in der geſuchten Seite nur allein verhalte, wie die Bogenhöhe des Winkels B zu der Bogenhöhe ſeines Mitwinkels.

Fünfter Fall. Wenn die Grundlinie ihrer Lage nach nicht gegeben wird, und die in beyden Winkeln vorgehenden Fehler von gleicher oder widriger Gattung ſind, jedoch an Größe gleich.

10. Daß man allen merklichen Fehler in der geſuchten Länge vermeiden könne, wenn man beyde Winkel zu groß, oder beyde zu klein genommen hat,

 läßt

läßt ſich ohne Beſchwerde zeigen; und wenn wir ſetzen, daß ſich das zweyte zutrage, (Fig. 1057) ſo ſey die geſuchte Länge AB, der Fehler in dem Winkel A ſey BAH, wenn man nähmlich aus A mit AB einen kleinen Bogen BH beſchreibet. Man nehme den Winkel BAC = 45°, wie auch AC = CD, und beſchreibe auf dem Durchmeſſer AD aus dem Mittelpunkte C einen Halbcirkel. Den Bogen BI, der durch die verlängerte Linie AH abgeſchnitten wird, übertrage man in KB, und ziehe aus K durch H die gerade Linie KHE, die an den Halbcirkel bey E ſtößt. Es zeigt ſich alſo gleich, daß die Winkel KEB, BAI einander gleich ſind, und die Auflöſung des Dreyeckes AHE anſtatt AB eine gleich große Länge AH geben muß.

Es liegt uns nur ab, den Punkt E wenigſtens beynahe zu beſtimmen, und wenn wir ſchon nicht gänzlich allen Fehler vermelden, ſo iſt es doch gewiß, daß er ſehr klein ſeyn muß. Zu dieſem Ende ſetzen wir, der Bogen BI ſey unendlich klein, ſo wird das bey B rechtwinklichte Dreyeck GBI wegen des Winkels BGI = 45°, auch die Seiten BG, BI gleich haben. Und wenn wir aus A mit dem halben Durchmeſſer AG noch einen Bogen beſchreiben, ſo muß dieſer unendlich nahe bey K den Halbcirkel ABD ſchneiden; mithin kann GK von GI nicht unterſchieden ſeyn, und KGI iſt als ein rechter Winkel anzuſehen. Ueberdieß fällt BH in dem gleichſchenklichten Dreyecke IBG von der Spitze B ſenkrecht auf die Grundlinie GI, und ſchneidet ſie in zwey gleiche Theile, daß folglich ſich KG = GI zu GH, wie 2 zu 1 verhalte. Nehmen wir nun KG für den halben Durchmeſſer, und GH für die berührende Linie des Winkels GKH, oder (bey Verlängerung des KG bis in L) LKE an, ſo finden wir dieſen 26°34′ beynahe. Es wird demnach der Bogen DE (weil DL = KB unendlich klein iſt) = 53°8′, der Winkel BAE = 18°26′, BEA = 45°, als welcher von dem Viertel AB des ganzen Umkreiſes unterſtützet wird. Wir wollen nun ſehen, wie die wirkliche Berechnung eintreffe, für welche zu merken iſt, daß allezeit HAE von 18°26′ müſſe genommen werden, was immer der Fehler BAI beträgt. Denn weil LG auf AB ſenkrecht ſtehet, und BD ein Viertel des Cirkels iſt, ſo iſt allezeit KB = DL, mithin EAD = 26°34′ — BAI, und wenn man dieſen Winkel von IAD = 45° — BAI abzieht, ſo verbleibt IAE = 18°26′. Gleichermaßen iſt klar, daß KEA für 45° — BAI anzunehmen ſey.

Dieſes bemerkt, ſetzen wir den Fehler BAI = 10′ an; ſo wird EAD = 26° 24′, und ſtehet R: coſ 26°24′ = AD: AE. Wenn wir AB = 1 annehmen, gilt AD ſo viel $\sqrt{2}$, deſſen Logarithme = 0,1505150.

Log coſ EAD = 9,9521683
Log AD = 0,1505150
Log AE = 0,1026833

Ferner muß man in dem Triangel AHE anſtatt des Winkels AHE ſeinen Nebenwinkel IHE, welcher 18°26′ + 44°50′ = 63°16′ beträgt, nehmen, und ſtehet alſo ſin 63°16′: AE = ſin 44°50′: AH.

Log AE = 0,1026833
Log 44°50′ = 9,8482180
Summe = 9,9509013
Log 63°16′ = 9,9509049
Log AH = 0,0009036,

wel-

welchem etwas mehr, als 0,999914 gebühret. Hieraus ſieht man, daß wenn die geſuchte Länge AB 1000 Schuh wäre, der Fehler kaum mehr als einen Zoll betrüge.

11. Man wird allhier vielleicht denken, daß dieſe Beſtimmung des Standes E vielmehr einem leeren Hirngeſpinſte, als einer Sache gleiche, die man in dem Gebrauche anwenden könnte, als in welchem man durchaus die allzu kleinen Winkel, dergleichen dieſer von 18°26′ iſt, verwirft; da überdieß die Grundlinie AE viel zu lang wird. Allein es lag uns ob, die Sache ſo vorzutragen, wie ſie eine wohl gegründete Theorie gab, meiſtens weil auch im Falle eines entgegengeſetzten Fehlers in dem Winkel A, der Fehler in der geſuchten Länge nicht größer würde, als wenn man allein bey dieſem Winkel geirrt hätte, wenn man ihn 45° annimmt. Dieſes zu zeigen wird nur erfordert (Fig. 1058), daß GB von IE bey H gleich abgetheilet werde; denn wir werden haben IG : GH = R ; tang 26°34′, und werden alſo die vorigen Winkel EIL, EAD herauskommen.

12. Uebrigens habe ich für den Fall, da die Fehler in den Winkeln A und E zwar gleich groß, doch von entgegengeſetzter Gattung wären, nichts neues zu melden, was ich nicht ſchon oben bey dem vierten Falle geſagt hätte, denn, wie man es aus bloßer Betrachtung der 1055, und 1056 Figur abnehmen kann, weil die Lage der Linie AE keinen weſentlichen Einfluß in die Beſtimmung hat, und die Winkel DAB, LEF allezeit gleich verbleiben, wenn nur bey E ein rechter Winkel iſt: ſo halte ich die Wahl des Winkels A gänzlich für willkürlich, ſo weit er nicht den allgemeinen Geſetzen der Meßkunſt zuwider iſt.

Jedoch muß ich auch bekennen, daß ob ich ſchon weiß, daß zwiſchen den Bogenhöhen kleiner Winkel ſich ein größerer Unterſchied befinde, als zwiſchen jenen der Größen, ich doch keine hinlängliche Urſache finde, warum man in einem kleinen Winkel (die gar kleinen ausgenommen, als für welche die gebräuchlichen kleinen Inſtrumente ohne das untüchtig ſind) mehr fehlen ſollte, als in einem großen, wenn man die Größe der Fehler in ſich ſelbſt betrachtet, nicht aber im Vergleiche mit dem genommenen Winkel. In die von mir vorgetragene Beſtimmung der geſuchten Größe hat die Bogenhöhe des Winkels BAE keinen Einfluß, ſondern ich habe nur angenommen, daß die Fehler BAI, BEK gleich ſind.

Ja wollte man auch (Fig. 1057) die Seite EB ſuchen, ſo würde man finden, daß in dieſer der Fehler nicht größer werde, als der ſich zu dem Fehler des Winkels BAE verhält, wie die Bogenhöhe des Winkels B zu dem halben Durchmeſſer.

Eine andere Auflöſung.

13. Man nehme an, der Fehler HAB, (Fig. 1058 a) um welchen der Winkel A zu groß genommen worden, ſey unendlich klein, und man ſtelle ſich auf dem Durchmeſſer HB einen unendlich kleinen Cirkel HIB vor, wie auch einen Halbcirkel AEB auf dem Durchmeſſer AB. Wenn man eine Sehne BE nach Belieben ziehet, und verbindet die Punkte E und H mit einer Linie, ſo erhält man die ähnlichen Dreyecke HGA, HGE, und ſtehet HA oder BA : BE = HG : BG. Beyneben hat man, der rechten Winkel HBG, HIB wegen, HG : HB = BG : IB; folglich auch HA : HB = BE : BI, und ſind die Winkel HAB, BEI gleich.

Wenn

Wenn wir den kleinen Cirkel BI mit BK, wie auch die Linie Be mit BE, und EF mit Fe gleich machen, ſo muß eK durch den Punkt H hindurch gehen, und die Winkel BEH werden gleich. Wählet man demnach den Stand in e, und nimmt beyde Winkel A und e zu groß, ſo muß die Aufloͤſung des Triangels AHe eine gleiche Seite AH anſtatt AB geben, ohne merklichen Fehler.

Aus dieſem liegt am Tage, daß es zählbare Punkte e gebe, aus denen man allen Fehler in der geſuchten Länge vermeiden kann; und mithin die Aufgabe unbeſtimmt ſey, ob man ſchon das Widerſpiel vermoͤge der vorigen Aufloͤſung glauben koͤnnte.

14. Wir wollen nun einen Winkel BAe inſonderheit beſtimmen, wobey wir auf zwey Stücke zu ſehen haben: erſtens, je länger wir die Seite Be nehmen, deſto ſtumpfer wird der Winkel bey B, und die übrigen zwey kleiner. Zweytens, je weniger der Winkel B einen rechten überſteiget, deſtomehr nimmt die Seite Be ab. Beydes iſt in der That ſehr unbequem, beſonders weil bey wachſender Seite Be zugleich auch die Grundlinie verlängert wird.

Der Winkel BAe kann nicht groͤßer werden, als 19°28′ und einige Secunden, deſſen Bogenhoͤhe ſich zu dem halben Durchmeſſer wie 1 zu 3 verhält; wie man leicht erſehen würde, ſofern man auf der Verlängerung der Linie AB einen mit AEB gleich großen Halbcirkel beſchriebe, und aus A auf denſelben eine Tangente zoͤge, die den groͤßten Winkel mit AB enthielte, indem alle übrigen den Halbcirkel ſchneiden, und einen kleinern Abſtand von ſeinem Mittelpunkte haben würden. Die Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke FEB, FBe aber zeigt zur Gnüge, daß E in e in gleichen Halbcirkeln liegen. In dieſem Falle ſtünde Ae zu AB, wie $\sqrt{2}$ zu 1.

Wir nehmen alſo BE = $\frac{1}{2}$ AB, und laſſen aus E auf AB die ſenkrechte Linie EP fallen. Dieſes geſetzt wiſſen wir, daß der Winkel BAE 30° hält, deswegen auch PEB = EBF = FEe = 30° und ABe = 120°. Wir haben auch AB: BE = BE: BP, oder wenn wir AB für 1 annehmen, $1 : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$; und ſo wir BQ und BP gleich machen, wird AQ = $\frac{5}{4}$. Nun aber iſt PE = Qe $= \sqrt{AP \times PB} = \sqrt{\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$; folglich AQ: QE = $\frac{5}{4} : \frac{\sqrt{3}}{4} = 5 : \sqrt{3}$ = R: tang QAe.

Log $\sqrt{3}$	= 0,2385606.
Log 5	= 0,6989700.
Log tang QAe	= 9,3395906,

welchem beynahe 19°6′ zukoͤmmt, und der Winkel Bea wird faſt 40°54′.

Geſetzt, man nehme die Winkel A und e, um 10 Minuten zu groß, ſo wird der Winkel AHe = 119°40′, deſſen Bogenhoͤhe eben ſo groß als des Nebenwinkels 60°20′. HAe wird 19°16′, und HeA 41°4′. Allein wir müſſen zuvor aus folgender Proportion die Grundlinie Ae finden: coſ 19°6′: R = $\frac{5}{4}$: Ae.

Log $\frac{5}{4}$ + log R	= 10,0969100
Log coſ 19°6′	= 9,9754083
Log Ae	= 0,1215017

Suchen wir jetzt in dem Triangel AHe die Seite AH, ſo ſtehet ſin 60°20′: Ae = ſin 41° 4′: AH.

Log

Log Ae = 0,1215017
Log ſin 41°4′ = 9,8175235

Summe = 9,9390252
Log ſin 60°20′ = 9,9389796

Log AH = 0,0000456,

dem die Zahl 1,000105 beynahe gebührt; es wird alſo der Fehler nicht mehr als 1, 2 Zoll betragen, welcher nur um ſo viel größer ausgefallen iſt als in der vorigen Beſtimmung, da wir die geſuchte Seite etwas zu klein bekommen haben.

Uebrigens ſcheint es unnöthig anzumerken, daß in gegenwärtiger Auflöſung auch jene enthalten ſey, die für den Fall gehört, da man den Winkel A zu groß, und den Winkel E zu klein genommen hat.

15. Weil wir ſo oft das Verhältniß des Fehlers der Winkel gegen den Fehler der geſuchten Seite angeführt haben, ſo ſcheint es billig, daß wir wenigſtens im Vorbeygehen die Art andeuten, dieſe Größen von verſchiedener Gattung mit einander zu vergleichen. Wir wiſſen aus der Geometrie, daß ein Cirkelbogen, welcher 57°17′44″,8 = 206264″,8 hält, wenn er gerade in die Länge ausgeſtreckt wird, ſeinem halben Durchmeſſer gleich werde, wenigſtens beynahe. Man muß demnach folgende Proportion machen: wie 206264″,8 ſich zu der Zahl der Minuten des in dem Winkel begangenen Fehlers (die man zuvor zu Secunden macht) verhalten, alſo verhält ſich die dem irrigen Winkel anliegende Seite, welche man in einem bekannten Längenmaaße, als in Schuhen, Zollen u. ſ. w. gefunden hat, und mit welcher wir den kleinen Bogen, der den Fehler des Winkels mißt, beſchrieben haben, zu der vierten Zahl, welche uns den Fehler des Winkels in eben demſelben Längenmaaße giebt: das iſt, in Schuhen, oder Zollen u. ſ. w. Zur angeführten Proportion läßt ſich ſehr bequem der Logarithme des Winkels 206264″,8 (die man als natürliche Zahl anſieht) gebrauchen, welcher iſt 5,3144251.

16. Für gegenwärtigen Verſuch ſchicket ſich auch folgende Aufgabe: den Punkt E (Fig. 1059) zu finden, dergeſtalt, daß der Abſtand des wahren Punkts B von dem C, wenn beyde Winkel A und E zu klein genommen werden; oder von den Punkten c, d, wenn die Fehler der Winkel von entgegengeſetzter Gattung ſind; oder endlich von dem Punkte D, da beyde Winkel zu groß, der kleinſte ſey. Mit dem halben Durchmeſſer BH oder BG, welcher der Bogenhöhe des Winkels HAB, oder BAG, das iſt, des bey A begangenen Fehlers, gleich iſt, beſchreibe man einen kleinen Cirkel, und verlängere BG bis in F nach Belieben. Es iſt augenſcheinlich, daß wo man immer den Stand in der Linie BF hinſetzet, die Abſtände BC, Bc u. ſ. w. größer werden, als BH oder BG, weil ſie die ſchneidenden Linien ſind im Anſehen der berührenden GC, Gc u. ſ. w., von was immer für einer Gattung die Fehler der Winkel ſeyn mögen. Um BC mit BG gleich zu erhalten, wäre nothwendig BE ſo klein zu nehmen, daß es nicht einmahl BG betrüge.

Denn man ſtelle ſich vor (Fig. 1060) KF oder KD ſey eben das, was in der vorigen Figur BG; KI aber ſey ein Theil der Linie BA, wie auch HFG ein Theil von GA. Man ſieht, daß der bey A begangene Fehler durch DKF angedeutet werde: damit der bey E begangene Fehler dieſem gleich werde, iſt unumgänglich nothwendig, daß die eine Linie EA durch den Mittelpunkt K gezogen werde, die andere EL aber den Cirkel alſo in F und L ſchneide, daß der Bo-

Bogen ABCL mit 3DF gleich werde; denn allein auf dieſe Weiſe wird DKF = AEL, und KF = FE, folglich iſt DE etwas kleiner als KD. Aus dieſem erhellet, daß es bey einem rechten Winkel B nicht möglich ſey, den Abſtand BC, BD u. ſ. w. mit BG, BH gleich zu bekommen.

17. Iſt aber ABE ein ſpitziger Winkel, ſo ſind unendlich viel Punkte E (Fig. 1061) die, bey entgegengeſetzten Fehlern der andern Winkel, den Abſtand der Scheitel des irrigen und wahren Triangels dem BH können gleich geben, doch niemahls kleiner. Man beſchreibe auf HB, die den Fehler des allzugroßen Winkels A mißt, den Halbcirkel HDB, und nachdem man eine beliebige Linie HDE gezogen hat, ſo ſetze man: HB: BD = HA: HE oder BE. Auf dieſe Art wird der Fehler des Winkels A gleich werden. Allein es zeiget ſich, daß der Winkel B um ſo viel ſpitziger ausfalle, je länger man die Seite BE machet, daß mithin dieſe jederzeit viel kleiner als AB ſeyn müſſe.

Wenn die Fehler der Winkel von gleicher Gattung wären, müßte man den Winkeln ABe ſtumpf nehmen, wollte man anders den Abſtand der Scheitel beyder Dreyecke mit HB gleich haben; und es würde wiederum ſtehen HB: MB = AB: Be, um die Länge der Seite Be zu beſtimmen.

Wenn man in dieſen beyden Fällen die Seite BE, oder Be kleiner machte, als ſie die angeführte Proportion giebt, würde der Abſtand des Punkts B von dem Scheitel des irrigen Dreyeckes wachſen. Denn um die Gleichheit der Fehler zu erhalten, die man in den Winkeln begeht, müßte man zum Beyſpiele Fm mit HM parallel ſetzen, und ihre Verlängerung würde die Seite HA auſſer dem Cirkel HDB bey h ſchneiden, mithin würde auch hB größer als HB.

Aus dieſem erkennet man ſchon, daß der Fall des kleinſten Abſtandes der Scheitel unſerer Dreyecke von jenem nicht im geringſten unterſchieden ſey, in welchem die Fehler der Winkel A und E den Fehler der geſuchten Seite aufheben.

Allgemeine Anmerkung.

18. Dieſes gab mir den Stoff des gegenwärtigen Verſuches. Wenn wir alles reiflich erwägen, ſo finden wir, daß der Stand E nur in einem einzigen Falle könne mit vollkommener Sicherheit beſtimmet werden, da nähmlich ein Winkel ohne Fehler iſt, und die Lage der Grundlinie gegeben wird. In allen übrigen gründet ſich die Wahl auf die Art, und Gattung der bey den Winkeln angenommenen Fehler. Befinden ſich dieſe in der That alſo, wie man ſie annimmt, ſo iſt es ſicher, daß man entweder den kleinſten Fehler in der geſuchten Länge erhalte, oder den ganzen vermeide. Allein wer wollte für eben dieſes Bürge leiſten, wenn nicht ein beſonderer Umſtand die Wahrſcheinlichkeit eines Falles vor dem andern weit vorzüglicher macht? Die Klugheit erfordert zum öftern, daß man vielmehr der Gefahr eines größern Fehlers ausweiche, als nur beſorgt ſey, die allerkleinſten zu begehen.

Iſt B (Fig. 1062) ein rechter Winkel, ſo wird der Fehler in der geſuchten Seite faſt mit dem Fehler des Winkels A gleich, wenn auch die Seiten AB, BE gleich ſind, und man kann dieſen noch vermindern, wenn die Seite BE kürzer wird. Aber man ſieht zugleich die Unbequemlichkeit, eine ſo lange Grundlinie AE, die allezeit größer, als AB wird, wirklich abzumeſſen.

Wir haben oben (7) geſehen daß, wenn der Winkel B ſpitzig iſt, und die Fehler der andern von gleicher Gattung, der Fehler der geſuchten Seite beynahe

nahe ſey $= \frac{\text{Fehl E} \times R + \text{Fehl A} \times \cos B}{\sin B}$. Nehmen wir nun den Fehler des Winkels A, nachdem wir ihn in ein bekanntes Längenmaaß gebracht haben, für 1 an, und berechnen nach dieſer Formel den Fehler der Seite AB, geſetzt, daß der Triangel gleichſchenklicht, der Winkel E oder B = 75°, und die Fehler von gleicher Gattung ſind, ſo finden wir ihn beynahe = 0,8; im Falle entgegengeſetzter Fehler aber = 0,53; da doch dieſer bey einem rechtwinklichten, und gleichſchenklichten Dreyecke, wenn die Fehler von eben der Gattung ſind, = 1 wird. Und ob man ſchon mit Verkürzung der Seite BE, bis der Winkel A auf 30° kömmt, dieſen Fehler auch etwas unter 0,8 bringen kann; ſo glaube ich doch nicht, daß eine ſo geringe Verminderung die Mühe bezahle, die eine längere Grundlinie, als AB ſelbſt iſt, mit ſich bringt.

Wenn ich demnach eine etwas größere Wahrſcheinlichkeit, daß die bey A und E vorfallenden Fehler einander entgegen ſind, nicht anſehen wollte, ſo glaubte ich daß es öfters zuträglich ſey, ein gleichſchenklichtes Dreyeck zu wählen, in welchem der Winkel A nicht viel von 30° abweiche. Aber ich wiederhole es noch einmahl, daß ich dieſes nur in dem Falle will verſtanden haben, da man allein die Seite AB ſuchet, nicht auch die übrigen Theile. Denn ſonſt wollte ich gern einem gleichſeitigen Dreyecke den Vorzug geben.

Scherffers, Carl, trigonometriſcher Verſuch von der Wahl des Standes, aus welchem man die Entfernung zweyer Orten abmißt ꝛc. Wien 1766 gr. 8.

III. Scherffer über die Meſſung des Abſtandes zweyer Ort, zu deren keinem man kommen kann.

1. Wenn man den Abſtand zweyer Oerter mißt, derer keiner uns den Zutritt geſtattet, als z. B. CD Fig. 1063 ſo muß man zwey Stände A und B wählen, wie auch zwey Dreyecke CBA, DAB auf einer gemeinſchaftlichen Grundlinie beſtimmen, weil der Abſtand der Scheitel derſelben eben die geſuchte Entfernung iſt.

Dieſe Triangel nun kann man entweder alſo beſtimmen, daß bey dem Stande A für den Triangel CAB unmittelbar der Winkel CAB und für den Triangel DBA der Winkel DAB genommen werde; wie auch in dem Stande B der Winkel CBA für den erſten und der Winkel DBA für den zweyten: oder man kann in dem Stande A die Winkel CAD, und DAB; in dem Stande B aber die Winkel DBC und CBA nehmen. Was immer geſchiehet, ſo kömmt es doch auf eins heraus; denn die Summe CAD + DAB giebt den Winkel CAB des Dreyecks CBA; und die Summe DBC + CBA giebt den Winkel DBA des Dreyecks DAB. Wir ſetzen alſo, daß in der Summe CAD + DAB eben ſo viel gefehlt werde (es ſey daß ſie zu groß oder zu klein ausfalle) als wenn man den Winkel auf einmal genommen hatte.

Eben einen dergleichen Fehler nehmen wir bey der Summe DBC + CBA an, als man begangen hätte, in Beſtimmung des Winkels DBA. Wenn wir überdieß annehmen, daß bey den Winkeln CBA, DAB gleich große Fehler vorgehen, ſo iſt klar, daß in der geſuchten Entfernung CD ein Fehler entſtehen müſſe, der entſtehen müßte, ſofern man in Beſtimmung der Dreyecke BAD, ACB in den Winkeln CAB, CBA; DAB, DBA gleiche Fehler begangen hätte:

2. Nun aber können beyde Winkel A und B des Dreyecks CAB zu groß ſeyn, und man erhält dafür einen andern EAB. Wären beyde Winkel zu

klein, doch die Fehler gleich groß, ſo hätte man anſtatt CAB das Dreyeck GBA beſtimmet. Auf gleiche Weiſe ſiehet man, daß anſtatt des Dreyecks DAB entweder FAB, wenn die Winkel B und A zu groß ſind, oder HAB, wenn ſie zu klein ſind, genommen werde.

In dieſem Falle der Fehler von gleicher Gattung und Größe, iſt bekannt, daß der Unterſchied unter den Winkeln CAB, CBA; GAB, GBA; EAB, EBA; wie auch DAB, DAB u. ſ. w. beſtändig gleich verbleibe; und Newton hat ſchon (Arithm. univerſ.) bewieſen, daß die Ecken E, C, G u. ſ. w. ſamt den Punkten A, B ſich in dem Umkreiſe zweyer entgegen geſezter Hyperbeln befinden, deren Durchmeſſer AB iſt.

3. Es kann hernach geſchehen, daß in dem Dreyeck CAB Fig. 1064 der Winkel A zu groß und der Winkel B um eben ſo viel zu klein genommen werde, oder umgekehrt.

Im erſten Falle bekömmt man ſtatt des Dreyecks CAB ein anderes GAB; im zweyten aber EAB. Aus gleicher Urſache geben die entgegengeſetzten Fehler anſtatt des Dreyecks DAB entweder HAB oder FAB.

Und wer ſiehet nicht ſogleich, daß wegen gleicher Fehler von entgegengeſetzter Gattung die Summen der Winkel A und B jederzeit unverändert verbleiben, wie auch folglich die Winkel G, C, E; F, D, H; und alſo um alle ungleiche Vierecke, die durch Verbindung der Spitzen G, C, E mit H, D, F können geſtaltet werden, eben derſelbe Cirkel könne beſchrieben werden: wenn nur die Summen der Winkel A, B in beyden Dreyecken gleich ſind, welches wir größerer Leichtigkeit wegen annehmen: denn ſonſt müßte um ein jedes Dreyeck ein beſonderer Cirkel beſchrieben werden.

4. Es kann ſich endlich zutragen, daß in dem Dreyecke CBA die Fehler von gleicher Gattung ſind, und in dem Dreyecke DAB von entgegengeſetzter, ſomithin die Spitzen des erſten G, C, E in dem Umkreiſe einer Hyberbel; die Spitzen des zweyten, in dem Umkreiſe eines Cirkels CABD liegen Fig. 1065.

5. Aus dieſen Anmerkungen kennen wir ſchon einige Folgen ziehen, und zwar erſtens, wenn im Falle Fig. 1063 die Fehler der Dreyecke CAB, DAB, bey allen Winkeln von gleicher Gattung ſind, ſo wird der Fehler der geſuchten Länge CD um ſo viel größer, je kleiner die Grundlinie AB in Anſehen CD iſt. Denn wenn die Grundlinie klein iſt, ziehen ſich die Hyperbeln geſchwinder zuſammen, und ihre entgegen ſtehenden Aeſte weichen mehr von einander ab.

Zweytens. Wenn in dem Dreyecke CAB die Winkel zu klein, in dem andern DAB aber zu groß genommen werden, und AD größer iſt als AC, können die Fehler der Winkel den Fehler in der Länge CD nicht aufheben; gleichwie auch dieſes nicht geſchehen kann, wenn in dem erſten Dreyecke die Winkel zu groß, und in dem zweyten zu klein angeſetzt werden.

Drittens. Wenn die Dreyecke CAB, DAB gleich ſind, und in dem erſten die Winkel zu groß, in dem zweyten zu klein ſind; ſo haben die Fehler der Winkel den Fehler in der Länge CD beynahe auf.

Viertens. Wenn bey dem Falle Fig. 1064, allwo wir angenommen haben, daß die Fehler der Winkel A, B in beyden Dreyecken von entgegengeſetzter Gattung ſind, man den Winkel A des Dreyecks CAB zu groß, und den Winkel B zu klein angenommen hat; wie auch in dem Dreyecke DAB der Winkel A zu groß und B zu klein iſt, oder im Gegentheil auf gleiche Weiſe in gemeldeten Dreyecken gefehlt wird, ſo begehet man keinen Fehler in der geſuchten Entfernung CD. Denn der Scheitel des erſten Dreyecks wird G, des zweyten

ten F. Weil nun CG mit DF gleich iſt, ſo iſt auch GC + CF = CF + FD. folglich ſind die Sehnen gleicher Bogen CD, GF auch gleich. Eben dieſes verſtehet ſich, wenn man die Scheitel E, H nimmt.

Fünftens. Wenn aber in dem Dreyecke CAB der Winkel A zu klein, und B zu groß wird; wie auch in DAB der Winkel B zu klein, und A zu groß; oder wenn im Gegentheile in dem erſten A zu groß, und B zu klein; in dem zweyten B zu groß, und A zu klein geſetzt wird, ſo wird der Fehler der Linie CD in beyden Fällen merklich ſeyn.

Sechſtens. In beyden letzten Fällen iſt der Fehler in der Länge CD am kleinſten, wenn CD der Durchmeſſer des Cirkels wird. Denn der Fehler beſtehet in dem Unterſchiede zwiſchen der Sehne FE, oder GH, und der Sehne CD, derer Bogen ſich von dem Bogen EF oder GEF durch den doppelten Bogen GC oder CF unterſcheidet. Nun aber iſt der Unterſchied der Sehnen um ſo viel kleiner, je näher ſie dem Durchmeſſer kommen, nähmlich als gedoppelter Bogenhöhen der Winkel, die von einem rechten nicht viel abweichen.

Siebentens. In dem Falle Fig. 1065 wird der Fehler in der Länge CD kleiner, wenn man die Winkel des Dreyecks CAB zu klein nimmt, in dem Dreyecke DAB aber den Winkel A zu groß, und den Winkel B zu klein, als wenn das Widerſpiel geſchiehet; wenigſtens iſt dieſes wahr, wenn die Seiten AC, BD nicht gar zu ſehr unterſchieden ſind. Ja es kann ſich auch ereignen, daß der Fehler in der geſuchten Länge gänzlich wegfällt, beſonders wenn der Winkel CAB kleiner iſt als DAB. Die Folge gründet ſich darauf, daß, wenn die Punkte G, O, E in der Hyperbel ſind, die Linien BG, BC, BE mehr unterſchieden ſeyn müſſen, als wenn ſie auf der Linie AE lägen. Im Gegentheil muß ſich ein kleinerer Unterſchied zwiſchen den Linien AH, AD, AE befinden, als welche ſich an dem Umkreiſe des Cirkels enden, als wenn ſie durch die Linie BF abgeſchnitten würden.

Aus dieſem aber folgt, daß der Abſtand der Scheitel in den Dreyecken, welche an die Hyperbel ſtoſſen, mehr wachſe, als bey jenen, derer Scheitel in dem Umkreiſe des Cirkels liegen, und mithin der Abſtand der Punkte G, F weniger von CD unterſchieden ſey, als der Punkt H, E.

6. Aus allem dieſen erſiehet man leicht, daß man am natürlichſten jenes annehmen kann, was wir zum Fünften vorgetragen haben. Und wird desgen die beſte Wahl der Stände ſeyn, wofern man die Winkel CAD, DBC beynohe 90° nimmt, und die Summen der Winkel, A, B, nach der oben (3) gemachten Anmerkung gleich. Denn in dieſem Falle iſt der Fehler in der Länge CD entweder der kleinſte oder gar keiner.

7. Es kann einem aber wahrſcheinlicher ſcheinen, daß wenn man die Winkel CAB, DBA, in den Dreyecken gleiches Nahmens abgetheilt nimmt, d. i. anſtatt CAB, die zwey CAD und DBA, daß, ſage ich, der Fehler des Winkels A in dem Dreyecke CAB noch einmal ſo groß werde, als der Fehler des Winkels B; wie auch der Fehler des Winkels B in dem Dreyecke DBA doppelt ſo groß, als der Fehler des Winkels A. Wenn wir dieſes annehmen ſo iſt der Fall, der ſich am leichteſten unterſuchen läßt, da die Dreyecke gleichſchenklicht ſind. Und kann man dieſes erhalten, wenn der Nebenwinkel des Winkels CAB noch einmal ſo groß wird, als der Winkel CBA, wie auch der Nebenwinkel des Winkels DBA noch einmal ſo groß als der Winkel DAB.

Wenn es ſich alſo verhält, ſo iſt klar, daß die Punkte G, C, F, D, H Fig. 1066 ſich in den Umkreiſen zweyer gleichen Cirkel befinden, derer halber

Durchmeſſer AB, und die Mittelpunkte A, B ſind Setzen wir nun, der Winkel CAB werde um GAC zu groß; der Winkel CBA aber um CBG zu klein genommen, und CAG = 2CBG; gleichfalls ſey der Abgang FBD bey dem Winkel DAB = 2 FAD, das iſt, dem doppelten Fehler, um welchen der Winkel DAB zu groß iſt, ſo bekommen wir GF anſtatt CD. Aus dem Punkte r in welchen ſich dieſe zwey Linien ſchneiden, beſchreibe man die zwey kleinen Bogen Fn, Co, und laſſen die zwey ſenkrechten Linien Bq, Ap aus B und A auf GF und CD fallen. Weil die Bogen FD, CG ſehr klein ſind, ſo muß man die Dreyecke FnD, qDB für ähnlich anſehen, und ſtehet alſo nD: FD = qB: DB. Aus gleicher Urſache ſind die Dreyecke CGo, GpA ähnlich, und man hat Go: GC = pA: GA. Hieraus ſchließt man, daß wenn nD mit Go gleich ſeyn ſoll, auch Bq mit Ap gleich werden müſſe, und die Grundlinie AB mit CD parallel; ſonſt können die Fehler der Winkel den Fehler in CD nicht aufheben, ſondern wenn CAB > DBA, wird GF < CD, weil der Unterſchied der Bogenhöhen kleinerer Winkel qBD größer iſt, als der Unterſchied der Bogenhöhen größerer Winkel pAC, oder pAG.

Läuft die Grundlinie mit CD parallel, und iſt der Winkel CAB wie auch DAB zu groß, hingegen die Winkel CBA, DAB zu klein: ſo verhält ſich der Fehler des Winkels CAB, nach der Grundlinie AB als ſeinem Halbmeſſer gerechnet, zu dem Fehler in der geſuchten Weite CD, wie der Halmeſſer zu der gedoppelten Bogenhöhe des Winkels CAB. Dieſes zeiget ſich aus der Aehnlichkeit der Dreyecke CGo, GAp, und weil Ap die Bogenhöhe des Winkels CAB iſt.

Wollte einer behaupten, es ſey wahrſcheinlicher, daß wenn die Winkel CAD + DAB oder DBC + CBA genommen werden, man zwar in einem jedweden fehle, doch die Fehler von entgegengeſetzter Gattung ſeyn; dieſer müßte uns zuvor bereden, daß es allezeit ſicherer ſey, einen Winkel, welcher es immer ſeyn möge, lieber theilweiſe als auf einmahl zu meſſen, welches aber gar nicht wahrſcheinlich iſt. In dieſem Falle würden die Winkel CAB, DBA für richtig zu halten, und nur die CBA und DAB als mangelhaft anzuſehen ſeyn.

8. Wenn einer die geometriſche Linie zu wiſſen verlangt, auf die die Scheitel der Dreyecke ſtoſſen, deren bey der Grundlinie liegende Winkel ungleich, jedoch in einem gewiſſen Verhältniſſe jederzeit wachſen oder abnehmen, ſo kann man in dieſem Stücke verſchiedene Bedingungen annehmen. Hier ſcheint es am beſten, wenn man ſetzet, daß die ſtumpfen Winkel Fig. 1063 theilweiſe genommen werden, und ihr Zuwachs oder Abnahme noch einmahl ſo groß ſey als der ſpitzigen. Die geometriſche Linie aber, in der die Spitzen H. D. F. u. ſ. w. liegen, kann man auf folgende Art ſehr leicht beſtimmen.

Man nehme die Grundlinie BA Fig. 1067 für den halben Durchmeſſer des Cirkels BRO, und RA ſey auf BA ſenkrecht. Wenn der ſpitzige Winkel B von 0°, und der ſtumpfe A von 90° an zu wachſen anfangen ſoll, ſo nehme man die Bogen RS, OT gleich. Der Punkt M, in welchem ſich AS, und BT ſchneiden, wird zur geſuchten Linie gehören.

Man ſetze BA = a, AQ = Z, AP = x, PM = y, und ziehe die Linie OT, wie auch TZ auf AO ſenkrecht, und VS mit AO parallel, endlich SN parallel mit RA. Der gleichen Bogen RS, OT wegen iſt klar, daß TZ = VS = AN, und SN = AZ. Weil nun die Dreyecke BAQ, BTO ähnlich ſind, ſo ſtehet (BQ $= \sqrt{a^2 + Z^2}$): AQ (Z) = BO (2a): TO ($= \frac{2aZ}{\sqrt{(a^2+Z^2)}}$). Aus der Eigen-

genſchaft des Cirkels iſt BO : OT = OT : OZ

$$2a = \frac{2aZ}{\sqrt{(a^2+Z^2)}} = \frac{2aZ}{\sqrt{(a^2+Z^2)}} : \frac{2aZ^2}{a^2+Z^2}.$$

Mithin $AZ = AO - OZ = a - \frac{2aZ^2}{a^2+Z^2} = \frac{a^3 - aZ^2}{a^2+Z^2}$. Aus dieſem findet man $TZ = \frac{2a^2Z}{a^2+Z^2}$. Ueberdieß geben die ähnlichen Dreyecke ASN, AMP, AN : SN = AP : PM, und man erhält $y = \frac{x(a^2 - Z^2)}{2aZ}$.

Die Dreyecke BAQ, BPM, die gleichfalls ähnlich ſind, geben auch BA : QA = BP : MP; hieraus hat man einen zweyten Werth des y, nähmlich $y = \frac{aZ + Zx}{a}$.

Wenn man dieſe zwey Werthe zuſammen nimmt, bringt man das Z aus der Gleichung weg, und die Gleichung für die geſuchte Linie wird

$$3xy^2 - x^3 + 2ay^2 - 2ax - a^3x = 0.$$

Man erſiehet ſchon, daß der Aſt AMCD der Aufgabe genug thue; aber die Eigenſchaften dieſer Linie zu unterſuchen, gehöret nicht hierher.

Dieſes allein bemerken wir, daß ſie den Cirkel bey C alſo durchſchneide, daß der Bogen OC = 45°. Bekommen die Bogen RH und OG 30°, ſo werden die Linien BH, AG parallel, und der Punkt, in dem ſie zuſammen ſtoſſen, iſt unendlich entfernt. Nehmen die Bogen GO, HR noch durch die übrigen 30 Grade allmählich ab, ſo müſſen die Linien HB, AG auf der entgegen geſetzten Seite ſich ſchneiden, und durch ihr Zuſammenſtoſſen bilden ſie einen andern Aſt FB. Gehet der Punkt H über, in das Viertel RB des Cirkels, und der Punkt G in das Viertel OE, ſo beſchreibet der gemeinſchaftliche Einſchnitt der gemeldeten Linien einen neuen Bogen BKL, der durch K bey 45° gehet, und eine auf AB ſenkrechte Aſymptote hat, deren Abſtand von A, $\frac{2}{3}$ AB beträgt. Dieſer Bogen würde die Scheitel der Dreyecke berühren, in denen der Winkel A von 0° an bis 90° doppelt ſo viel wächſt, als der Winkel B von 45° angefangen bis 90°.

9. Wollte man, daß der Winkel A von 90° bis 0° abnehme, und der Winkel B von 0° bis auf 45° zunähme, mit der vorigen Bedingung, daß die Veränderungen des erſten noch einmal ſo groß, als die Veränderungen des 2ten wären; ſo wäre nur vonnöthen, die Bogen OT in dem Quadranten OR, und die gleichen Rs in dem Quadranten RB zu nehmen. Der Einſchnitt der Linien sA, BT würde die Linie AmnB durchlaufen.

Würde der Winkel A negativ, oder nähme man die Bogen Rs in dem Quadranten BXE, und die Bogen OT in dem Quadranten RKB, d. i. fienge der Winkel A an, von 0° bis 90° zu wachſen, und der Winkel B von 135° bis 90° abzunehmen, nach dem vorigen Geſetze; ſo beſchrieben die zuſammen ſtoſſenden Linien HB, GA einen Bogen Bd, deſſen Aſymptote auf AB ſenkrecht fällt, und von A, um 2 AB abſtehet.

Wenn endlich der Bogen RS für den Winkel A in dem Viertel BR, von B gegen R genommen würde, daß beyde Winkel nach eben dem Geſetze von 0° an wüchſen, ſo würde man eine gemeine Hyperbel finden, deren Querare $\frac{1}{3}$ AB, der Brennpunkt A, und B der Scheitel der entgegen geſetzten iſt. Dieſe würde den Cirkel bey R durchſchneiden, und der Winkel B könnte bis auf 60° zu neh-

nehmen, weil die Aſymptote der Hyperbel ihre Axe unter einem gleichen Winkel ſchneidet.

10. Es würde auch nicht gar zu ſchwer fallen, die Größe des in der geſuchten Weite CD Fig. 1063 begangnen Fehlers zu beſtimmen, wenn man die Scheitel der Dreyecke, in was immer für einer gegebenen Linie annähme. Denn man könnte einen kleinen Theil derſelben, als DF oder DH, mit allem Rechte für einen gleich großen Theil ihrer Tangente, die ſie bey D oder bey F berühret, anſehen. Nun aber weil alle Winkel in den beſtimmten Dreyecken bekannt ſind, ſo wäre es leicht auch den Winkeln zu finden, den die Tangente mit der Sehne BD oder BF macht; und würde alſo ſtehen: wie die Bogenhöhe dieſes Winkels zu dem halben Durchmeſſer; alſo verhält ſich der Fehler DBF zu dem kleinen Theile DF. Nach dieſem ſtelle man ſich vor, G und F werden durch eine Linie verbunden. Man wird aus den bekannten Winkeln GBF und zweyen Seiten BG, BF, auch den Winkel GFB ohne Mühe erhalten; und ſofern man von dieſen jenen abziehet, den die Tangente mit der Sehne BD macht, ſo hat man den Winkel DFG, und wird wiederum ſtehen: der halbe Durchmeſſer verhält ſich zur Bogenhöhe des Mitwinkels GFD, wie DF (welches man ſchon gefunden hat) zu dem Unterſchiede zwiſchen CD und GF, der ſich auf der Seite des Winkels D zeiget. Durch eine gleiche bey dem Winkel C vorgenommene Berechnung würde es ſich zeigen, wie groß der ganze Unterſchied zwiſchen CD und GF ſey.

Entfernungen zu meſſen, vermittelſt des Abſchreitens, ſiehe Linie gerade zu meſſen mit Schritten.

Entfernungen zu meſſen, vermittelſt des Aſtrolabiums.

2. Eine Diſtanz zu beſtimmen, die unmittelbar nicht gemeſſen werden kann. Fig. 1025.

Man meſſe mit dem Aſtrolabium den Winkel C, und die Linien AC, CB; ſo hat man Data genung, um auf dem Papier ein Dreyeck entwerfen zu können, welches dem auf dem Felde ähnlich iſt.

2. Andere Auflöſung. Fig. 1025.

Man meſſe den Winkel C mit dem Aſtrolabium, ferner die Linien AC und BC.

Nun ſuche man die Linie AB und die zwey übrigen Winkel zu bekommen. Dieſes geſchiehet alſo: $AC + BC =$ der Summe der zwey Linien, und $AC - BC =$ ihrer Differenz.

Den bekannten $< C$ von $180°$ abgezogen, und den Reſt halbirt, kömmt $\frac{180° - C}{2} =$ der halben Summe der Winkel A und B; ferner $B - A$ die ganze und $\frac{B - A}{2}$ die halbe Differenz der Winkel A und B.

Nun iſt alſo, vermöge des Satzes; daß in jedem Dreyecke ſich die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der 2 Winkel an der Grundlinie, zur Tangente ihrer halben Differenz verhalte; $(AC + BC) : (AC - BC) = \text{Tang}\,\frac{180° - C}{2} : \text{Tang}\,\frac{B - A}{2}$; folglich iſt

$\text{Log Tang}\,(\frac{180° - C}{2}) + \text{Log}\,(AC - BC) - \text{Log}\,(AC + BC) = \text{Log}$

Tang

Tang $(\frac{B-A}{2})$ = der halben Differenz der 2 unbekannten Winkel.

Nun die halbe Differenz der Winkel zu ihrer halben Summe addirt, iſt $\frac{180^\circ - C}{2} + \frac{B - A}{2}$ = B dem gröſſern Winkel; und ſubtrahirt man dieſelbe davon, ſo iſt $\frac{180^\circ - C}{2} - \frac{B + A}{2}$ = A dem kleinern Winkel.

Hat man die Winkel gefunden, ſo findet man die Seite AB nach dem Satze: wenn in einem Dreyecke eine Seite, und die daran liegenden Winkel gegeben ſind, gar leicht.

In dieſer Aufgabe, wird alſo der Winkel und ſeine beyden Schenkel gemeſſen. Allgemein heißt ſolche alſo.

3. Wenn zwey Seiten eines Dreyecks CA, CB *Fig.* 1026 nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel ACB gegeben ſind, die dritte Seite AB (die Entfernung welche beſtimmt werden ſoll), als auch die übrigen Winkel CAB, CBA zu finden.

Wenn man die Seiten AC = a, BC = b und des Winkels ACB ſinus = p nennet, die unbekannte Seite AB = Z, den ſinus von A = x und den ſinus von B = y: ſo iſt

$$x : y = b : a$$
$$x : p = b : Z$$
$$y : p = a : Z.$$

Weiter iſt $y = p\sqrt{(1 - x^2)} + x\sqrt{(1 - p^2)}$

aber $x = \frac{by}{a}$, alſo iſt

$$y = p\sqrt{(1 - \frac{b^2y^2}{a^2})} + \frac{by}{a}\sqrt{(1 - p^2)} \text{ oder}$$

$$y.(a - b)\sqrt{(1 - p^2)} = ap\sqrt{(1 - \frac{b^2y^2}{a^2})}. \text{ Daher}$$

$$y = \frac{ap}{\sqrt{(a^2 - b^2 - 2ab\sqrt{(1 - p^2)})}}. \text{ Gleichfalls}$$

$$Z = \frac{ap}{y} = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1 - p^2)})}. \text{ Und}$$

$$x = \frac{bp}{Z} = \frac{bp}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1 - p^2)})}}.$$

Weil $\sqrt{(1 - p^2)}$ der Coſinus von C iſt, den man = q ſetzen kann, wodurch $Z = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2abq)}$ wird, ſo muß man merken, daß der Coſinus eines gröſſern Bogens als 90° negativ iſt.

Wenn C = 108°24′ = 180° − (71°36′), a = 75, b = 58, ſo iſt q = − 0,3156490 und

$- 2q.\,ab = + 2746,1463$

$a^2 + b^2 = 8989$

$a^2 + b^2 - 2q.\,ab = 11735,1463;$

die Wurzel hievon iſt = 108,32 = Z.

4. Wenn man ſtatt des richtigen Winkels C einen andern, der von ihm um etwas ſehr geringes unterſchieden iſt, genommen hätte, zu finden, wie viel die Seite Z dadurch verändert wird.

Die unrichtige Seite ſey $= Z + dZ$, des unrichtigen Winkels Sinus $= p + dp$, der Coſinus $= q + dq$, eben wie Z die richtige Seite AB, p, und q der Sinus und Coſinus des richtigen Winkels C ſind. Der Sinus des kleinen Winkels, der den Unterſchied zwiſchen dem richtigen und dem unrichtigen ausmacht, ſey $= e$. So hat man

$Z + dZ = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\,(q + dq))}$

und $Z^2 + 2ZdZ + dZ^2 = a^2 + b^2 - 2abq - 2abdq$

aber $Z^2 = a^2 + b^2 - 2abq$

alſo $2ZdZ + dZ^2 = 2abdq$.

Hieraus folgt durch die Methoden der Reihen, daß

$$dZ = -\frac{ab}{Z}\,dq - \frac{a^2b^2}{2Z^3}\,dq^2 - \frac{a^3b^3}{4Z^5}\,dq^3 \ldots$$

Nun ſind zwar dZ, dq, dp, e, nicht unendlich kleine Größen, ob ſie wohl in Vergleichung, mit den andern ſehr klein ſind, gleichwohl wird in dem Falle, da dq ſehr klein iſt, das erſte Glied dieſer Reihe, den Werth von dZ ziemlich genau geben, oder es iſt der Wahrheit ſehr nahe $dZ = \frac{ab}{Z}\,dq$.

Dieſer Fehler an der Seite AB oder dZ läßt ſich auch noch auf eine Art, wie folget ausdrücken: $p + dp = \sqrt{(1 - e^2)} + eq$. Aber $\sqrt{(1 - e^2)}$ iſt beynahe $= 1 - \frac{1}{2}e^2$; daher $dp = qe - \frac{1}{2}pe^2$, beynahe $= qe$. Nun iſt $q + dq = \sqrt{(1 - p^2 - 2pdp - dp^2)}$, daher $dq = -\frac{pdp}{q}$, und alſo $dq = -pe$, daher $dZ = \frac{-ab}{Z} - pe = +\frac{abpe}{Z}$.

Wenn man die Rechnung mit den Log. anſtellt, ſo muß man bemerken, daß der Halbmeſſer hier $= 1$ geſetzt iſt, und 0 zum Logarithmen hat. Da nun die logarithmiſchen Tafeln den Logarithmus des Halbmeſſers $= 10$ ſetzen, ſo muß man für jeden Log. Sinus, den man aus den Tafeln nimmt, den Log. 10, für den Halbmeſſer der Tafeln abziehen, und folglich weil wir zwey Logarithmen von Sinus haben, nähmlich log p und log e, ſo müſſen wir die Summe um 20 vermindern, um alles auf den Halbmeſſer $= 1$ zu bringen.

Z. E. Wenn man eben die Zahlen des vorigen Exempels behält, und ſetzt, unter dem Meſſen ſey 108°29′ ſtatt 108°24′ genommen worden, daß man alſo 5′ zu viel genommen habe, ſo bekommt man

e = ſin 5, und l. ab = 3,6384893
l. ſin 108°24′ = 9,9772095
l. ſin 5′ = 7,1626960

Summe = 20,7783948

abge-

abgezogen	=	20,0000000
l. abpe	=	0,7783948
lZ	=	2,0347087
ldZ	=	— 1.2563139
l. 100000	=	+ 5.
		+ 3,7436861

der letzte Log. für dZ giebt den Fehler in hunderttauſend Theilchen der angenommenen Einheit, und folglich dZ = 0,05542.

Wenn wir das ganze Z + dZ durch ſeinen Werth $\sqrt{}(a^2 + b^2 - 2ab\,(q + dq)$ brauchen, und Coſ 108°29′ ſtatt q + dq brauchen, ſo finden wir Z + dZ = 108°38′ welches dZ = 0,060 giebt.

Wenn man einen kleinern Winkel als den richtigen nimmt z. E. wenn man 108°19′ ſtatt 108°24′ genommen hatte, ſo werden e und dZ verneinte Größſen, weil Z alsdann vermindert wird.

5. Formel des Hrn. Marinoni de Re ichnographica Lib. I. Cap. V num. 5. Schol. Man ziehe CQ = f ſenkrecht auf die Grundlinie AB, ſo iſt x $= \frac{f}{a}$, und $Z = \frac{pba}{f}$. Nennt man die Länge von dem halben Umkreiſe = L, wenn der Halmeſſer = 1 iſt, und wird e, als der Sinus eines kleinen Bogens für den Bogen ſelbſt genommen, der eine Zahl von m Minuten enthält, dergleichen in dem halben Umkreiſe 60. 180 oder 10800 enthalten ſind; ſo bekömmt man $e = \frac{m\,L}{10800}$. Und wenn dieſer Werth ſtatt e, imgleichen $\frac{pba}{f}$ ſtatt Z geſetzt wird, ſo erhält man den Fehler $dZ = \frac{m.\,L.\,f}{10800}$; weil nun $L = 3,14159\ldots$ ſo wird $dZ = \frac{0,0314159\ldots}{108}.\,mf$ wo m eine Anzahl von wenig Einheiten iſt.

Wenn zwey Linien BA, AC. Fig. 1089 ihrer Lage nach (*poſitione*) gegeben ſind, den Punkt C in der einen zu finden, welcher zum Scheitelpunkt eines gegebenen Winkels BCE angenommen werden muß, wenn die Sehne dieſes Winkels BE, oder das Stück, das ſeine Schenkel auf der andern abſchneiden, am kleinſten ſeyn ſoll.

Wenn man den Punkt M unendlich nahe bey C nimmt, die Punkte M und B zuſammen ziehet, und den Winkel BMF = BCE macht, ſo iſt aus der Natur des Kleinſten des Winkels BMF Sehne auf der Linie AB ſo groß, als die Sehne des Winkels BCE, und alſo muß MF die Linie AB in E ſchneiden. Aber weil BCE = BME, ſo befinden ſich dieſe Winkel in einem Abſchnitte eines Kreiſes, deſſen Grundlinie BE iſt, und alſo iſt BCME ein Viereck, das in einem Kreiſe beſchrieben iſt; daher CBE + CME = 2R, (wo R einen rechten Winkel bedeutet) oder CBA + CMB + BCE = 2R, das iſt CBA + BCE = BCA + CBM, oder 2R — A — BCA + BCE = BCA + BCM. Das iſt 2R — A + BCE — CBM = 2BCA. Und wenn man den unendlich kleinen Winkel CBM wegläßt, ſo kömmt BCA = R — ½ A — ½ BCE. Wenn man aber auch BCE als ſehr klein anſiehet, und es ebenfalls wegläßt, ſo iſt BCA = R — ½ A; daher CBA = BCA, und CA = BA.

Wenn man nun die Länge AB ſucht, an deren eines Ende A man kommen kann, an das andere B aber nicht, ſo muß man zu dieſem Ende die Standlinie und die Winkel A und C meſſen. Ein Fehler alſo den man bey Meſſung des Winkels A begehet, hat die geringſte Folge, bey Beſtimmung der geſuchten Weite AB, wenn man AC = AB annimmt, und dieſes wird erhalten, wenn man in der Linie AC ſo weit fortgehet, daß der Winkel ACB = R — ½ A wird. Die Beſchaffenheit des Platzes welcher uns beym Feldmeſſen gegeben iſt, und andere Umſtände, werden dieſes nicht allemahl zulaſſen, doch aber wird der Nutzen von ſolcher Unterſuchung dieſer ſeyn, daß man ſiehet, man müſſe dem Punkte C ſo nahe zu kommen ſuchen, als möglich iſt.

II. Eine Diſtanz zu beſtimmen, wenn man nur zu dem einen Punkte aus dem Standpunkte kommen kann. Fig. 1027.

Man ſtelle das Inſtrument horizontal und perpendikular über C, richte das unbewegliche Lineal nach A, ſchraube das Aſtrolabium feſt, viſire mit der beweglichen Regel nach B: ſo findet man den Winkel C. Dann meſſe man die Linie AC, ſetze das Inſtrument in A, ſchraube es feſt, nachdem man das unbewegliche Lineal ſo lange gedrehet, bis es C geſchnitten, viſire mit dem beweglichen nach B: ſo findet man den Winkel A.

Fig. 1027. Dieſe Aufgabe trigonometriſch aufzulöſen ſchließe man ſo

$$\text{ſinus } B : \text{ſin } C = AC : AB$$

$$\frac{\text{ſinus } C\ AC}{\text{ſin } B} = AB$$

Will man noch BC, ſo ſage man

$$\text{ſin } B : \text{ſin } A = AC : BC$$

$$\frac{\text{ſin } A.\ AC}{\text{ſin } B} = BC.$$

III. Eine Diſtanz zu beſtimmen, wenn man zu keinem Punkte aus dem Standpunkte kommen kann. Fig. 1028.

Man nehme eine willkürliche Standlinie CD, mache nach dem verjüngten Maaßſtabe cd gleich groß; ſetze das Inſtrument in D, dann in C, meſſe die Winkel BDA, ADC, ACB, BCD.

An cd ſetze man d, c, die beobachteten Winkel, ſo geben ſich dadurch die Punkte a, b, deren Weite a, b auf dem Papier gleich der Weite AB auf dem Felde.

Beweis. $\triangle\ ACD \sim \triangle\ acd$
$\triangle\ BCD \sim \triangle\ bcd$

$$CD : CA = cd : ca$$
$$CB : CD = cb : cd$$
$$CB : CA = cb : ca$$

Nun iſt auch $ACD = acd$
$BCD = bcd$
folglich $ACB = acb$
und $\triangle\ ACB \sim acb$
daher $CA : AB = ca : ab$
$CB : AB = cb : ab.$

Dieſe Aufgabe trigonometriſch aufzulöſen.

1. Im

1. Im Dreyeck ACD ſuche man aus den beyden Winkeln ACD, ADC und der Seite CD die Seite DA.

2. Eben ſo DB im △ BDC, aus BDC, BCD und DC.

3. Im Dreyeck DAB, die übrigen Winkel aus DA, DB und ADB.

4. Eben in demſelben aus den gefundenen Seiten und Winkeln, die Seite AB.

Die algebraiſche Formel für dieſes Verfahren, iſt folgender Geſtalt beſchaffen: (wo ſ vor einen Winkel, deſſelben Sinus für den Halbmeſſer = 1 bedeutet). Wenn CD = c ſo iſt

$$\frac{\text{ſ}\,ACD}{\text{ſ}\,CAD}\,c = AD \quad \frac{\text{ſ}\,BCD}{\text{ſ}\,CBD}\,c = BD$$

$$\text{Daher } AB = C\sqrt{}\left(\frac{\text{ſ}\,ACD^2}{\text{ſ}\,CAD^2} + \frac{\text{ſ}\,BCD^2}{\text{ſ}\,CBD^2} - 2\,\frac{\text{ſ}\,ACD.\ \text{ſ}\,BCD}{\text{ſ}\,CAD.\ \text{ſ}\,CBD}.\ \text{Coſ}\ ADB\right).$$

Exempel. Wenn ACD = 96°, BCD = 79°, ADC = 69°, BDC = 89, C = 70; ſo iſt CAD = 15°, CBD = 12° und ADB = 20. Aber l ſ ACD − l ſ CAD

oder $l.\ \frac{\text{ſ}\,ACD}{\text{ſ}\,CAD} = 0,5846181$

mit 2 multiplicirt

oder $l.\ \frac{\text{ſ}\,ACD^2}{\text{ſ}\,CAD^2} = 1,1692362$

die dazu gehörige Zahl = 14,76

Eben ſo findet man $\frac{\text{ſ}\,BCD^2}{\text{ſ}\,CBD^2} = 22,29.$

Zuſammen = 37,05

$l.\ \frac{\text{ſ}\,ACD}{l\ CAD} = 0,5846181$

$l.\ \frac{\text{ſ}\,BCD}{\text{ſ}\,CBD} = 0,6740677$

Zuſammen = 1,2586858

l. Tab. Coſ ADB = 9,9729858

= 11,2316716

abzuziehen log. rad 10;

1,2316716

zugehörige Zahl = 17,05

mit 2 multiplicirt = 34,10

abgezogen von = 37,05

bleibt 2,95

$\sqrt{2,95} = 1,717$

c = 70 alſo

AB = 120,190.

Der Logarithme des Halbmeſſers in den Tafeln, oder 10, wird abgezogen, damit man die Logarithmen, die aus den Tafeln genommen werden, als Logarithmen der Sinus, für den Halbmeſſer 1 gebrauchen kann; aber in den Quotienten, wo ſich einerley Anzahl von Sinus im Dividendus und im Diviſor, als in I. $\frac{\text{ſ}\,ACD}{\text{ſ}\,CAD}$ befindet, iſt dieſer Abzug nicht nöthig, weil $\frac{\text{ſ}\,ACD}{\text{ſ}\,CAD}$ einerley bleibt, der Halbmeſſer mag 1 oder 10000000 ſeyn.

Käſtner in ſeiner Abh. von Fehlern beym Feldmeſſen; in den Schwed. Abh. 15 B. S. 139.

Auflöſung von Herrn *Lexel* (de reſolutione Polygonorum rectilineorum Diſſ. II. im 20 Bande der neuen Petersburger Commentarien)

Im Vierecke ABCD Fig. 1167 iſt gegeben

die Seite $AD = d$

der Winkel $BAD = A$

$CAD = \alpha$

$CDA = D$

$BDA = \delta$

man ſoll finden

die Seite $BC = b$

den Winkel $ABC = B$

$BCD = C$.

Auflöſung und Beweis

I. Aus dem Dreyecke BDC hat man $BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BC\,CD.\,\text{Coſ}\,BDC$ (♀). Es iſt aber

$BD : AD = \sin A : \sin(A+\delta)$

$$\text{alſo } BD = \frac{d.\sin A}{\sin(A+\delta)}$$

$CD : AD = \sin\alpha : \sin(\alpha + D)$

$$\text{mithin } CD = \frac{d.\sin\alpha}{\sin(\alpha+D)}$$

auch iſt $\text{Coſ}\,BDC = \text{Coſ}\,D.\,\text{Coſ}\,\delta + \sin D.\sin\delta$.

Setzt man nun dieſe für BD, CD, und BDC gefundene Werthe in die Gleichung (♀): ſo erhält man

$$bb = dd\left[\frac{\sin A^2}{\sin(A+\delta)^2} + \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha+D)^2} - \frac{2\sin A\sin\alpha}{\sin(A+\delta)\sin(\alpha+D)}(\text{coſ}\,D.\,\text{coſ}\,\delta + \sin D\sin\delta)\right].$$

II. Eine bequemere Auflöſung findet ſich, indem man ſo verfährt, als wenn aus den drey Seiten AB, CD, AD und den Winkeln BAD, CAD, die Seite BC geſucht werden ſollte.

Heiſſen nun $AB = a$, $CD = c$ ſo hat man $b^2 = a^2 + c^2 + d^2 - 2ad.\,\text{Coſ}\,A + 2ac.\,\text{Coſ}(A+D) - 2cd.\,\text{Coſ}\,D$

$= (a.\sin A - c.\sin D)^2 + (d - a.\,\text{Coſ}\,A - c.\,\text{Coſ}\,D)^2$:

Daher wenn $\frac{a.\sin A - c.\sin D}{d - a.\,\text{Coſ}\,A - c.\,\text{Coſ}\,D} = \tan F$ geſetzt wird,

$$\therefore b = \frac{a.\sin A - c.\sin D}{\sin F}$$

=

$$= \frac{b - a. \operatorname{Cof} A - c. \operatorname{Cof} D}{\operatorname{Cof} F}.$$

Nun iſt $a = \frac{d. \sin \delta}{\sin(A+\delta)}$

$c = \frac{d. \sin \alpha}{\sin(\alpha+D)}$

alſo Tang F

$$= \frac{\sin A \sin \delta (\alpha + D) - \sin \alpha \sin D \sin (A + \delta)}{\sin (A+\delta) (\sin (\alpha + D) - \operatorname{Cof} A \sin \delta \sin (\alpha+D) - \operatorname{Cof} D \sin \alpha \sin (A+\delta)}$$

der Nenner hievon läßt ſich, da

$\sin (A + \delta) \sin (\alpha + D) = \frac{1}{2} \sin (\alpha + D) (\sin A \operatorname{Cof} \delta + \operatorname{Cof} A \sin \delta)$
$+ \frac{1}{2} \sin (A + \delta) (\sin D. \operatorname{Cof} \alpha + \operatorname{Cof} D \sin \alpha)$

ſo ausdrücken : $\frac{1}{2} \sin (\alpha + D) (\sin A \operatorname{Cof} \delta - \operatorname{Cof} A \sin \delta) + \frac{1}{2} \sin (A + \delta)$
$(\sin D. \operatorname{Cof} \alpha - \operatorname{Cof} D \sin \alpha)$
$= \frac{1}{2} \sin (\alpha + D) \sin (A - \delta) + \frac{1}{2} \sin (A + \delta) \sin (D - \alpha).$

Folglich ergiebt ſich Tang F

$$= \frac{2 \sin A \sin \delta \sin (\alpha + D) - \sin \alpha \sin D \sin (A + \delta)}{\sin (\alpha + D) \sin (A - \delta) + \sin (A + \delta) \sin (D - \alpha)}.$$

und $b = \frac{1}{2} d [\sin (\alpha + D) \sin (A - \delta) + \sin (A+\delta) \sin (D - \alpha)] \sec. F.$

III. Der Winkel $C = 180° - D + F$. Denn man verlängere BC und CD bis ſie einander in F ſchneiden; der Winkel unter welchem dieſes geſchieht iſt = F.

Aber $FCD + FDC = 180° - F$
$= C + CDF - F$:
Daher $FDC = C - F$;
und da $FDC = 180° - D$,
ſo hat man $C - F = 180° - D$,
woraus C wie angegeben.

IV. Auf ähnliche Art findet ſich $B = 180° - A - F$.

2. Der Zähler in der Formel für tang F kann auch ſo ausgedrückt werden:
$\sin (A - \alpha - D + \delta) + \operatorname{Cof} (A - \delta) \sin (\alpha + D)$
$- \operatorname{Cof} (D - \alpha) \sin (A + \delta)$;
daß alſo Tang F

$$= \frac{\sin (A - \alpha - D + \delta) + \operatorname{Cof}(A + \delta) \times \sin (\alpha + D) - \operatorname{Cof} (D - \alpha) \sin (A+\delta)}{\sin (\alpha + D) \sin (A - \delta) + \sin (A + \delta) \sin (D - \alpha)}.$$

Die Standlinie mag auch die, ſo zu meſſen iſt, durchſchneiden.

Z. E. Fig. 1030 man ſoll KH meſſen, ſo kann man BI zur Standlinie nehmen. Wenn man nähmlich die Winkel HBI und IBK wie auch HIB und BIK ſamt der Linie BI gemeſſen, ſo kann man entweder eine Zeichnung davon machen, oder auch trigonometriſch folgender Geſtalt rechnen.

Es ſey BI = 100°, HBI = 47°30′, IBK = 79°, HIB = 52°, BIK = 44°. Demnach BHI = 80°30′ und BKI = 57°.

9,8676309

ſin BHI : BI = HBI : HI
80°30′ : 100° = 47°30′ : x
9,8676309
2,0000000
11,8676309
9,9940027
1,8736282 = 74°7′5″ = HI.

Sin BKI : BI = ſin IBK : IK
ſin 57° : 100 = ſin 79° : x
9,9919466
2,0000000
11,9919466
9,9235914
2,0683552 = 117°0′5″ = IK.

Weil nun HIB + BIK = HIK = 96° iſt, ſo iſt die halbe Summe der geſuchten Winkel $\frac{180 - 96}{2}$: 42°; (HI + IK) : (IK − HI) = tang ½ Sum. : tang ½ diff. 1910″ : 423″ = 42° : x.

9,9544374
2,6263404
12,5807778
3,2828486
9,2979298

alſo ½ diff. = 11°. 12′
½ Summe = 42°
folglich KHI = der größere Winkel
= 53°12′

ſin KHI : KI = ſin HIK : HK
ſin 53°12′ : 117°½ = ſin 96° (oder 84) : x
9,9976143
2,0683552
12,0659695
9,9034868
2,1624827 = HK = 145°4′

V. Die Diſtanzen unterſchiedener Oerter, als C, D, E, F, G, H, zu denen man entweder kommen oder nicht kommen kann, zu finden. Fig. 1029.

Auflöſung. Man verfügt ſich zwiſchen die Oerter, derer Diſtanzen gefunden werden ſollen, erwählt ſich dergeſtalt 2 Standpunkte A und B, daß keiner von den zu beſtimmenden Gegenſtänden mit AB in gerader Linie liege. In B ſtecke man eine Fahne, in A das Inſtrument. Die unbewegliche Diopter richte man nach B, ſchraube das Inſtrument feſt, viſire darauf mit der beweglichen nach jedem der oberwähnten Gegenſtände. Nachher meſſe man die Standlinie AB, ſtelle das Inſtrument in B, richte das unbewegliche Linial nach A, ſchraube das Inſtrument wieder feſt, viſire mit der beweglichen Diopter noch einmal nach jedem der oben genannten Gegenſtände, und bemerke die Winkel.

Ver-

Vermöge des verjüngten Maaßſtabes und Transporteurs iſt man dann im Stande, die verlangten Diſtanzen der Gegenſtände durch Dreyecke, denen auf dem Felde ähnlich, zu beſtimmen und aufzutragen.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt des Augenmaaßes.

Wenn wir die Erfahrung zu Rathe ziehen, ſo ergeben ſich leicht einige Mittel, durch deren Hülfe wir einen Begriff von dem ohngefähren Abſtande eines Objekts, von unſerm Auge erlangen. Jedermann weiß daß entfernte Gegenſtände bey weitem nicht ſo kenntlich und deutlich erſcheinen als nahe; ſie kommen unſerm Auge nicht nur immer kleiner vor, je weiter wir uns entfernen, ſondern ſie erhalten auch eine weit bläſſere und minder lebhafte Farbe.

2. Ob aber gleich Helligkeit, Farbe und Deutlichkeit entfernter Gegenſtände auf den Schluß, den wir daher auf ihren Abſtand von unſeren Auge machen, großen Einfluß haben, und in vielen Fällen ein vortreffliches Hülfsmittel abgeben, wenigſtens zu ſagen, welches Objekt am weiteſten wegliege, um wie viel ohngefähr deſſen Abſtand vom Auge größer ſey als eines minder entfernten Gegenſtandes u. ſ. w. ſo giebt es doch Umſtände, die unſer Urtheil ungemein trüglich machen, dergleichen ſind nun z. E. erſtlich.

3. Wenn wir nach den Objekten, deren Entfernungen vom Auge wir ohngefähr ſchätzen wollen, keine freye Ausſicht haben.

Wem lehret nicht die Erfahrung, daß z. E. die Spitze eines entfernten Thurms, die über ein näheres Gebäude hervorragt, viel näher und größer zu ſeyn ſcheinet, als ſie uns vorkommen würde, wenn ſich zwiſchen ihr und dem Auge das Gebäude nicht befände, und man nach ihr hin auf dem Horizonte eine freye Ausſicht hätte.

Wie nahe und groß ſcheint uns nicht die Scheibe des aufgehenden vollen Mondes? Die Urſache dieſer Täuſchung unſers Auges liegt offenbar einen Theil mit darinnen, weil zwiſchen dem Auge und dem entlegenen Objekte ſich noch andere Gegenſtände befinden, die in unſer Urtheil Einfluß haben.

4. Zweytens kömmt es bey Schätzung des Abſtandes entlegener Objekte von einander ſehr auf die Lage des Auges an.

Am unſicherſten iſt der Gebrauch des Augenmaßes, wenn das Auge gegen die Linie, derer Länge es ſchätzen will, eine ſehr ſchiefe Lage hat. Es ſeyn Fig. 1031 a, c, d, e, f, nach Gefallen Gegenſtände auf dem Horizonte, und b das Auge.

Man ziehe von a, c, d, e, f, nach b gerade Linien, ſo ſiehet das Auge b die Weite ac unter dem Winkel abc; die Weite cd unter dem Winkel cbd u. ſ. w. Dieſe Winkel abc, cbd u. ſ. w. heißen die ſcheinbaren Weiten der Objekte a, c, e, d. Es lehret nähmlich die Erfahrung, daß uns Weiten gleich groß zu ſeyn ſcheinen, wenn ſie an unſern Auge einerley Winkel machen, und daß überhaupt uns eine Sache deſto größer erſcheinet, unter einem je größeren Winkel ſie uns in das Auge fällt.

Wären alſo z. E. die Winkel abc, cbd, dbe, ebf alle gleich groß, ſo würden dem Auge b auch die Weiten ac, cd, de, ef insgeſamt von gleicher Größe zu ſeyn ſcheinen.

Man würde ſich aber ſehr irren, wenn man die wahren Weiten ac, cd, de, ef in der That einander gleich ſetzen wollte, weil ſie gleich groß zu ſeyn ſcheinen. Denn die Tangente des doppelten Winkels iſt jederzeit mehr als doppelt ſo groß als die Tangente des einfachen.

Wären alſo z. E. a, c ein paar Objekte auf dem Horizonte, deren Weite ac man wüßte, ef ein paar andere Gegenſtände, mit a, c, in einer geraden Linie, und mit der bekannten Weite AC, wollte man die Entfernung ef nach dem Augenmaße vergleichen: ſo würde man einen großen Fehler begehen, wenn man in Gedanken die Weite ac auf ef ſo oft hintragen wollte als es angienge, und daher in der That ef ſo vielmal größer als ac ſchätzen wollte, ſo vielmal ſie größer ſchiene. Dieſer Fehler würde deſto beträchtlicher ſeyn, je ſchiefer die Linie ef gegen dem Auge liegt, d. i. je ſpitziger die Winkel bea, bfe, und je ungleicher der Objekte, e, f Entfernungen vom Auge eb, fb ſind, auch je mehr die Weiten eb, fb, von denen ba, bc unterſchieden ſind.

5. Wenn Fig. 1032 der Objekte e, f, Entfernungen vom Auge fb, eb, einander gleich ſind folglich efb ein gleichſchenklichtes Dreyeck abgiebt, und wenn eben ſo auch der Objekte a, c, Weiten vom Auge ba bc gleiche Größen haben, und man die ſcheinbare Weite oder den Winkel ebf $= \alpha$, die abc $= \beta$, und die Entfernungen eb $=$ A, ba $=$ B ſetzet: ſo wird in dem Dreyecke ebf die wahre Weite ef $= 2A. \sin \frac{1}{2} \alpha$. In dem Dreyecke abc aber, ac $= 2B. \sin \frac{1}{2} \beta$. Mithin ac : ef $= B. \sin \frac{1}{2} \beta : A \sin \frac{1}{2} \alpha$ d. h. die wahren Weiten ac, ef verhalten ſich gegen einander, wie die Produkte aus den Entfernungen be, ba, der Objekte vom Auge, in die Sinus der halben ſcheinbaren Weiten oder Winkel ebf, abc.

6. Wenn man ſich alſo bey b auf dem Felde befände, und wollte aus dem Verhältniſſe der ſcheinbaren Weiten abc : ebf das Verhältniß der wahren ac : ef finden, ſo kann dieſes nicht geſchehen, wenn man nicht zu gleicher Zeit auch weiß, wie der Objekte a, c, e, f, Entfernungen vom Auge ba, be ſich verhalten.

7. Wenn von dem Auge alle 4 Objekte a, c, e, f ohngefähr gleichweit weg zu ſeyn ſcheinen, und man alſo in obiger Formel (5) A $=$ B ſetzet, ſo wird

ac : ef $= \sin \frac{1}{2} \alpha : \sin \frac{1}{2} \beta$.

8. Endlich wenn die ſcheinbaren Weiten oder die Winkel abc, ebf nicht gar zu groß ſind z. E. nur einige Grade betragen, ſo kann man ohne merklichen Fehler $\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \alpha$; $\sin \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} \beta$ ſetzen; dann wird

ac : ef $= \frac{1}{2} \alpha : \frac{1}{2} \beta = \alpha : \beta$.

9. Man ſiehet alſo aus dem bisherigen, unter welchen Umſtänden man auf dem Felde aus dem Verhältniſſe der ſcheinbaren Weiten verſchiedener Gegenſtände von einander ſogleich das Verhältniß der wahren finden kann. Nähmlich wenn die Gegenſtände gleich weit vom Auge wegliegen, und die ſcheinbaren Weiten nicht ſehr groß ſind.

10. Wären alſo ε, φ; a, c; gleichweit vom Auge, ſo unterſuche man nach dem Augenmaße, wie oft etwann die Weite ac in der $\varepsilon\varphi$ enthalten zu ſeyn ſcheinet; geſetzt dem Auge ſchiene $\varepsilon\varphi$ etwa $=$ 4. ac zu ſeyn, ſo wird in der That auch die wahre Weite $\varepsilon\varphi$ $=$ 4ac ſeyn, vorausgeſetzt daß die Winkel abc, $\varepsilon b \varphi$ nicht gar zu groß ſind.

11. Das weſentliche, was hierbey das Auge zu thun hat, iſt, das ſcheinbare Verhältniß ac : $\varepsilon\varphi$ erträglich genau zu ſchätzen; dieſes kann nicht anders als durch anhaltende Uebung geſchehen. Es wird deswegen vortheilhaft ſeyn, wenn man vorher auf dem Papiere ſich in dieſem Geſchäfte einige Fertigkeit erwirbt, und nur erſtlich kleine Weiten ſchätzen lernt.

12. Man würde, wenn Fig. 1032 auf dem Papiere die Linie ac vorgegeben wäre, ein Stück von ihr z. B. ab etwa auf folgende Art nach dem Augenmaße beſtimmen.

Erſtlich würde ich in Gedanken die Linie ac halbiren. Fände ich nun daß b näher bey a als beym Mittelpunkt läge, ſo würde ich ſchließen daß ab > $\frac{1}{4}$ ac ſeyn müſſe.

Wenn ich mir nun ferner vorſtelle ab würde auf ac ſo oft getragen, als es angienge, ſo würde ich finden, daß ab mehr als viermal, aber nicht völlig 5mal auf ac paſſet, folglich den Schluß machen, daß ab $\frac{1}{5}$ ac ſeyn müſſe.

Auf dieſe Art könnte man noch mehr Vergleichungen anſtellen, und ſich der Grenze des Verhältniſſes ab : ac ſtufenweiſe immer mehr nähern; wolte man mit den Grenzen; ab > $\frac{1}{5}$ ac; ab < $\frac{1}{4}$ ac hier ſich begnügen, ſo könnte man für ab etwa das Mittel zwiſchen $\frac{1}{4}$ ac und $\frac{1}{5}$ ac annehmen, mithin ſetzen ab = $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$ ac + $\frac{1}{5}$ ac) = $\frac{9}{40}$ ac.

13. Die Natur der Sache, und anhaltende Uebung werden hierbey viele Vortheile an die Hand geben, ſo daß man in Stand geſetzt wird, in kurzer Zeit dergleichen Verhältniſſe auf dem Papiere ſehr geſchwind und gleichſam beym erſten Anblicke zu ſchätzen. Auch kann man jederzeit auf dem Papiere die geſchätzten Verhältniſſe mit dem Cirkel nachmeſſen, und dadurch finden, wie viel ſich das Augenmaß betrogen habe.

14. Hat man ſolchergeſtalt ſich erſt auf dem Papiere ein fertiges Augenmaß erworben, ſo kann man alsdann auf dem Felde deſto ſicherer die ſcheinbaren Entfernungen mit einander vergleichen.

15. Je größer auf dem Felde die ſcheinbaren Weiten ſind, deſto unſicherer iſt die Schätzung.

Es wird nähmlich beym Augenmaße zum vorausgeſetzt, daß das Auge, die Weite, die es ſchätzen und mit einer andern vergleichen will, ganz überſehen kann. Wären daher die Objekte Fig. 1032 ziemlich weit von einander entfernt, ſo hat das Auge Mühe, die äußerſten Punkte e, f, zu gleicher Zeit deutlich zu unterſcheiden, und ſich folglich die ganze Weite ef, gehörig vorzuſtellen. Siehet das Auge gerade nach f hin, ſo hat es eine undeutliche Empfindung von dem Punkte e; und wenn es e genau betrachtet, ſo erſcheinet ihm f undeutlich. Weil alſo auf dieſe Art die ganze Weite ef undeutlich empfunden wird, ſo wird auch die Vergleichnng einer andern Weite ac, mit ihr ſehr unſicher ausfallen.

Eben dieſes iſt die Urſache, warum man ein paar kleine Linien weit geſchwinder und ſicherer ſchätzen kann, als ein paar größere.

16. Ferner iſt die Schätzung deſto ſicherer, durch je kleinere Zahlen ein Verhältniß ausgedrückt werden kann. Z. E. unſer Auge kann weit geſchwinder und zuverläſſiger, die Verhältniſſe 1 : 2; 1 : 3; 2 : 3; u. ſ. w. empfinden, als z. E. folgende 1 : 16; 2 : 27: u. ſ. w. dieſes giebt einige Anleitung, die Zuverläſſigkeit eines geſchätzten Verhältniſſes zu beurtheilen.

17. In den meiſten Fällen pfleget man die Weite eines Gegenſtandes von unſerm Auge bloß nach dem Eindrucke zu beurtheilen, die des entfernten Objekts, mehr oder minder lebhafte Farbe, deſſen Deutlichkeit und Klarheit u. ſ. w. auf unſer Auge macht: und nach Verhältniß dieſes Eindrucks wird der Abſtand verſchiedener Gegenſtände von unſerm Auge mit einander verglichen. Man kann in dieſem Geſchäfte offenbar durch anhaltende Uebung eine Fertigkeit erlangen. Man nehme anfangs nur kleine Weiten vor, ſchätze ſie nach

der Empfindung in unſerm Auge; man vergleiche die geſchätzte Weite mit der wahren, die man etwa durch Schritte finden, oder auf eine andere Art beſtimmen kann, ſo findet man, wie viel ſich das Augenmaß betrogen. Hierauf übe man das Auge immer in größeren Entfernungen, ſo wird man endlich eine ziemliche Fertigkeit erlangen, kleine Weiten ſogleich beym erſten Anblicke ohne großen Irrthum, größere aber wenigſtens erträglich zu ſchätzen.

Vergleiche: Joh. Tobias Mayers praktiſche Geometrie. 1r Th. 3. Kap. §. 53.
Lamberts Beyträge; 1r Theil.
Leipziger Magazin für Naturkunde und Mathem. 1783. 1s Stück.

Entfernungen zu meſſen mit der Bouſſole.

A. Eine Diſtanz zu beſtimmen, da man nicht von einem Ende zu dem andern kommen kann. Fig. 1025.

Man ſtelle die Bouſſole horizontal in C, richte die Dioptern nach A, und ſchreibe den Grad, den die Magnetnadel zeigt, wenn ſie ſtille ſtehet z. E. hier den 48°, auf das bey ſich habende Papier.

Darauf richtet man die Dioptern nach B, ſiehet was für einen Grad die Magnetnadel, wenn ſie ruhet, bemerkt; findet z. E. den 107ten, ſchreibt ihn auf, und mißt CA, CB.

Wenn man die Figur hierauf zu Papier bringen will, ſo ſchraubt man die Bouſſole vom Stativ ab, legt ſie an den Punkt C, wendet ſie ſo lange hin und her, bis die Nadel den 48° zeigt, ziehet dann am Rande des Käſtchens die Linie CA, drehet am Punkte C das Käſtchen herum, und ziehet, wenn die Nadel auf dem 107° ſtille ſtehet, die Linie CB von gehöriger Größe, an der nähmlichen Seite der Bouſſole, da man vorher AB zog, ſo iſt das Dreyeck auf dem Papiere dem auf dem Felde ähnlich.

B. Wenn man nur von dem einen Punkte zu dem Standpunkte kommen kann. Fig. 1027.

Man ſetze das Inſtrument in C auf, viſirt nach A, bemerkt den Winkel, dreht die Bouſſole nach B, beobachtet den Winkel, mißt AC; ſetzt das Inſtrument in A auf, viſirt nach B, und merkt den Winkel. Dann trägt man die Winkel wie vorhin ſammt AC auf das Papier, und das Dreyeck auf dem Papiere iſt dem gemeſſenen ähnlich.

Diſtanz.	Winkel		Länge	
	°	′	°	′
CA	80	6	21	2
CB	159	—	23	4
BA	140 —	3	19	—

Beygefügte Tabelle giebt ein Muſter, wie man die Maße der Winkel und Linien, ohne ſie zu verwechſeln gut aufſchreiben kann.

C. Wenn man zu keinem Punkte aus den Standpunkten kommen kann. Fig. 1028.

Man nehme CD zur Standlinie an, ſetze das Inſtrument in C auf, viſire nach A, D und B und merke die Winkel. Setze in D auf, viſire nach B, A und C um die Winkel zu bekommen.

Dann ſchraube man die Bouſſole ab, ziehe auf dem Papiere eine gerade Linie CD der CD auf dem Felde nach dem verjüngten Maßſtabe gleich, und ſetze an die beyden Enden C und D die Winkel, wie man ſie auf dem Felde mit der Bouſſole fand: ſo erhält man die unbekannte Weite AB.

Ent-

Entfernungen zu meſſen mittelſt der *Camera obſcura* ſ. Licht (Brechung).

Entfernungen zu meſſen mit dem Dendrometer des Hrn. Pickels, ſiehe Dendrometer 10te Aufgabe.

Entfernungen zu meſſen, vermittelſt eines Gegenſtandes ſcheinbarer und wahrer Größe.

Dieſes beruhet auf nachfolgender Aufgabe:

Aus eines gleichſchenklichten Dreyecks Grundlinie c; und Winkel an der Spitze u; die beyden Schenkel a zu finden.

1. Nach der Formel (ſiehe Dreyeck gleichſchenklichtes, dort $a = \frac{\frac{1}{2} b}{\sin \frac{1}{2} C}$) iſt hier $a = \frac{c}{2. \sin \frac{1}{2} u}$.

2. Wenn ſich u und a zuſammen ändern, ſo iſt $da = - \frac{1}{2} c. \frac{d \sin \frac{1}{2} u}{\sin \frac{1}{2} u^2}$

$$= - \frac{\frac{1}{2} c. \cos \frac{1}{2} u. \frac{1}{2} du}{\sin \frac{1}{2} u^2}$$

oder $da = - \frac{c du}{4 \tang \frac{1}{2} u. \sin \frac{1}{2} u}$.

3. Hier zeiget (2), wie beträchtlich ein geringer Fehler des Winkels in Beſtimmung der Seite ſeyn würde.

4. In dem Falle iſt allemahl u klein. Es ſey ne wo e eine Secunde bedeutet, und du = m. e, wo m gegen n klein ſeyn muß.

5. So iſt $da = - \frac{c m e}{4. \frac{1}{4} n^2 e^2} = - \frac{m c}{n^2. e}$.

Alſo $\log da = \log \frac{m}{n^2} + \log c - \log e$.

Wobey aber bemerkt wird, daß dieſe Größe verneint iſt.

6. Nähmlich wenn u um me wächſt, ſo nimmt a um ſo viel ab. Aber um ſo viel zu, wenn u um me kleiner wird.

7. Es ſey n = 3600. m ſo iſt

$$\log \frac{m}{n^2} = - 7,1126050$$
$$\log e = + 5,3144251$$
$$\log \frac{m}{n^2. e} = 0,2018201 - 2$$

gehöret zu 0,01591.

Alſo wäre da = − 0,01591 c.

8. Exempel. Ein Thurm 100 Fuß hoch erſchien 1° groß, man ſucht ſeine Entfernung.

$$\log 50 = 1,6989700$$
$$- \log \sin 30' = - 7,9408419 + 10$$
$$\log a = 3,7581280$$
$$= a = 5729,6 \text{ Fuß}.$$

Wenn man nun den Winkel 1° genommen hätte, da er wirklich nur 59′59″ wäre, alſo ihn eine Sekunde zu groß genommen hätte: ſo wäre der richtige Win-

Winkel u — 1″ alſo m = — 1 und da = + 0,01591. c = + 1,591 Fuß oder die eigentliche Weite wäre 5731,2 Fuß.

Wäre aber der eigentliche Winkel 1°0′1″ alſo m = + 1, ſo wäre die eigentliche Entfernung a — 1,591 Fuß = 5728 Fuß.

Iſt man alſo bey dem Winkel um 2″ ungewiß, ſo iſt man bey der Entfernung um etwas über 3′ ungewiß.

Zur Probe nehme man u = 3601″ an, und weil ſich hier der kleine Bogen, ſtatt ſeines Sinus ſetzen läßt, ſo iſt ſin 30′0″,5 = 1800″, 5 alſo

$$\begin{array}{rl} \log e & = 4,6855749 - 10 \\ \log 1800,5 & = 3,2553931 \\ \hline & 0,9409680 - 2 \\ \text{von } \log 50 & = 1,6989700 \\ \hline \log a & = 3,7580019 \\ a & = 5728,0 \text{ Fuß wie vorhin} \end{array}$$

Käſtners aſtronomiſche Abh. 2 Samml. S. 95.

Man ſehe hierüber mit mehreren den Artickel Mikrometer nach.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt des Meßtiſches, ſiehe Meßtiſch.

Entfernungen zu meſſen mit dem Mikrometer, im Fernrohre, ſiehe Mikrometer.

Entfernungen vermittelſt entfernter Objekte zu beſtimmen.

Entfernungen zu meſſen, vermittelſt entfernter Objekte, von Lambert, ſiehe deſſen Beyträge 14. Theil.

Fig. 1043. Man nehme eine willkührliche Standlinie CD an, und bemerke bey C, auf welchen Gegenſtand I des entlegenen Horizontes die Richtung CA hintrifft. Dc ſey nun ein beliebiger Theil der Standlinie DC. Man begebe ſich nach c und laſſe bey i in die Richtung cI nach dem entlegenen Objekte, einſetzen. Auf gleiche Weiſe treffe die Richtung CB auf das Objekt K am entlegenen Horizonte, und man laſſe auch bey k einen Stab in die Richtung ck einſetzen. Hierauf gehe man mit zwey Stäben in der Richtung ci vorwärts, (welches geſchiehet, wenn man mit den Stäben c, i, immer in gerader Linie bleibt,) und ſetze bey a einen Stab ſo ein, daß ein Gehülfe bey D ihn in der geraden Linie DA ſiehet. Auf gleiche Weiſe gehe man auch mit dem andern Stabe in der Richtung ck vorwärts bis nach b, wo der Gehülfe D ihn in der geraden Linie DB ſiehet: Solchergeſtalt ſteht alſo a in dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte der beyden Linien cI, DA, und b in dem Durchſchnitte der beyden Richtungen cK, DB. Man meſſe hierauf die Weite ab, ſo wird dieſelbe ein ſolcher Theil von AB ſeyn, als cD von der Standlinie CD iſt.

Denn weil die Objekte I, K, ſehr weit entlegen ſind, ſo kann man ohne großen Fehler die Stücken ca, CA; cb, CB, als parallel anſehen, mithin die Winkel ACD = acD; CDB = cDb, BCD = bcD, folglich das Dreyeck ACD dem acD, und BCD dem bcD ähnlich ſetzen. Daher hat man

$$\begin{array}{l} DA : Da = DC : Dc \\ BD : bD = DC : Dc \\ \hline \text{alſo } DA : Da = BD : bD \end{array}$$

folglich wegen des gemeinſchaftlichen Winkels ADB das △ABD ∾ abD, mithin AB : ab = BD : bD = DC : cD, folglich iſt ab ein ſolches Stück von AB, als cD von CD.

Es

Es verſteht ſich, daß dieſe Methode deſto weniger fehlerhaft iſt, je weiter die Gegenſtände I, K am Horizonte hinaus liegen.

Man ſehe vom Gebrauch der entferntern Objekte mit mehrern den Artickel: Gegenſtände, entfernte.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt des optiſchen Winkels, ſiehe Winkel optiſcher.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt des Brander'ſchen *Polymetroſcopium Dioptricum* ſiehe daſſelbe.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt des Schalles, ſiehe Schall.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt der Stäbe.

1. Die Weite AB, Fig. 1033 die ſich nicht unmittelbar meſſen läßt, zu finden, wenn man von dem willkührlichen Standpunkte D, nur nach B aber nicht nach A hinkommen kann.

Man verlängere AB, und nehme auf ihrer Verlängerung eine Länge BC, von zureichender Größe; von D meſſe man die Weiten BD, DC, und trage ſie in geraden Linien, rückwärts; BD von D bis b und DC von D bis c, ſetze in b, c, Stäbe ein, und gehe mit einem andern Stabe, in der geraden Richtung cb, bis d fort, wo ein Stab d mit DA, in gerader Linie ſtehen würde. Die bd meſſe man demnach, ſo wird bd = AB ſeyn. Der Grund liegt in der Gleichheit der Dreyecke ABD, bDd, welche ſich gar leicht erweiſen läßt. Auch hätte man nur nöthig proportionale Stücken rückwärts zu tragen. Auch hätte man, wenn man Dd mäße, des Standpunkts D Weite von A, weil Dd = DA.

Eine andere Auflöſung dieſer Aufgabe zeigt Fig. 1034, wo vorausgeſetzt wird, daß man vermittelſt einer Meßſchnur oder Kette, im Stande iſt, einen Winkel an einen andern Punkt zu tragen.

Man meſſe erſtlich die Weite BD bis an den angenommenen Standpunkt, und trage ſie rückwärts von D nach b, ſo daß bDB eine gerade Linie ſey. Bey α ſtecke man einen Stab in die gerade Linie BA, und bey δ einen in die gerade Richtung BD, und meſſe nun in dem kleinen Dreyecke αBδ, die drey Seiten Bα, Bδ, αδ.

Dieſes kleine Dreyeck trage man nun an den Punkt b, ſo, daß der Winkel B an b komme. Man nehme alſo auf der geraden Linie bD, die Linie ba = Bδ. Faſſe auf einer Meßkette oder Schnur, eine Länge ſo groß, als die Summe der beyden Linien Bα, αδ, befeſtige die beyden Enden dieſer Schnurlänge bey a, b, und ſpanne ſie nach den Richtungen bd, ad ſo aus, daß bd = Bα und ad = αδ werde: ſo erhält man bey b einen Winkel = B. Man ſtecke nun bey C einen Stab ein, ſo daß er ſowohl mit b und d, als auch mit A und D in gerader Linie ſtehe: ſo wird die Weite bC, die man hierauf meſſen kann, = AB ſeyn, wie aus der Gleichheit der beyden Dreyecke bDC und ADB erhellet.

Es wird bey dieſem Verfahren gut ſeyn, die Längen Bα, Bδ nicht gar zu klein, ſondern z. E. einige Ruthen lang zu nehmen.

Noch beſſer und bequemer iſt es, Bα = Bδ zu nehmen, damit das Dreyeck αBδ gleichſchenklicht werde.

Aus den gemeſſenen Seiten des kleinen gleichſchenklichten Dreyecks Bαδ läßt ſich der Winkel B durch trigonometriſche Rechnung finden. Wenn man nun auf eben die Art auch bey D, nach den Richtungen BD, DA, die Längen De und De willkührlich annähme, und dann es mäße, ſo ließ ſich aus den Größ-

ſen

winkel der Hälfte des Winkels A gleich (wie man aus der 1048ten Figur leicht verſtehet); und weil A nicht ſo klein ſeyn muß, kann das Verhältniß HD zu DC nicht übergangen werden, wenn DC eine Größe hat, die mit in die Rechnung kommen ſoll.

Dieſes zum vorausgeſetzt, ſiehet man, daß die Größe DB oder CF von der Länge des Punkts C der Linie AF abhänge, allwo ſie nämlich von der Linie EG geſchnitten wird. Je näher C gegen A zu liegen kömmt, deſto größer wird der Fehler DB; je näher es aber gegen F hinzurücket, deſto kleiner muß der Fehler werden. Es iſt aber klar, C müſſe näher zu dem Winkel A hinzukommen, wenn BK größer wird (K iſt der Punkt, in welchem die ſenkrechte Linie BI ſich mit EG ſchneidet): im Gegentheile müſſe C näher gegen F fallen, wenn BK kleiner wird.

Eben dieſes verſtehet ſich, wenn beyde Winkel zu groß genommen werden. Denn ſofern man aus dem Mittelpunkte A (Fig. 1054) mit AB einen Cirkelbogen BD beſchreibet, wird C um ſo viel mehr von D abſtehen, je größer BK wird; hingegen wird C dem D um ſo viel näher ſeyn, je kleiner BK iſt: daß es alſo außer Zweifel iſt, der Fehler BD (Fig. 1051) oder DC (Fig. 1054) werde alsdann der kleinſte, wenn BK ein Kleinſtes iſt: und beziehet ſich demnach gegenwärtiger Fall auf den erſten. Es iſt deswegen nur nöthig, daß (Fig. 1052) der Theil IE der Grundlinie mit BI gleich genommen werde, das iſt, daß der Winkel E von 45° am wenigſten abweiche.

7. Es äußert ſich hier eine nicht geringe Unbequemlichkeit, daß nähmlich die Grundlinie AE, deren Maß man wirklich zu nehmen gezwungen iſt, weit länger ſeyn muß, als die geſuchte Seite ſelbſt. Und dieſe Beſchwerde kann ſo groß ſeyn, daß es nicht die Mühe bezahle, den kleinſten Fehler zu haben, beſonders weil man ohne das in den angenommenen Umſtänden nicht den ganzen vermeiden kann. Damit man aber den Fehler in die Rechnung bringe, ſo beſchreibe man mit dem halben Durchmeſſer EC (Fig. 1052. 1053) aus E einen Bogen CO, wie auch aus A zwey andere CD, LF. Man ſetze: die Bogenhöhe des Winkels B iſt zu dem halben Durchmeſſer, wie der Fehler des Winkels E zu CL. Auf dieſe Weiſe findet man CL = DF. Alsdann ſetze man wiederum: die Bogenhöhe des Winkels B verhält ſich zu der Bogenhöhe ſeines Mitwinkels, wie der Fehler des Winkels A zu FB. Iſt der Winkel B ſtumpf, ſo fällt F über B hinaus; iſt er aber ſpitzig, ſo wird F zwiſchen A und B liegen, wie es in der 1052ten und 1053ten Figur zu ſehen iſt. Iſt endlich B ein rechter Winkel, ſo fällt F auf B. Mithin iſt im erſten Falle der Fehler dem Unterſchiede zwiſchen CL und BF gleich; im zweyten der Summe im dritten nur allein dem CL.

Allein es hat das Anſehen, es gebreche mehr an der Wahrſcheinlichkeit, wenn man annimmt, daß die Fehler in beyden Winkeln von einerley Gattungen ſeyn, das iſt daß man beyde entweder zu groß, oder beyde zu klein nehme, indem für die entgegengeſetzte Gattung bey einem jeden Winkel eine gleichſtarke Wahrſcheinlichkeit ſtehet, und wir uns nicht in dem Falle befinden, daß etwa in dem Halbcirkel, oder Quadranten, deſſen man ſich bedienet, ein beſonderer Fehler zu merken ſey. Wir wollen alſo nun auch unterſuchen, wie wir uns zu verhalten haben, wenn die Fehler, die in den Winkeln begangen werden, von entgegen geſetzter Art ſind, die Grundlinie aber ihrer Lage nach gegeben wird.

Vier-

Vierter Fall. Wenn die Grundlinie ihrer Lage nach gegeben wird, und die Fehler der Winkel A und E einander entgegen ſind. Fig. 1055. 1056.

8. Man nehme erſtlich an, (Fig. 1055) daß der Winkel A zu groß, der Winkel E zu klein genommen werde, doch alſo, daß die Fehler von gleicher Größe ſind. Wenn man die Grundlinie AE ſo weit verlängert, bis der Winkel E einem rechten gleichkomme, ſo hat man den geſuchten Stand E. Man ſtelle ſich vor, auf dem kleinen Bogen DB, der den Fehler des Winkels A mißt, werde ein kleiner Halcirkel BDF beſchrieben, wie auch ein großer EAB. Es wird DB von einem kleinen Bogen des Halbcirkels EAB, wenn er bis auf AD hinausgezogen wird, nicht mehr unterſchieden ſeyn, als in dem Verhältniſſe der Bogenhöhe des Mitwinkels DAB zu dem halben Durchmeſſer, welches dem Sinne nach das Verhältniß zweyer gleichen Größen iſt, wenn DAB nur ſehr klein iſt. Es ſind deswegen die Winkel DAB, DEB für gleich zu halten, und wenn man in dem Maße des rechten Winkels AEB um den Abgang DEB fehlet, ſo muß uns die Auflöſung des Dreyeckes ADE die Seite AD mit der wahren Länge AB ohne allen merklichen Unterſchied gleich geben.

Auf gleiche Weiſe ſiehet man, daß ſofern der Winkel A (Fig. 1056) um BAD zu klein, und der Winkel AEB um BED zu groß angeſetzt wird, wenn man einen kleinen Halbcirkel BFD, und einen größern AEB beſchreibet, die Winkel BAD, BEF gleich ſeyn müſſen, als derer Schenkel auf einem gleichen Bogen BD ruhen, und auch in dieſem Falle die gefundene Seite AD mit AB gleich ſey.

9. Dieſe Beſtimmung des Standes E folgt aus dem, was wir angenommen haben. Allein weil auch das Widerſpiel ſich leicht ereignen kann, indem die Wahrſcheinlichkeit widriger Fehler nur um eine Stufe größer iſt, als daß man Fehler von gleicher Gattung begehe, ſo will ich dieſe Wahl nicht für jedesmahl eingerathen haben, beſonders wenn der Winkel bey A ſehr groß iſt. Denn ſollte man in der That auf gleiche Art in den Winkeln fehlen, ſo wäre der Fehler in der geſuchten Seite zu dem Fehler des Winkels A am nächſten, wie die Summe aus der Bogenhöhe des Mitwinkels B und dem halben Durchmeſſer, zu der Bogenhöhe des Winkels B, gleichwie es ohne Mühe zu erſehen iſt, wenn man von dem Punkte, in welchem die irrigen Seiten des Dreyeckes zuſammen ſtoßen, nach B eine kleine Linie zieht. Vielleicht wäre es in dieſen Umſtänden thunlicher, daß man den Winkel E 45° nehme, oder von ſolcher Größe, daß die Seite AE mit AB faſt gleich werde.

Wenn der Winkel A nicht ſo groß iſt, könnte vielleicht dieſes die Wahl eines rechten Winkels bey E vorzüglicher machen, daß es nicht allein wahrſcheinlicher ſey, man begehe widrige Fehler, ſondern auch daß gemeiniglich in den Halbcirkeln oder Quadranten der Punkt des neunzigſten Grades genauer, denn andere, beſtimmet werde, ja auch ſich mehrerley Arten einen rechten Winkel zu beſtimmen darbieten; daß mithin leicht geſchehen könne, daß man in dem Winkel E gar keinen Fehler begehe, folglich der Fehler des Winkels A ſich zu dem Fehler in der geſuchten Seite nur allein verhalte, wie die Bogenhöhe des Winkels B zu der Bogenhöhe ſeines Mitwinkels.

Fünfter Fall. Wenn die Grundlinie ihrer Lage nach nicht gegeben wird, und die in beyden Winkeln vorgehenden Fehler von gleicher oder widriger Gattung ſind, jedoch an Größe gleich.

10. Daß man allen merklichen Fehler in der geſuchten Länge vermeiden könne, wenn man beyde Winkel zu groß, oder beyde zu klein genommen hat,

läßt ſich ohne Beſchwerde zeigen; und wenn wir ſetzen, daß ſich das zweyte zutrage, (Fig. 1057) ſo ſey die geſuchte Länge AB, der Fehler in dem Winkel A ſey BAH, wenn man nähmlich aus A mit AB einen kleinen Bogen BH beſchreibet. Man nehme den Winkel BAC = 45°, wie auch AC = CD, und beſchreibe auf dem Durchmeſſer AD aus dem Mittelpunkte C einen Halbcirkel. Den Bogen BI, der durch die verlängerte Linie AH abgeſchnitten wird, übertrage man in KB, und ziehe aus K durch H die gerade Linie KHE, die an den Halbcirkel bey E ſtößt. Es zeigt ſich alſo gleich, daß die Winkel KEB, BAI einander gleich ſind, und die Auflöſung des Dreyeckes AHE anſtatt AB eine gleich große Länge AH geben muß.

Es liegt uns nur ab, den Punkt E wenigſtens beynahe zu beſtimmen, und wenn wir ſchon nicht gänzlich allen Fehler vermeiden, ſo iſt es doch gewiß, daß er ſehr klein ſeyn muß. Zu dieſem Ende ſetzen wir, der Bogen BI ſey unendlich klein, ſo wird das bey B rechtwinklichte Dreyeck GBI wegen des Winkels BGI = 45°, auch die Seiten BG, BI gleich haben. Und wenn wir aus A mit dem halben Durchmeſſer AG noch einen Bogen beſchreiben, ſo muß dieſer unendlich nahe bey K den Halbcirkel ABD ſchneiden; mithin kann GK von GI nicht unterſchieden ſeyn, und KGI iſt als ein rechter Winkel anzuſehen. Ueberdieß fällt BH in dem gleichſchenklichten Dreyecke IBG von der Spitze B ſenkrecht auf die Grundlinie GI, und ſchneidet ſie in zwey gleiche Theile, daß folglich ſich KG = GI zu GH, wie 2 zu 1 verhalte. Nehmen wir nun KG für den halben Durchmeſſer, und GH für die berührende Linie des Winkels GKH, oder (bey Verlängerung des KG bis in L) LKE an, ſo finden wir dieſen 26° 34′ beynahe. Es wird demnach der Bogen DE (weil DL = KB unendlich klein iſt) = 53° 8′, der Winkel BAE = 18° 26′, BEA = 45°, als welcher von dem Viertel AB des ganzen Umkreiſes unterſtützet wird. Wir wollen nun ſehen, wie die wirkliche Berechnung eintreffe, für welche zu merken iſt, daß allezeit HAE von 18° 26′ müſſe genommen werden, was immer der Fehler BAI beträgt. Denn weil LG auf AB ſenkrecht ſtehet, und BD ein Viertel des Cirkels iſt, ſo iſt allezeit KB = DL, mithin EAD = 26° 34′ — BAI, und wenn man dieſen Winkel von IAD = 45° — BAI abzieht, ſo verbleibt IAE = 18° 26′. Gleichermaßen iſt klar, daß KEA für 45° — BAI anzunehmen ſey.

Dieſes bemerkt, ſetzen wir den Fehler BAI = 10′ an; ſo wird EAD = 26° 24′, und ſtehet R: coſ 26° 24′ = AD: AE. Wenn wir AB = 1 annehmen, gilt AD ſo viel $\sqrt{2}$, deſſen Logarithme = 0,1505150.

Log coſ EAD	= 9,9521683
Log AD	= 0,1505150
Log AE	= 0,1026833

Ferner muß man in dem Triangel AHE anſtatt des Winkels AHE ſeinen Nebenwinkel IHE, welcher 18° 26′ + 44° 50′ = 63° 16′ beträgt, nehmen, und ſtehet alſo ſin 63° 16′: AE = ſin 44° 50′: AH.

Log AE	= 0,1026833
Log 44° 50′	= 9,8482180
Summe	= 9,9509013
Log 63° 16′	= 9,9509049
Log AH	= 0,0000036,

wel-

welchem etwas mehr, als 0,999914 gebühret. Hieraus ſieht man, daß wenn die geſuchte Länge AB 1000 Schuh wäre, der Fehler kaum mehr als einen Zoll betrüge.

11. Man wird allhier vielleicht denken, daß dieſe Beſtimmung des Standes E vielmehr einem leeren Hirngeſpinſte, als einer Sache gleiche, die man in dem Gebrauche anwenden könnte, als in welchem man durchaus die allzu kleinen Winkel, dergleichen dieſer von 18°26′ iſt, verwirft; da überdieß die Grundlinie AE viel zu lang wird. Allein es lag uns ob, die Sache ſo vorzutragen, wie ſie eine wohl gegründete Theorie gab, meiſtens weil auch im Falle eines entgegengeſetzten Fehlers in dem Winkel A, der Fehler in der geſuchten Länge nicht größer würde, als wenn man allein bey dieſem Winkel geirrt hätte, wenn man ihn 45° annimmt. Dieſes zu zeigen wird nur erfordert (Fig. 1058), daß GB von IE bey H gleich abgetheilet werde; denn wir werden haben IG: GH = R; tang 26°34′, und werden alſo die vorigen Winkel EIL, EAD herauskommen.

12. Uebrigens habe ich für den Fall, da die Fehler in den Winkeln A und E zwar gleich groß, doch von entgegengeſetzter Gattung wären, nichts neues zu melden, was ich nicht ſchon oben bey dem vierten Falle geſagt hätte, denn, wie man es aus bloßer Betrachtung der 1055, und 1056 Figur abnehmen kann, weil die Lage der Linie AE keinen weſentlichen Einfluß in die Beſtimmung hat, und die Winkel DAB, LEF allezeit gleich verbleiben, wenn nur bey E ein rechter Winkel iſt: ſo halte ich die Wahl des Winkels A gänzlich für willkürlich, ſo weit er nicht den allgemeinen Geſetzen der Meßkunſt zuwider iſt.

Jedoch muß ich auch bekennen, daß ob ich ſchon weiß, daß zwiſchen den Bogenhöhen kleiner Winkel ſich ein größerer Unterſchied befinde, als zwiſchen jenen der Größen, ich doch keine hinlängliche Urſache finde, warum man in einem kleinen Winkel (die gar kleinen ausgenommen, als für welche die gebräuchlichen kleinen Inſtrumente ohne das untüchtig ſind) mehr fehlen ſollte, als in einem großen, wenn man die Größe der Fehler in ſich ſelbſt betrachtet, nicht aber im Vergleiche mit dem genommenen Winkel. In die von mir vorgetragene Beſtimmung der geſuchten Größe hat die Bogenhöhe des Winkels BAE keinen Einfluß, ſondern ich habe nur angenommen, daß die Fehler BAI, BEK gleich ſind.

Ja wollte man auch (Fig. 1057) die Seite EB ſuchen, ſo würde man finden, daß in dieſer der Fehler nicht größer werde, als der ſich zu dem Fehler des Winkels BAE verhält, wie die Bogenhöhe des Winkels B zu dem halben Durchmeſſer.

Eine andere Auflöſung.

13. Man nehme an, der Fehler HAB, (Fig. 1058 a) um welchen der Winkel A zu groß genommen worden, ſey unendlich klein, und man ſtelle ſich auf dem Durchmeſſer HB einen unendlich kleinen Cirkel HIB vor, wie auch einen Halbcirkel AEB auf dem Durchmeſſer AB. Wenn man eine Sehne BE nach Belieben ziehet, und verbindet die Punkte E und H mit einer Linie, ſo erhält man die ähnlichen Dreyecke HGA, HGE, und ſtehet HA oder BA: BE = HG: BG. Beyneben hat man, der rechten Winkel HBG, HIB wegen, HG: HB = BG: IB; folglich auch HA: HB = BE: BI, und ſind die Winkel HAB, BEI gleich.

Wenn

Wenn wir den kleinen Cirkel BI mit BK, wie auch die Linie Be mit BE, und EF mit Fe gleich machen, ſo muß eK durch den Punkt H hindurch gehen, und die Winkel BEH werden gleich. Wählet man demnach den Stand in e, und nimmt beyde Winkel A und e zu groß, ſo muß die Aufloͤſung des Triangels AHe eine gleiche Seite AH anſtatt AB geben, ohne merklichen Fehler.

Aus dieſem liegt am Tage, daß es zählbare Punkte e gebe, aus denen man allen Fehler in der geſuchten Länge vermeiden kann; und mithin die Aufgabe unbeſtimmt ſey, ob man ſchon das Widerſpiel vermoͤge der vorigen Aufloͤſung glauben koͤnnte.

14. Wir wollen nun einen Winkel BAe inſonderheit beſtimmen, wobey wir auf zwey Stuͤcke zu ſehen haben: erſtens, je länger wir die Seite Be nehmen, deſto ſtumpfer wird der Winkel bey B, und die uͤbrigen zwey kleiner. Zweytens, je weniger der Winkel B einen rechten uͤberſteiget, deſtomehr nimmt die Seite Be ab. Beydes iſt in der That ſehr unbequem, beſonders weil bey wachſender Seite Be zugleich auch die Grundlinie verlängert wird.

Der Winkel BAe kann nicht groͤßer werden, als 19°28′ und einige Secunden, deſſen Bogenhoͤhe ſich zu dem halben Durchmeſſer wie 1 zu 3 verhält; wie man leicht erſehen wuͤrde, ſofern man auf der Verlängerung der Linie AB einen mit AEB gleich großen Halbcirkel beſchriebe, und aus A auf denſelben eine Tangente zoͤge, die den groͤßten Winkel mit AB enthielte, indem alle uͤbrigen den Halbcirkel ſchneiden, und einen kleinern Abſtand von ſeinem Mittelpunkte haben wuͤrden. Die Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke FEB, FBe aber zeigt zur Gnuͤge, daß E in e in gleichen Halbcirkeln liegen. In dieſem Falle ſtuͤnde Ae zu AB, wie $\sqrt{2}$ zu 1.

Wir nehmen alſo BE = $\frac{1}{2}$ AB, und laſſen aus E auf AB die ſenkrechte Linie EP fallen. Dieſes geſetzt wiſſen wir, daß der Winkel BAE 30° hält, deswegen auch PEB = EBF = FEe = 30° und ABe = 120°. Wir haben auch AB : BE = BE : BP, oder wenn wir AB fuͤr 1 annehmen, $1 : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$; und ſo wir BQ und BP gleich machen, wird AQ = $\frac{5}{4}$. Nun aber iſt PE = Qe $= \sqrt{AP \times PB} = \sqrt{\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$; folglich AQ : QE $= \frac{5}{4} : \frac{\sqrt{3}}{4} = 5 : \sqrt{3}$ = R : tang QAe.

$$\begin{aligned} \text{Log}\,\sqrt{3} &= 0{,}2385606. \\ \text{Log}\ 5 &= 0{,}6989700. \\ \hline \text{Log tang QAe} &= 9{,}3395906, \end{aligned}$$

welchem beynahe 19°6′ zukoͤmmt, und der Winkel Bea wird faſt 40°54′.

Geſetzt, man nehme die Winkel A und e, um 10 Minuten zu groß, ſo wird der Winkel AHe = 119°40′, deſſen Bogenhoͤhe eben ſo groß als des Nebenwinkels 60°20′. HAe wird 19°16′, und HeA 41°4′. Allein wir muͤſſen zuvor aus folgender Proportion die Grundlinie Ae finden: coſ 19°6′ : R = $\frac{5}{4}$: Ae.

$$\begin{aligned} \text{Log}\ \tfrac{5}{4} + \log R &= 10{,}0969100 \\ \text{Log cos}\ 19°6′ &= 9{,}9754083 \\ \hline \text{Log Ae} &= 0{,}1215017 \end{aligned}$$

Suchen wir jetzt in dem Triangel AHe die Seite AH, ſo ſtehet ſin 60°20′ : Ae = ſin 41° 4′ : AH.

Log

Log Ae = 0,1215017
Log ſin 41°4′ = 9,8175235

Summe = 9,9390252
Log ſin 60°20′ = 9,9389796

Log AH = 0,0000456,

dem die Zahl 1,000105 beynahe gebührt; es wird alſo der Fehler nicht mehr als 1, 2 Zoll betragen, welcher nur um ſo viel größer ausgefallen iſt als in der vorigen Beſtimmung, da wir die geſuchte Seite etwas zu klein bekommen haben.

Uebrigens ſcheint es unnöthig anzumerken, daß in gegenwärtiger Auflöſung auch jene enthalten ſey, die für den Fall gehört, da man den Winkel A zu groß, und den Winkel E zu klein genommen hat.

15. Weil wir ſo oft das Verhältniß des Fehlers der Winkel gegen den Fehler der geſuchten Seite angeführt haben, ſo ſcheint es billig, daß wir wenigſtens im Vorbeygehen die Art andeuten, dieſe Größen von verſchiedener Gattung mit einander zu vergleichen. Wir wiſſen aus der Geometrie, daß ein Cirkelbogen, welcher 57°17′44″,8 = 206264″,8 hält, wenn er gerade in die Länge ausgeſtreckt wird, ſeinem halben Durchmeſſer gleich werde, wenigſtens beynahe. Man muß demnach folgende Proportion machen: wie 206264″,8 ſich zu der Zahl der Minuten des in dem Winkel begangenen Fehlers (die man zuvor zu Secunden macht) verhalten, alſo verhält ſich die dem irrigen Winkel anliegende Seite, welche man in einem bekannten Längenmaaße, als in Schuhen, Zollen u. ſ. w. gefunden hat, und mit welcher wir den kleinen Bogen, der den Fehler des Winkels mißt, beſchrieben haben, zu der vierten Zahl, welche uns den Fehler des Winkels in eben demſelben Längenmaaße giebt: das iſt, in Schuhen, oder Zollen u. ſ. w. Zur angeführten Proportion läßt ſich ſehr bequem der Logarithme des Winkels 206264″,8 (die man als natürliche Zahl anſieht) gebrauchen, welcher iſt 5,3144251.

16. Für gegenwärtigen Verſuch ſchicket ſich auch folgende Aufgabe: den Punkt E (Fig. 1059) zu finden, dergeſtalt, daß der Abſtand des wahren Punkts B von dem C, wenn beyde Winkel A und E zu klein genommen werden; oder von den Punkten c, d, wenn die Fehler der Winkel von entgegengeſetzter Gattung ſind; oder endlich von dem Punkte D, da beyde Winkel zu groß, der kleinſte ſey. Mit dem halben Durchmeſſer BH oder BG, welcher der Bogenhöhe des Winkels HAB, oder BAG, das iſt, des bey A begangenen Fehlers, gleich iſt, beſchreibe man einen kleinen Cirkel, und verlängere BG bis in F nach Belieben. Es iſt augenſcheinlich, daß wo man immer den Stand in der Linie BF hinſetzet, die Abſtände BC, Bc u. ſ. w. größer werden, als BH oder BG, weil ſie die ſchneidenden Linien ſind im Anſehen der berührenden GC, Gc u. ſ. w., von was immer für einer Gattung die Fehler der Winkel ſeyn mögen. Um BC mit BG gleich zu erhalten, wäre nothwendig BE ſo klein zu nehmen, daß es nicht einmahl BG betrüge.

Denn man ſtelle ſich vor (Fig. 1060) KF oder KD ſey eben das, was in der vorigen Figur BG; KI aber ſey ein Theil der Linie BA, wie auch HFG ein Theil von GA. Man ſieht, daß der bey A begangene Fehler durch DKF angedeutet werde: damit der bey E begangene Fehler dieſem gleich werde, iſt unumgänglich nothwendig, daß die eine Linie EA durch den Mittelpunkt K gezogen werde, die andere EL aber den Cirkel alſo in F und L ſchneide, daß der

Bogen ABCL mit 3DF gleich werde; denn allein auf dieſe Weiſe wird DKF = AEL, und KF = FE, folglich iſt DE etwas kleiner als KD. Aus dieſem erhellet, daß es bey einem rechten Winkel B nicht möglich ſey, den Abſtand BC, BD u. ſ. w. mit BG, BH gleich zu bekommen.

17. Iſt aber ABE ein ſpitziger Winkel, ſo ſind unendlich viel Punkte E (Fig. 1061) die, bey entgegengeſetzten Fehlern der andern Winkel, den Abſtand der Scheitel des irrigen und wahren Triangels dem BH können gleich geben, doch niemahls kleiner. Man beſchreibe auf HB, die den Fehler des allzugroßen Winkels A mißt, den Halbcirkel HDB, und nachdem man eine beliebige Linie HDE gezogen hat, ſo ſetze man: HB; BD = HA: HE oder BE. Auf dieſe Art wird der Fehler des Winkels A gleich werden. Allein es zeiget ſich, daß der Winkel B um ſo viel ſpitziger ausfalle, je länger man die Seite BE machet, daß mithin dieſe jederzeit viel kleiner als AB ſeyn müſſe.

Wenn die Fehler der Winkel von gleicher Gattung wären, müßte man den Winkeln ABe ſtumpf nehmen, wollte man anders den Abſtand der Scheitel beyder Dreyecke mit HB gleich haben; und es würde wiederum ſtehen HB: MB = AB: Be, um die Länge der Seite Be zu beſtimmen.

Wenn man in dieſen beyden Fällen die Seite BE, oder Be kleiner machte, als ſie die angeführte Proportion giebt, würde der Abſtand des Punkts B von dem Scheitel des irrigen Dreyeckes wachſen. Denn um die Gleichheit der Fehler zu erhalten, die man in den Winkeln begeht, müßte man zum Beyſpiele Fm mit HM parallel ſetzen, und ihre Verlängerung würde die Seite HA auſſer dem Cirkel HDB bey h ſchneiden, mithin würde auch hB größer als HB.

Aus dieſem erkennet man ſchon, daß der Fall des kleinſten Abſtandes der Scheitel unſerer Dreyecke von jenem nicht im geringſten unterſchieden ſey, in welchem die Fehler der Winkel A und E den Fehler der geſuchten Seite aufheben.

Allgemeine Anmerkung.

18. Dieſes gab mir den Stoff des gegenwärtigen Verſuches. Wenn wir alles reiflich erwägen, ſo finden wir, daß der Stand E nur in einem einzigen Falle könne mit vollkommener Sicherheit beſtimmet werden, da nähmlich ein Winkel ohne Fehler iſt, und die Lage der Grundlinie gegeben wird. In allen übrigen gründet ſich die Wahl auf die Art, und Gattung der bey den Winkeln angenommenen Fehler. Befinden ſich dieſe in der That alſo, wie man ſie annimmt, ſo iſt es ſicher, daß man entweder den kleinſten Fehler in der geſuchten Länge erhalte, oder den ganzen vermeide. Allein wer wollte für eben dieſes Bürge leiſten, wenn nicht ein beſonderer Umſtand die Wahrſcheinlichkeit eines Falles vor dem andern weit vorzüglicher macht? Die Klugheit erfordert zum öftern, daß man vielmehr der Gefahr eines größern Fehlers ausweiche, als nur beſorgt ſey, die allerkleinſten zu begehen.

Iſt B (Fig. 1062) ein rechter Winkel, ſo wird der Fehler in der geſuchten Seite faſt mit dem Fehler des Winkels A gleich, wenn auch die Seiten AB, BE gleich ſind, und man kann dieſen noch vermindern, wenn die Seite BE kürzer wird. Aber man ſieht zugleich die Unbequemlichkeit, eine ſo lange Grundlinie AE, die allezeit größer, als AB wird, wirklich abzumeſſen.

Wir haben oben (7) geſehen daß, wenn der Winkel B ſpitzig iſt, und die Fehler der andern von gleicher Gattung, der Fehler der geſuchten Seite bey-

nahe

nahe ſey $= \frac{\text{Fehl E} \times R + \text{Fehl A} \times \cos B}{\sin B}$. Nehmen wir nun den Fehler des Winkels A, nachdem wir ihn in ein bekanntes Längenmaaß gebracht haben, für 1 an, und berechnen nach dieſer Formel den Fehler der Seite AB, geſetzt, daß der Triangel gleichſchenklicht, der Winkel E oder B = 75°, und die Fehler von gleicher Gattung ſind, ſo finden wir ihn beynahe = 0, 8; im Falle entgegengeſetzter Fehler aber = 0, 53; da doch dieſer bey einem rechtwinklichten, und gleichſchenklichten Dreyecke, wenn die Fehler von eben der Gattung ſind, = 1 wird. Und ob man ſchon mit Verkürzung der Seite BE, bis der Winkel A auf 30° kömmt, dieſen Fehler auch etwas unter 0, 8 bringen kann; ſo glaube ich doch nicht, daß eine ſo geringe Verminderung die Mühe bezahle, die eine längere Grundlinie, als AB ſelbſt iſt, mit ſich bringt.

Wenn ich demnach eine etwas größere Wahrſcheinlichkeit, daß die bey A und E vorfallenden Fehler einander entgegen ſind, nicht anſehen wollte, ſo glaubte ich daß es öfters zuträglich ſey, ein gleichſchenklichtes Dreyeck zu wählen, in welchem der Winkel A nicht viel von 30° abweiche. Aber ich wiederhole es noch einmahl, daß ich dieſes nur in dem Falle will verſtanden haben, da man allein die Seite AB ſuchet, nicht auch die übrigen Theile. Denn ſonſt wollte ich gern einem gleichſeitigen Dreyecke den Vorzug geben.

Scherffers, Carl, trigonometriſcher Verſuch von der Wahl des Standes, aus welchem man die Entfernung zweyer Orten abmißt ꝛc. Wien 1766 gr. 8.

III. Scherffer über die Meſſung des Abſtandes zweyer Ort, zu deren keinem man kommen kann.

1. Wenn man den Abſtand zweyer Oerter mißt, derer keiner uns den Zutritt geſtattet, als z. B. CD Fig. 1063 ſo muß man zwey Stände A und B wählen, wie auch zwey Dreyecke CBA, DAB auf einer gemeinſchaftlichen Grundlinie beſtimmen, weil der Abſtand der Scheitel derſelben eben die geſuchte Entfernung iſt.

Dieſe Triangel nun kann man entweder alſo beſtimmen, daß bey dem Stande A für den Triangel CAB unmittelbar der Winkel CAB und für den Triangel DBA der Winkel DAB genommen werde; wie auch in dem Stande B der Winkel CBA für den erſten und der Winkel DBA für den zweyten: oder man kann in dem Stande A die Winkel CAD, und DAB; in dem Stande B aber die Winkel DBC und CBA nehmen. Was immer geſchiehet, ſo kömmt es doch auf eins heraus; denn die Summe CAD + DAB giebt den Winkel CAB des Dreyecks CBA; und die Summe DBC + CBA giebt den Winkel DBA des Dreyecks DAB. Wir ſetzen alſo, daß in der Summe CAD + DAB eben ſo viel gefehlt werde (es ſey daß ſie zu groß oder zu klein ausfalle) als wenn man den Winkel auf einmal genommen hatte.

Eben einen dergleichen Fehler nehmen wir bey der Summe DBC + CBA an, als man begangen hätte, in Beſtimmung des Winkels DBA. Wenn wir überdieß annehmen, daß bey den Winkeln CBA, DAB gleich große Fehler vorgehen, ſo iſt klar, daß in der geſuchten Entfernung CD ein Fehler entſtehen müſſe, der entſtehen müßte, ſofern man in Beſtimmung der Dreyecke BAD, ACB in den Winkeln CAB, CBA; DAB, DBA gleiche Fehler begangen hätte:

2. Nun aber können beyde Winkel A und B des Dreyecks CAB zu groß ſeyn, und man erhält dafür einen andern EAB. Wären beyde Winkel zu

klein, doch die Fehler gleich groß, ſo hätte man anſtatt CAB das Dreyeck GBA beſtimmet. Auf gleiche Weiſe ſiehet man, daß anſtatt des Dreyecks DAB entweder FAB, wenn die Winkel B und A zu groß ſind, oder HAB, wenn ſie zu klein ſind, genommen werde.

In dieſem Falle der Fehler von gleicher Gattung und Größe, iſt bekannt, daß der Unterſchied unter den Winkeln CAB, CBA; GAB, GBA; EAB, EBA; wie auch DAB, DAB u. ſ. w. beſtändig gleich verbleibe; und Newton hat ſchon (Arithm. univerſ.) bewieſen, daß die Ecken E, C, G u. ſ. w. ſamt den Punkten A, B ſich in dem Umkreiſe zweyer entgegen geſezter Hyperbeln befinden, deren Durchmeſſer AB iſt.

3. Es kann hernach geſchehen, daß in dem Dreyeck CAB Fig. 1064 der Winkel A zu groß und der Winkel B um eben ſo viel zu klein genommen werde, oder umgekehrt.

Im erſten Falle bekömmt man ſtatt des Dreyecks CAB ein anderes GAB; im zweyten aber EAB. Aus gleicher Urſache geben die entgegengeſetzten Fehler anſtatt des Dreyecks DAB entweder HAB oder FAB.

Und wer ſiehet nicht ſogleich, daß wegen gleicher Fehler von entgegengeſetzter Gattung die Summen der Winkel A und B jederzeit unverändert verbleiben, wie auch folglich die Winkel G, C, E; F, D, H; und alſo um alle ungleiche Vierecke, die durch Verbindung der Spitzen G, C, E mit H, D, F können geſtaltet werden, eben derſelbe Cirkel könne beſchrieben werden: wenn nur die Summen der Winkel A, B in beyden Dreyecken gleich ſind, welches wir größerer Leichtigkeit wegen annehmen: denn ſonſt müßte um ein jedes Dreyeck ein beſonderer Cirkel beſchrieben werden.

4. Es kann ſich endlich zutragen, daß in dem Dreyecke CBA die Fehler von gleicher Gattung ſind, und in dem Dreyecke DAB von entgegengeſetzter, ſmithin die Spitzen des erſten G, C, E in dem Umkreiſe einer Hyberbel; die Spitzen des zweyten, in dem Umkreiſe eines Cirkels CABD liegen Fig. 1065.

5. Aus dieſen Anmerkungen kennen wir ſchon einige Folgen ziehen, und zwar erſtens, wenn im Falle Fig. 1063 die Fehler der Dreyecke CAB, DAB, bey allen Winkeln von gleicher Gattung ſind, ſo wird der Fehler der geſuchten Länge CD um ſo viel größer, je kleiner die Grundlinie AB in Anſehen CD iſt. Denn wenn die Grundlinie klein iſt, ziehen ſich die Hyperbeln geſchwinder zuſammen, und ihre entgegen ſtehenden Aeſte weichen mehr von einander ab.

Zweytens. Wenn in dem Dreyecke CAB die Winkel zu klein, in dem andern DAB aber zu groß genommen werden, und AD größer iſt als AC, können die Fehler der Winkel den Fehler in der Länge CD nicht aufheben; gleichwie auch dieſes nicht geſchehen kann, wenn in dem erſten Dreyecke die Winkel zu groß, und in dem zweyten zu klein angeſetzt werden.

Drittens. Wenn die Dreyecke CAB, DAB gleich ſind, und in dem erſten die Winkel zu groß, in dem zweyten zu klein ſind; ſo haben die Fehler der Winkel den Fehler in der Länge CD beynahe auf.

Viertens. Wenn bey dem Falle Fig. 1064, allwo wir angenommen haben, daß die Fehler der Winkel A, B in beyden Dreyecken von entgegengeſetzter Gattung ſind, man den Winkel A des Dreyecks CAB zu groß, und den Winkel B zu klein angenommen hat; wie auch in dem Dreyecke DAB der Winkel A zu groß und B zu klein iſt, oder im Gegentheil auf gleiche Weiſe in gemeldeten Dreyecken gefehlt wird, ſo begehet man keinen Fehler in der geſuchten Entfernung CD. Denn der Scheitel des erſten Dreyecks wird G, des zweyten

ten F. Weil nun CG mit DF gleich iſt, ſo iſt auch GC + CF = CF + FD, folglich ſind die Sehnen gleicher Bogen CD, GF auch gleich. Eben dieſes verſtehet ſich, wenn man die Scheitel E, H nimmt.

Fünftens. Wenn aber in dem Dreyecke CAB der Winkel A zu klein, und B zu groß wird; wie auch in DAB der Winkel B zu klein, und A zu groß; oder wenn im Gegentheile in dem erſten A zu groß, und B zu klein; in dem zweyten B zu groß, und A zu klein geſetzt wird, ſo wird der Fehler der Linie CD in beyden Fällen merklich ſeyn.

Sechſtens In beyden letzten Fällen iſt der Fehler in der Länge CD am kleinſten, wenn CD der Durchmeſſer des Cirkels wird. Denn der Fehler beſtehet in dem Unterſchiede zwiſchen der Sehne FE, oder GH, und der Sehne CD, derer Bogen ſich von dem Bogen EF oder GEF durch den doppelten Bogen GC oder CF unterſcheidet. Nun aber iſt der Unterſchied der Sehnen um ſo viel kleiner, je näher ſie dem Durchmeſſer kommen, nähmlich als gedoppelter Bogenhöhen der Winkel, die von einem rechten nicht viel abweichen.

Siebentens. In dem Falle Fig. 1065 wird der Fehler in der Länge CD kleiner, wenn man die Winkel des Dreyecks CAB zu klein nimmt, in dem Dreyecke DAB aber den Winkel A zu groß, und den Winkel B zu klein, als wenn das Widerſpiel geſchiehet; wenigſtens iſt dieſes wahr, wenn die Seiten AC, BD nicht gar zu ſehr unterſchieden ſind. Ja es kann ſich auch ereignen, daß der Fehler in der geſuchten Länge gänzlich wegfällt, beſonders wenn der Winkel CAB kleiner iſt als DAB. Die Folge gründet ſich darauf, daß, wenn die Punkte G, O, E in der Hyperbel ſind, die Linien BG, BC, BE mehr unterſchieden ſeyn müſſen, als wenn ſie auf der Linie AE lägen. Im Gegentheil muß ſich ein kleinerer Unterſchied zwiſchen den Linien AH, AD, AE befinden, als welche ſich an dem Umkreiſe des Cirkels enden, als wenn ſie durch die Linie BF abgeſchnitten würden.

Aus dieſem aber folgt, daß der Abſtand der Scheitel in den Dreyecken, welche an die Hyperbel ſtoſſen, mehr wachſe, als bey jenen, derer Scheitel in dem Umkreiſe des Cirkels liegen, und mithin der Abſtand der Punkte G, F weniger von CD unterſchieden ſey, als der Punkt H, E.

6. Aus allem dieſen erſiehet man leicht, daß man am natürlichſten jenes annehmen kann, was wir zum Fünften vorgetragen haben. Und wird deſgen die beſte Wahl der Stände ſeyn, wofern man die Winkel CAD, DBC beynahe 90° nimmt, und die Summen der Winkel, A, B, nach der oben (3) gemachten Anmerkung gleich. Denn in dieſem Falle iſt der Fehler in der Länge CD entweder der kleinſte oder gar keiner.

7. Es kann einem aber wahrſcheinlicher ſcheinen; daß wenn man die Winkel CAB, DBA, in den Dreyecken gleiches Nahmens abgetheilt nimmt, d. i. anſtatt CAB, die zwey CAD und DBA, daß, ſage ich, der Fehler des Winkels A in dem Dreyecke CAB noch einmal ſo groß werde, als der Fehler des Winkels B; wie auch der Fehler des Winkels B in dem Dreyecke DBA doppelt ſo groß, als der Fehler des Winkels A. Wenn wir dieſes annehmen ſo iſt der Fall, der ſich am leichteſten unterſuchen läßt, da die Dreyecke gleichſchenklicht ſind. Und kann man dieſes erhalten, wenn der Nebenwinkel des Winkels CAB noch einmal ſo groß wird, als der Winkel CBA, wie auch der Nebenwinkel des Winkels DBA noch einmal ſo groß als der Winkel DAB.

Wenn es ſich alſo verhält, ſo iſt klar, daß die Punkte G, C, F, D, H Fig. 1066 ſich in den Umkreiſen zweyer gleichen Cirkel befinden, derer halber

 Durch-

Durchmeſſer AB, und die Mittelpunkte A, B ſind. Setzen wir nun, der Winkel CAB werde um GAC zu groß; der Winkel CBA aber um CBG zu klein genommen, und CAG = 2CBG; gleichfalls ſey der Abgang FBD bey dem Winkel DAB = 2 FAD, das iſt, dem doppelten Fehler, um welchen der Winkel DAB zu groß iſt, ſo bekommen wir GF anſtatt CD. Aus dem Punkte r in welchen ſich dieſe zwey Linien ſchneiden, beſchreibe man die zwey kleinen Bogen Fn, Co, und laſſen die zwey ſenkrechten Linien Bq, Ap aus B und A auf GF und CD fallen. Weil die Bogen FD, CG ſehr klein ſind, ſo muß man die Dreyecke FnD, qDB für ähnlich anſehen, und ſtehet alſo nD: FD = qB: DB. Aus gleicher Urſache ſind die Dreyecke CGo, GpA ähnlich, und man hat Go: GC = pA: GA. Hieraus ſchließt man, daß wenn nD mit Go gleich ſeyn ſoll, auch Bq mit Ap gleich werden müſſe, und die Grundlinie AB mit CD parallel; ſonſt können die Fehler der Winkel den Fehler in CD nicht aufheben, ſondern wenn CAB > DBA, wird GF < CD, weil der Unterſchied der Bogenhöhen kleinerer Winkel qBD größer iſt, als der Unterſchied der Bogenhöhen größerer Winkel pAC, oder pAG.

Läuft die Grundlinie mit CD parallel, und iſt der Winkel CAB wie auch DAB zu groß, hingegen die Winkel CBA, DAB zu klein: ſo verhält ſich der Fehler des Winkels CAB, nach der Grundlinie AB als ſeinem Halbmeſſer gerechnet, zu dem Fehler in der geſuchten Weite CD, wie der Halmeſſer zu der gedoppelten Bogenhöhe des Winkels CAB. Dieſes zeiget ſich aus der Aehnlichkeit der Dreyecke CGo, GAp, und weil Ap die Bogenhöhe des Winkels CAB iſt.

Wollte einer behaupten, es ſey wahrſcheinlicher, daß wenn die Winkel CAD + DAB oder DBC + CBA genommen werden, man zwar in einem jedweden fehle, doch die Fehler von entgegengeſetzter Gattung ſeyn; dieſer müßte uns zuvor bereden, daß es allezeit ſicherer ſey, einen Winkel, welcher es immer ſeyn möge, lieber theilweiſe als auf einmahl zu meſſen, welches aber gar nicht wahrſcheinlich iſt. In dieſem Falle würden die Winkel CAB, DBA für richtig zu halten, und nur die CBA und DAB als mangelhaft anzuſehen ſeyn.

8. Wenn einer die geometriſche Linie zu wiſſen verlangt, auf die die Scheitel der Dreyecke ſtoſſen, deren bey der Grundlinie liegende Winkel ungleich, jedoch in einem gewiſſen Verhältniſſe jederzeit wachſen oder abnehmen, ſo kann man in dieſem Stücke verſchiedene Bedingungen annehmen. Hier ſcheint es am beſten, wenn man ſetzet, daß die ſtumpfen Winkel Fig. 1063 theilweiſe genommen werden, und ihr Zuwachs oder Abnahme noch einmahl ſo groß ſey als der ſpitzigen. Die geometriſche Linie aber, in der die Spitzen H, D, F. u. ſ. w. liegen, kann man auf folgende Art ſehr leicht beſtimmen.

Man nehme die Grundlinie BA Fig. 1067 für den halben Durchmeſſer des Cirkels BRO, und RA ſey auf BA ſenkrecht. Wenn der ſpitzige Winkel B von 0°, und der ſtumpfe A von 90° an zu wachſen anfangen ſoll, ſo nehme man die Bogen RS, OT gleich. Der Punkt M, in welchem ſich AS, und BT ſchneiden, wird zur geſuchten Linie gehören.

Man ſetze BA = a, AQ = Z, AP = x, PM = y, und ziehe die Linie OT, wie auch TZ auf AO ſenkrecht, und VS mit AO parallel, endlich SN parallel mit RA. Der gleichen Bogen RS, OT wegen iſt klar, daß TZ = VS = AN, und SN = AZ. Weil nun die Dreyecke BAQ, BTO ähnlich ſind, ſo ſtehet (BQ $= \sqrt{a^2 + Z^2}$): AQ (Z) = BO (2a): TO ($= \frac{2aZ}{\sqrt{(a^2+Z^2)}}$). Aus der Eigen-

genſchaft des Cirkels iſt BO : OT = OT : OZ

$$2a = \frac{2aZ}{\sqrt{(a^2+Z^2)}} = \frac{2aZ}{\sqrt{(a^2+Z^2)}} : \frac{2aZ^2}{a^2+Z^2}.$$

Mithin $AZ = AO - OZ = a - \frac{2aZ^2}{a^2+Z^2} = \frac{a^3 - aZ^2}{a^2+Z^2}$. Aus dieſem findet man $TZ = \frac{2a^2Z}{a^2+Z^2}$. Ueberdieß geben die ähnlichen Dreyecke ASN, AMP, AN : SN = AP : PM, und man erhält $y = \frac{x(a^2 - Z^2)}{2aZ}$. Die Dreyecke BAQ, BPM, die gleichfalls ähnlich ſind, geben auch BA : QA = BP : MP; hieraus hat man einen zweyten Werth des y, nähmlich $y = \frac{aZ + Zx}{a}$. Wenn man dieſe zwey Werthe zuſammen nimmt, bringt man das Z aus der Gleichung weg, und die Gleichung für die geſuchte Linie wird

$$3xy^2 - x^3 + 2ay^2 - 2ax - a^3x = 0.$$

Man erſiehet ſchon, daß der Aſt AMCD der Aufgabe genug thue; aber die Eigenſchaften dieſer Linie zu unterſuchen, gehöret nicht hierher.

Dieſes allein bemerken wir, daß ſie den Cirkel bey C alſo durchſchneide, daß der Bogen OC = 45°. Bekommen die Bogen RH und OG 30°, ſo werden die Linien BH, AG parallel, und der Punkt, in dem ſie zuſammen ſtoſſen, iſt unendlich entfernt. Nehmen die Bogen GO, HR noch durch die übrigen 30 Grade allmählich ab, ſo müſſen die Linien HB, AG auf der entgegen geſetzten Seite ſich ſchneiden, und durch ihr Zuſammenſtoſſen bilden ſie einen andern Aſt FB. Gehet der Punkt H über, in das Viertel RB des Cirkels, und der Punkt G in das Viertel OE, ſo beſchreibet der gemeinſchaftliche Einſchnitt der gemeldeten Linien einen neuen Bogen BKL, der durch K bey 45° gehet, und eine auf AB ſenkrechte Aſymptote hat, deren Abſtand von A, $\frac{2}{3}$ AB beträgt. Dieſer Bogen würde die Scheitel der Dreyecke berühren, in denen der Winkel A von 0° an bis 90° doppelt ſo viel wächſt, als der Winkel B von 45° angefangen bis 90°.

9. Wollte man, daß der Winkel A von 90° bis 0° abnehme, und der Winkel B von 0° bis auf 45° zunähme, mit der vorigen Bedingung, daß die Veränderungen des erſten noch einmal ſo groß, als die Veränderungen des 2ten wären; ſo wäre nur vonnöthen, die Bogen OT in dem Quadranten OR, und die gleichen Rs in dem Quadranten RB zu nehmen. Der Einſchnitt der Linien sA, BT würde die Linie AmnB durchlaufen.

Würde der Winkel A negativ, oder nähme man die Bogen Rs in dem Quadranten BXE, und die Bogen OT in dem Quadranten RKB, d. i. fienge der Winkel A an, von 0° bis 90° zu wachſen, und der Winkel B von 135° bis 90° abzunehmen, nach dem vorigen Geſetze; ſo beſchrieben die zuſammen ſtoſſenden Linien HB, GA einen Bogen Bd, deſſen Aſymptote auf AB ſenkrecht fällt, und von A, um 2AB abſtehet.

Wenn endlich der Bogen RS für den Winkel A in dem Viertel BR, von B gegen R genommen würde, daß beyde Winkel nach eben dem Geſetze von 0° an wüchſen, ſo würde man eine gemeine Hyperbel finden, deren Querаxe $\frac{1}{3}$ AB, der Brennpunkt A, und B der Scheitel der entgegen geſetzten iſt. Dieſe würde den Cirkel bey R durchſchneiden, und der Winkel B könnte bis auf 60° zu neh-

nehmen, weil die Aſymptote der Hyperbel ihre Axe unter einem gleichen Winkel ſchneidet.

10. Es würde auch nicht gar zu ſchwer fallen, die Größe des in der geſuchten Weite CD Fig. 1063 begangnen Fehlers zu beſtimmen, wenn man die Scheitel der Dreyecke, in was immer für einer gegebenen Linie annähme. Denn man könnte einen kleinen Theil derſelben, als DF oder DH, mit allem Rechte für einen gleich großen Theil ihrer Tangente, die ſie bey D oder bey F berühret, anſehen. Nun aber weil alle Winkel in den beſtimmten Dreyecken bekannt ſind, ſo wäre es leicht auch den Winkeln zu finden, den die Tangente mit der Sehne BD oder BF macht; und würde alſo ſtehen: wie die Bogenhöhe dieſes Winkels zu dem halben Durchmeſſer; alſo verhält ſich der Fehler DBF zu dem kleinen Theile DF. Nach dieſem ſtelle man ſich vor, G und F werden durch eine Linie verbunden. Man wird aus den bekannten Winkeln GBF und zweyen Seiten BG, BF, auch den Winkel GFB ohne Mühe erhalten; und ſofern man von dieſen jenen abziehet, den die Tangente mit der Sehne BD macht, ſo hat man den Winkel DFG, und wird wiederum ſtehen: der halbe Durchmeſſer verhält ſich zur Bogenhöhe des Mitwinkels GFD, wie DF (welches man ſchon gefunden hat) zu dem Unterſchiede zwiſchen CD und GF, der ſich auf der Seite des Winkels D zeiget. Durch eine gleiche bey dem Winkel C vorgenommene Berechnung würde es ſich zeigen, wie groß der ganze Unterſchied zwiſchen CD und GF ſey.

Entfernungen zu meſſen, vermittelſt des Abſchreitens, ſiehe Linie gerade zu meſſen mit Schritten.

Entfernungen zu meſſen, vermittelſt des Aſtrolabiums.

2. Eine Diſtanz zu beſtimmen, die unmittelbar nicht gemeſſen werden kann. Fig. 1025.

Man meſſe mit dem Aſtrolabium den Winkel C, und die Linien AC, CB; ſo hat man Data genung, um auf dem Papier ein Dreyeck entwerfen zu können, welches dem auf dem Felde ähnlich iſt.

2. Andere Auflöſung. Fig. 1025.

Man meſſe den Winkel C mit dem Aſtrolabium, ferner die Linien AC und BC.

Nun ſuche man die Linie AB und die zwey übrigen Winkel zu bekommen. Dieſes geſchiehet alſo: AC + BC = der Summe der zwey Linien, und AC — BC = ihrer Differenz.

Den bekannten < C von 180° abgezogen, und den Reſt halbirt, kömmt $\frac{180° - C}{2}$ = der halben Summe der Winkel A und B; ferner B — A die ganze und $\frac{B - A}{2}$ die halbe Differenz der Winkel A und B.

Nun iſt alſo, vermöge des Satzes; daß in jedem Dreyecke ſich die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der 2 Winkel an der Grundlinie, zur Tangente ihrer halben Differenz verhalte;

$(AC + BC) : (AC - BC) = \text{Tang} \frac{180° - C}{2} : \text{Tang} \frac{B - A}{2}$; folglich iſt

$\text{Log Tang} \left(\frac{180° - C}{2}\right) + \text{Log} (AC - BC) - \text{Log} (AC + BC) = \text{Log}$

Tang

$\text{Tang}\ (\frac{B - A}{2})$ = der halben Differenz der 2 unbekannten Winkel.

Nun die halbe Differenz der Winkel zu ihrer halben Summe addirt, iſt $\frac{180° - C}{2} + \frac{B - A}{2}$ = B dem größern Winkel; und ſubtrahirt man dieſelbe davon, ſo iſt $\frac{180° - C}{2} - \frac{B + A}{2}$ = A dem kleinern Winkel.

Hat man die Winkel gefunden, ſo findet man die Seite AB nach dem Satze: wenn in einem Dreyecke eine Seite, und die daran liegenden Winkel gegeben ſind, gar leicht.

In dieſer Aufgabe, wird alſo der Winkel und ſeine beyden Schenkel gemeſſen. Allgemein heißt ſolche alſo.

3. Wenn zwey Seiten eines Dreyecks CA, CB Fig. 1026 nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel ACB gegeben ſind, die dritte Seite AB (die Entfernung welche beſtimmt werden ſoll), als auch die übrigen Winkel CAB, CBA zu finden.

Wenn man die Seiten AC = a, BC = b und des Winkels ACB ſinus = p nennet, die unbekannte Seite AB = Z, den ſinus von A = x und den ſinus von B = y: ſo iſt

$$x : y = b : a$$
$$x : p = b : Z$$
$$y : p = a : Z.$$

Weiter iſt $y = p\sqrt{(1 - x^2)} + x\sqrt{(1 - p^2)}$

aber $x = \frac{by}{a}$, alſo iſt

$$y = p\sqrt{(1 - \frac{b^2y^2}{a^2})} + \frac{by}{a}\sqrt{(1 - p^2)} \text{ oder}$$

$$y.(a - b)\sqrt{(1 - p^2)} = ap\sqrt{(1 - \frac{b^2y^2}{a^2})}. \text{ Daher}$$

$$y = \frac{ap}{\sqrt{(a^2 - b^2 - 2ab\sqrt{(1 - p^2)})}}. \text{ Gleichfalls}$$

$$Z = \frac{ap}{y} = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1 - p^2)})}. \text{ Und}$$

$$x = \frac{bp}{Z} = \frac{bp}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1 - p^2)})}}.$$

Weil $\sqrt{(1 - p^2)}$ der Coſinus von C iſt, den man = q ſetzen kann, wodurch $Z = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2abq)}$ wird, ſo muß man merken, daß der Coſinus eines größern Bogens als 90° negativ iſt.

Wenn C = 108°24′ = 180° − (71°36′), a = 75, b = 58, ſo iſt q = − 0,3156490 und

− 2q. ab = + 2746,1463

$a^2 + b^2 = 8989$

$a^2 + b^2 - 2q.\ ab = 11735,1463;$

die Wurzel hiervon iſt = 108,32 = Z.

4. Wenn man ſtatt des richtigen Winkels C einen andern, der von ihm um etwas ſehr geringes unterſchieden iſt, genommen hätte, zu finden, wie viel die Seite Z dadurch verändert wird.

Die unrichtige Seite ſey $= Z + dZ$, des unrichtigen Winkels Sinus $= p + dp$, der Coſinus $= q + dq$, eben wie Z die richtige Seite AB, p, und q der Sinus und Coſinus des richtigen Winkels C ſind. Der Sinus des kleinen Winkels, der den Unterſchied zwiſchen dem richtigen und dem unrichtigen ausmacht, ſey $= e$. So hat man
$Z + dZ = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\ (q + dq))}$
und $Z^2 + 2ZdZ + dZ^2 = a^2 + b^2 - 2abq - 2abdq$
aber $Z^2 = a^2 + b^2 - 2abq$
alſo $2ZdZ + dZ^2 = 2abdq$.
Hieraus folgt durch die Methoden der Reihen, daß

$$dZ = -\frac{ab}{Z}dq - \frac{a^2b^2}{2Z^3}dq^2 - \frac{a^3b^3}{4Z^5}dq^3 \ldots$$

Nun ſind zwar dZ, dq, dp, e, nicht unendlich kleine Größen, ob ſie wohl in Vergleichung, mit den andern ſehr klein ſind, gleichwohl wird in dem Falle, da dq ſehr klein iſt, das erſte Glied dieſer Reihe, den Werth von dZ ziemlich genau geben, oder es iſt der Wahrheit ſehr nahe $dZ = \frac{ab}{Z}dq$.

Dieſer Fehler an der Seite AB oder dZ läßt ſich auch noch auf eine Art, wie folget ausdrücken: $p + dp = \sqrt{(1 - e^2)} + eq$. Aber $\sqrt{(1 - e^2)}$ iſt beynahe $= 1 - \frac{1}{2}e^2$; daher $dp = qe - \frac{1}{2}pe^2$, beynahe $= qe$. Nun iſt $q + dq = \sqrt{(1 - p^2 - 2pdp - dp^2)}$, daher $dq = -\frac{pdp}{q}$, und alſo $dq = -pe$, daher $dZ = \frac{-ab}{Z} - pe = +\frac{abpe}{Z}$.

Wenn man die Rechnung mit den Log. anſtellt, ſo muß man bemerken, daß der Halbmeſſer hier $= 1$ geſetzt iſt, und 0 zum Logarithmen hat. Da nun die logarithmiſchen Tafeln den Logarithmus des Halbmeſſers $= 10$ ſetzen, ſo muß man für jeden Log. Sinus, den man aus den Tafeln nimmt, den Log. 10, für den Halbmeſſer der Tafeln abziehen, und folglich weil wir zwey Logarithmen von Sinus haben, nähmlich log p und log e, ſo müſſen wir die Summe um 20 vermindern, um alles auf den Halbmeſſer $= 1$ zu bringen.

Z. E. Wenn man eben die Zahlen des vorigen Exempels behält, und ſetzt, unter dem Meſſen ſey 108°29′ ſtatt 108°24′ genommen worden, daß man alſo 5′ zu viel genommen habe, ſo bekommt man

e = ſin 5′; und l. ab	= 3,6384893
l. ſin 108°24′	= 9,9772095
l. ſin 5′	= 7,1626960
Summe	= 20,7783948

abge-

abgezogen	=	20,0000000
l. abpe	=	0,7783948
lZ	=	2,0347087
ldZ	=	— 1,2563139
l. 100000	=	+ 5.
		+ 3,7436861

der letzte Log. für dZ giebt den Fehler in hunderttauſend Theilchen der angenommenen Einheit, und folglich $dZ = 0,05542$.

Wenn wir das ganze $Z + dZ$ durch ſeinen Werth $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab (q + dq)}$ brauchen, und Coſ 108°29′ ſtatt $q + dq$ brauchen, ſo finden wir $Z + dZ = 108°38'$ welches $dZ = 0,060$ giebt.

Wenn man einen kleinern Winkel als den richtigen nimmt z. E. wenn man 108°19′ ſtatt 108°24′ genommen hatte, ſo werden e und dZ verneinte Größſen, weil Z alsdann vermindert wird.

5. Formel des Hrn. Marinoni de Re ichnographica Lib. I. Cap. V num. 5. Schol. Man ziehe $CQ = f$ ſenkrecht auf die Grundlinie AB, ſo iſt $x = \frac{f}{a}$, und $Z = \frac{pba}{f}$. Nennt man die Länge von dem halben Umkreiſe $= L$, wenn der Halmeſſer $= 1$ iſt, und wird e, als der Sinus eines kleinen Bogens für den Bogen ſelbſt genommen, der eine Zahl von m Minuten enthält, dergleichen in dem halben Umkreiſe 60. 180 oder 10800 enthalten ſind; ſo bekömmt man $e = \frac{mL}{10800}$. Und wenn dieſer Werth ſtatt e, imgleichen $\frac{pba}{f}$ ſtatt Z geſetzt wird, ſo erhält man den Fehler $dZ = \frac{m. L. f}{10800}$; weil nun $L = 3,14159\ldots$ ſo wird $dZ = \frac{0,0314159\ldots}{108}. mf$ wo m eine Anzahl von wenig Einheiten iſt.

Wenn zwey Linien BA, AC. Fig. 1089 ihrer Lage nach (*poſitione*) gegeben ſind, den Punkt C in der einen zu finden, welcher zum Scheitelpunkt eines gegebenen Winkels BCE angenommen werden muß, wenn die Sehne dieſes Winkels BE, oder das Stück, das ſeine Schenkel auf der andern abſchneiden, am kleinſten ſeyn ſoll.

Wenn man den Punkt M unendlich nahe bey C nimmt, die Punkte M und B zuſammen ziehet, und den Winkel BMF = BCE macht, ſo iſt aus der Natur des Kleinſten des Winkels BMF Sehne auf der Linie AB ſo groß, als die Sehne des Winkels BCE, und alſo muß MF die Linie AB in E ſchneiden. Aber weil BCE = BME, ſo befinden ſich dieſe Winkel in einem Abſchnitte eines Kreiſes, deſſen Grundlinie BE iſt, und alſo iſt BCME ein Viereck, das in einem Kreiſe beſchrieben iſt; daher CBE + CME = 2R, (wo R einen rechten Winkel bedeutet) oder CBA + CMB + BCE = 2R, das iſt CBA + BCE = BCA + CBM, oder 2R — A — BCA + BCE = BCA + BCM. Das iſt 2R — A + BCE — CBM = 2BCA. Und wenn man den unendlich kleinen Winkel CBM wegläßt, ſo kömmt BCA = R — ½ A — ½ BCE. Wenn man aber auch BCE als ſehr klein anſiehet, und es ebenfalls wegläßt, ſo iſt BCA = R — ½ A; daher CBA = BCA, und CA = BA.

Wenn man nun die Länge AB ſucht, an deren eines Ende A man kommen kann, an das andere B aber nicht, ſo muß man zu dieſem Ende die Standlinie und die Winkel A und C meſſen. Ein Fehler alſo den man bey Meſſung des Winkels A begehet, hat die geringſte Folge, bey Beſtimmung der geſuchten Weite AB, wenn man AC = AB annimmt, und dieſes wird erhalten, wenn man in der Linie AC ſo weit fortgehet, daß der Winkel ACB = R — ½ A wird. Die Beſchaffenheit des Platzes welcher uns beym Feldmeſſen gegeben iſt, und andere Umſtände, werden dieſes nicht allemahl zulaſſen, doch aber wird der Nutzen von ſolcher Unterſuchung dieſer ſeyn, daß man ſiehet, man müſſe dem Punkte C ſo nahe zu kommen ſuchen, als möglich iſt.

II. Eine Diſtanz zu beſtimmen, wenn man nur zu dem einen Punkte aus dem Standpunkte kommen kann. Fig. 1027.

Man ſtelle das Inſtrument horizontal und perpendikular über C, richte das unbewegliche Lineal nach A, ſchraube das Aſtrolabium feſt, viſire mit der beweglichen Regel nach B: ſo findet man den Winkel C. Dann meſſe man die Linie AC, ſetze das Inſtrument in A, ſchraube es feſt, nachdem man das unbewegliche Lineal ſo lange gedrehet, bis es C geſchnitten, viſire mit dem beweglichen nach B: ſo findet man den Winkel A.

Fig. 1027. Dieſe Aufgabe trigonometriſch aufzulöſen ſchließe man ſo

$$\text{ſinus } B : \text{ſin } C = AC : AB$$

$$\frac{\text{ſinus } C\ AC}{\text{ſin } B} = AB$$

Will man noch BC, ſo ſage man

$$\text{ſin } B : \text{ſin } A = AC : BC$$

$$\frac{\text{ſin } A.\ AC}{\text{ſin } B} = BC.$$

III. Eine Diſtanz zu beſtimmen, wenn man zu keinem Punkte aus dem Standpunkte kommen kann. Fig. 1028.

Man nehme eine willkürliche Standlinie CD, mache nach dem verjüngten Maaßſtabe cd gleich groß; ſetze das Inſtrument in D, dann in C, meſſe die Winkel BDA, ADC, ACB, BCD.

An cd ſetze man d, c, die beobachteten Winkel, ſo geben ſich dadurch die Punkte a, b, deren Weite a, b auf dem Papier gleich der Weite AB auf dem Felde.

Beweis. $\triangle ACD \sim \triangle acd$
$\triangle BCD \sim \triangle bcd$

$CD : CA = cd : ca$
$CB : CD = cb : cd$

$CB : CA = cb : ca$

Nun iſt auch $ACD = acd$
$BCD = bcd$
folglich $ACB = acb$
und $\triangle ACB \sim acb$
daher $CA : AB = ca : ab$
$CB : AB = cb : ab.$

Dieſe Aufgabe trigonometriſch aufzulöſen.

1. Im

1. Im Dreyeck ACD ſuche man aus den beyden Winkeln ACD, ADC und der Seite CD die Seite DA.

2. Eben ſo DB im △ BDC, aus BDC, BCD und DC.

3. Im Dreyeck DAB, die übrigen Winkel aus DA, DB und ADB.

4. Eben in demſelben aus den gefundenen Seiten und Winkeln, die Seite AB.

Die algebraiſche Formel für dieſes Verfahren, iſt folgender Geſtalt beſchaffen: (wo ſ vor einen Winkel, deſſelben Sinus für den Halbmeſſer = 1 bedeutet). Wenn CD = c ſo iſt

$$\frac{ſ\,ACD}{ſ\,CAD}\,c = AD \qquad \frac{ſ\,BCD}{ſ\,CBD}\,c = BD$$

$$\text{Daher } AB = C\sqrt{\left(\frac{ſ\,ACD^2}{ſ\,CAD^2} + \frac{ſ\,BCD^2}{ſ\,CBD^2} - 2\,\frac{ſ\,ACD.\,ſ\,BCD}{ſ\,CAD.\,ſ\,CBD}.\ Coſ\ ADB\right)}.$$

Exempel. Wenn ACD = 96°, BCD = 79°, ADC = 69°, BDC = 89, C = 70; ſo iſt CAD = 15°, CBD = 12° und ADB = 20. Aber l ſ ACD − l ſ CAD

$$\text{oder } l.\ \frac{ſ\,ACD}{ſ\,CAD} = 0,5846181$$

mit 2 multiplicirt

$$\text{oder } l.\ \frac{ſ\,ACD^2}{ſ\,CAD^2} = 1,1692362$$

die dazu gehörige Zahl = 14,76

$$\text{Eben ſo findet man: } \frac{ſ\,BCD^2}{ſ\,CBD^2} = 22,29.$$

Zuſammen = 37,05

$$l.\ \frac{ſ\,ACD}{l\,CAD} = 0,5846181$$

$$l.\ \frac{ſ\,BCD}{ſ\,CBD} = 0,6740677$$

Zuſammen = 1,2586858
l. Tab. Coſ ADB = 9,9729858
= 11,2316716
abzuziehen log. rad 10,
1,2316716
zugehörige Zahl = 17,05
mit 2 multiplicirt = 34,10
abgezogen von = 37,05
bleibt 2,95

$\sqrt{2,95} = 1,717$
c = 70 alſo
AB = 120,190.

 Der

Der Logarithme des Halbmeſſers in den Tafeln, oder 10, wird abgezogen, damit man die Logarithmen, die aus den Tafeln genommen werden, als Logarithmen der Sinus, für den Halbmeſſer 1 gebrauchen kann; aber in den Quotienten, wo ſich einerley Anzahl von Sinus im Dividendus und im Diviſor, als in 1. $\frac{\text{ſ}\,ACD}{\text{ſ}\,CAD}$ befindet, iſt dieſer Abzug nicht nöthig, weil $\frac{\text{ſ}\,ACD}{\text{ſ}\,CAD}$ einerley bleibt, der Halbmeſſer mag 1 oder 10000000 ſeyn.

Käſtner in ſeiner Abh. von Fehlern beym Feldmeſſen; in den Schwed. Abh. 15 B. S. 139.

Auflöſung von Herrn *Lexel* (de reſolutione Polygonorum; rectilineorum. Diſſ. II. im 20 Bande der neuen Petersburger Commentarien.)

Im Vierecke ABCD Fig. 1167 iſt gegeben

die Seite $AD = d$
der Winkel $BAD = A$
$CAD = \alpha$
$CDA = D$
$BDA = \delta$

man ſoll finden

die Seite $BC = b$
den Winkel $ABC = B$
$BCD = C$.

Auflöſung und Beweis

I. Aus dem Dreyecke BDC hat man $BC^2 = BD^2 + CD^2. - 2BC.CD.\ \text{Coſ}\,BDC$ (♀). Es iſt aber

$BD : AD = \text{ſin}\,A : \text{ſin}\,(A + \delta)$

alſo $BD = \frac{d.\ \text{ſin}\,A}{\text{ſin}\,(A+\delta)}$

$CD : AD = \text{ſin}\,\alpha : \text{ſin}\,(\alpha + D)$

mithin $CD = \frac{d.\ \text{ſin}\,\alpha}{\text{ſin}\,(\alpha + D)}$

auch iſt $\text{Coſ}\,BDC = \text{Coſ}\,D.\ \text{Coſ}\,\delta + \text{ſin}\,D.\ \text{ſin}\,\delta$.

Setzt man nun dieſe für BD, CD, und BDC gefundene Werthe in die Gleichung (♀): ſo erhält man $bb = dd\,[\frac{\text{ſin}\,A^2}{\text{ſin}(A+\delta)^2} + \frac{\text{ſin}\,\alpha^2}{\text{ſin}\,(\alpha+D)^2}$
$- \frac{2\,\text{ſin}\,A\,\text{ſin}\,\alpha}{\text{ſin}\,(A+\delta)\,\text{ſin}\,(\alpha+D)}\,(\text{coſ}\,D.\ \text{coſ}\,\delta + \text{ſin}\,D\,\text{ſin}\,\delta)]$.

II. Eine bequemere Auflöſung findet ſich, indem man ſo verfährt, als wenn aus den drey Seiten AB, CD, AD und den Winkeln BAD, CAD, die Seite BC geſucht werden ſollte.

Heiſſen nun $AB = a$, $CD = c$ ſo hat man $b^2 = a^2 + c^2 + d^2 - 2\,ad.\ \text{Coſ}\,A + 2ac.\ \text{Coſ}\,(A + D) - 2cd.\ \text{Coſ}\,D$
$= (a.\ \text{ſin}\,A - c.\ \text{ſin}\,D)^2 + (d - a.\ \text{Coſ}\,A - c.\ \text{Coſ}\,D)^2$:

Daher wenn $\frac{a.\ \text{ſin}\,A - c.\ \text{ſin}\,D}{d - a.\ \text{Coſ}\,A - c.\ \text{Coſ}\,D} = \text{tang}\,F$ geſetzt wird,

$b = \frac{a.\ \text{ſin}\,A - c.\ \text{ſin}\,D}{\text{ſin}\,F}$

=

$$= \frac{d - a.\,\text{Coſ}\,A - c.\,\text{Coſ}\,D}{\text{Coſ}\,F.}$$

Nun iſt $a = \dfrac{d.\,\text{ſin}\,\delta}{\text{ſin}(A+\delta)}$

$c = \dfrac{d.\,\text{ſin}\,\alpha}{\text{ſin}\,(\alpha+D)}$

alſo Tang F

$$= \frac{\text{ſin}\,A\,\text{ſin}\,\delta\,(\alpha + D) - \text{ſin}\,\alpha\,\text{ſin}\,D\,\text{ſin}\,(A + \delta)}{\text{ſin}\,(A+\delta)\,(\text{ſin}\,(\alpha + D) - \text{Coſ}\,A\,\text{ſin}\,\delta\,\text{ſin}\,(\alpha+D) - \text{Coſ}\,D\,\text{ſin}\,\alpha\,\text{ſin}\,(A+\delta)}$$

der Nenner hievon läßt ſich, da

$\text{ſin}\,(A + \delta)\,\text{ſin}\,(\alpha + D) = \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,(\alpha + D)\,(\text{ſin}\,A\,\text{Coſ}\,\delta + \text{Coſ}\,A\,\text{ſin}\,\delta)$
$+ \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,(A + \delta)\,(\text{ſin}\,D.\,\text{Coſ}\,\alpha + \text{Coſ}\,D\,\text{ſin}\,\alpha)$

ſo ausdrücken: $\frac{1}{2}\,\text{ſin}\,(\alpha + D)\,(\text{ſin}\,A\,\text{Coſ}\,\delta - \text{Coſ}\,A\,\text{ſin}\,\delta) + \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,(A + \delta)$
$(\text{ſin}\,D.\,\text{Coſ}\,\alpha - \text{Coſ}\,D\,\text{ſin}\,\alpha)$

$= \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,(\alpha + D)\,\text{ſin}\,(A - \delta) + \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,(A + \delta)\,\text{ſin}\,(D - \alpha).$

Folglich ergiebt ſich Tang F

$$= \frac{2\,\text{ſin}\,A\,\text{ſin}\,\delta\,\text{ſin}\,(\alpha + D) - \text{ſin}\,\alpha\,\text{ſin}\,D\,\text{ſin}\,(A + \delta)}{\text{ſin}\,(\alpha + D)\,\text{ſin}\,(A - \delta) + \text{ſin}\,(A + \delta)\,\text{ſin}\,(D - \alpha)}$$

und $b = \frac{1}{2}\,d\,[\text{ſin}\,(\alpha + D)\,\text{ſin}\,(A - \delta) + \text{ſin}\,(A+\delta)\,\text{ſin}\,(D - \alpha)]\,\text{ſec.}\,F.$

III. Der Winkel $C = 180° - D + F$. Denn man verlängere BC und CD bis ſie einander in F ſchneiden; der Winkel unter welchem dieſes geſchieht iſt = F.

Aber $FCD + FDC = 180° - F$
$= C + CDF - F$:
Daher $FDC = C - F$;
und da $FDC = 180° - D$,
ſo hat man $C - F = 180° - D$,
woraus C wie angegeben.

IV. Auf ähnliche Art findet ſich $B = 180° - A - F$.

2. Der Zähler in der Formel für tang F kann auch ſo ausgedrückt werden:
$\text{ſin}\,(A - \alpha - D + \delta) + \text{Coſ}\,(A - \delta)\,\text{ſin}\,(\alpha + D)$
$- \text{Coſ}\,(D - \alpha)\,\text{ſin}\,(A + \delta)$;
daß alſo Tang F

$$= \frac{\text{ſin}\,(A - \alpha - D + \delta) + \text{Coſ}\,(A + \delta) \times \text{ſin}\,(\alpha + D) - \text{Coſ}\,(D - \alpha)\,\text{ſin}\,(A+\delta)}{\text{ſin}\,(\alpha + D)\,\text{ſin}\,(A - \delta) + \text{ſin}\,(A + \delta)\,\text{ſin}\,(D - \alpha).}$$

· Die Standlinie mag auch die, ſo zu meſſen iſt, durchſchneiden.

Z. E. Fig. 1030 man ſoll KH meſſen, ſo kann man BI zur Standlinie nehmen. Wenn man nähmlich die Winkel HBI und IBK wie auch HIB und BIK ſamt der Linie BI gemeſſen, ſo kann man entweder eine Zeichnung davon machen, oder auch trigonometriſch folgender Geſtalt rechnen.

Es ſey BI = 100°, HBI = 47°30′, IBK = 79°, HIB = 52°, BIK = 44°. Demnach BHI = 80°30′ und BKI = 57°.

9,8676309

mit

ſin BHI : BI = HBI : HI

80°30′ : 100° = 47°30′ : x

9,8676309

2,0000000

11,8676309

9,9940027

1,8736282 = 74°7′5″ = HI.

Sin BKI : BI = ſin IBK : IK

ſin 57° : 100 = ſin 79° : x

9,9919466

2,0000000

11,9919466

9,9235914

2,0683552 = 117°0′5″ = IK.

Weil nun HIB + BIK = HIK = 96° iſt, ſo iſt die halbe Summe der geſuchten Winkel $\frac{180 - 96}{2}$: 42°; (HI + IK) : (IK — HI) = tang ½ Sum. : tang ½ diff. 1910″ : 423″ = 42° : x.

9,9544374

2,6263404

12,5807778

3,2828486

9,2979298

alſo ½ diff. = 11°. 12′

½ Summe = 42°

folglich KHI = der größere Winkel

= 53°12′

ſin KHI : KI = ſin HIK : HK

ſin 53°12′ : 117°½ = ſin 96° (oder 84) : x

9,9976143

2,0683552

12,0659695

9,9034868

2,1624827 = HK = 145°4′

V. Die Diſtanzen unterſchiedener Oerter, als C, D, E, F, G, H, zu denen man entweder kommen oder nicht kommen kann, zu finden. Fig. 1029.

Aufloͤſung. Man verfuͤgt ſich zwiſchen die Oerter, derer Diſtanzen gefunden werden ſollen, erwaͤhlt ſich dergeſtalt 2 Standpunkte A und B, daß keiner von den zu beſtimmenden Gegenſtaͤnden mit AB in gerader Linie liege. In B ſtecke man eine Fahne, in A das Inſtrument. Die unbewegliche Diopter richte man nach B, ſchraube das Inſtrument feſt, viſire darauf mit der beweglichen nach jedem der oberwaͤhnten Gegenſtaͤnde. Nachher meſſe man die Standlinie AB, ſtelle das Inſtrument in B, richte das unbewegliche Linial nach A, ſchraube das Inſtrnment wieder feſt, viſire mit der beweglichen Diopter noch einmal nach jedem der oben genannten Gegenſtaͤnde, und bemerke die Winkel.

Vermöge des verjüngten Maaßſtabes und Transporteurs iſt man dann im Stande, die verlangten Diſtanzen der Gegenſtände durch Dreyecke, denen auf dem Felde ähnlich, zu beſtimmen und aufzutragen.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt des Augenmaaßes.

Wenn wir die Erfahrung zu Rathe ziehen, ſo ergeben ſich leicht einige Mittel, durch deren Hülfe wir einen Begriff von dem ohngefähren Abſtande eines Objekts, von unſerm Auge erlangen. Jedermann weiß daß entfernte Gegenſtände bey weitem nicht ſo kenntlich und deutlich erſcheinen als nahe; ſie kommen unſerm Auge nicht nur immer kleiner vor, je weiter wir uns entfernen, ſondern ſie erhalten auch eine weit bläſſere und minder lebhafte Farbe.

2. Ob aber gleich Helligkeit, Farbe und Deutlichkeit entfernter Gegenſtände auf den Schluß, den wir daher auf ihren Abſtand von unſeren Auge machen, großen Einfluß haben, und in vielen Fällen ein vortreffliches Hülfsmittel abgeben, wenigſtens zu ſagen, welches Objekt am weiteſten wegliege, um wie viel ohngefähr deſſen Abſtand vom Auge größer ſey als eines minder entfernten Gegenſtandes u. ſ. w. ſo giebt es doch Umſtände, die unſer Urtheil ungemein trüglich machen, dergleichen ſind nun z. E. erſtlich.

3. Wenn wir nach den Objekten, deren Entfernungen vom Auge wir ohngefähr ſchätzen wollen, keine freye Ausſicht haben.

Wem lehret nicht die Erfahrung, daß z. E. die Spitze eines entfernten Thurms, die über ein näheres Gebäude hervorragt, viel näher und größer zu ſeyn ſcheinet, als ſie uns vorkommen würde, wenn ſich zwiſchen ihr und dem Auge das Gebäude nicht befände, und man nach ihr hin auf dem Horizonte eine freye Ausſicht hätte.

Wie nahe und groß ſcheint uns nicht die Scheibe des aufgehenden vollen Mondes? Die Urſache dieſer Täuſchung unſers Auges liegt offenbar einen Theil mit darinnen, weil zwiſchen dem Auge und dem entlegenen Objekte ſich noch andere Gegenſtände befinden, die in unſer Urtheil Einfluß haben.

4. Zweytens kömmt es bey Schätzung des Abſtandes entlegener Objekte von einander ſehr auf die Lage des Auges an.

Am unſicherſten iſt der Gebrauch des Augenmaßes, wenn das Auge gegen die Linie, derer Länge es ſchätzen will, eine ſehr ſchiefe Lage hat. Es ſeyn Fig. 1031 a, c, d, e, f, nach Gefallen Gegenſtände auf dem Horizonte, und b das Auge.

Man ziehe von a, c, d, e, f, nach b gerade Linien, ſo ſiehet das Auge b die Weite ac unter dem Winkel abc; die Weite cd unter dem Winkel cbd u. ſ. w. Dieſe Winkel abc, cbd u. ſ. w. heißen die ſcheinbaren Weiten der Objekte a, c, e, d. Es lehret nähmlich die Erfahrung, daß uns Weiten gleich groß zu ſeyn ſcheinen, wenn ſie an unſern Auge einerley Winkel machen, und daß überhaupt uns eine Sache deſto größer erſcheinet, unter einem je größeren Winkel ſie uns in das Auge fällt.

Wären alſo z. E. die Winkel abc, cbd, dbe, ebf alle gleich groß, ſo würden dem Auge b auch die Weiten ac, cd, de, ef insgeſamt von gleicher Größe zu ſeyn ſcheinen.

Man würde ſich aber ſehr irren, wenn man die wahren Weiten ac, cd, de, ef in der That einander gleich ſetzen wollte, weil ſie gleich groß zu ſeyn ſcheinen. Denn die Tangente des doppelten Winkels iſt jederzeit mehr als doppelt ſo groß als die Tangente des einfachen.

Wären alſo z. E. a, c ein paar Objekte auf dem Horizonte, deren Weite ac man wüßte, ef ein paar andere Gegenſtände, mit a, c, in einer geraden Linie, und mit der bekannten Weite AC, wollte man die Entfernung ef nach dem Augenmaße vergleichen: ſo würde man einen großen Fehler begehen, wenn man in Gedanken die Weite ac auf ef ſo oft hintragen wollte als es angienge, und daher in der That ef ſo vielmal größer als ac ſchätzen wollte, ſo vielmal ſie größer ſchiene. Dieſer Fehler würde deſto beträchtlicher ſeyn, je ſchiefer die Linie ef gegen dem Auge liegt, d. i. je ſpitziger die Winkel bea, bfe, und je ungleicher der Objekte, e, f Entfernungen vom Auge eb, fb ſind, auch je mehr die Weiten eb, fb, von denen ba, bc unterſchieden ſind.

5. Wenn Fig. 1032 der Objekte e, f, Entfernungen vom Auge fb, eb, einander gleich ſind folglich efb ein gleichſchenklichtes Dreyeck abgiebt, und wenn eben ſo auch der Objekte a, c, Weiten vom Auge ba bc gleiche Größen haben, und man die ſcheinbare Weite oder den Winkel ebf $= \alpha$, die abc $= \beta$, und die Entfernungen eb $= A$, ba $= B$ ſetzet: ſo wird in dem Dreyecke ebf die wahre Weite ef $= 2A. \sin \frac{1}{2} \alpha$. In dem Dreyecke abc aber, ac $= 2B. \sin \frac{1}{2} \beta$. Mithin ac : ef $= B. \sin \frac{1}{2} \beta : A \sin \frac{1}{2} \alpha$ d. h. die wahren Weiten ac, ef verhalten ſich gegen einander, wie die Produkte aus den Entfernungen be, ba, der Objekte vom Auge, in die Sinus der halben ſcheinbaren Weiten oder Winkel ebf. abc.

6. Wenn man ſich alſo bey b auf dem Felde befände, und wollte aus dem Verhältniſſe der ſcheinbaren Weiten abc : ebf das Verhältniß der wahren ac : ef finden, ſo kann dieſes nicht geſchehen, wenn man nicht zu gleicher Zeit auch weiß, wie der Objekte a, c, e, f, Entfernungen vom Auge ba, be ſich verhalten.

7. Wenn von dem Auge alle 4 Objekte a, c, e, f ohngefähr gleichweit weg zu ſeyn ſcheinen, und man alſo in obiger Formel (5) $A = B$ ſetzet, ſo wird

ac : ef $= \sin \frac{1}{2} \alpha : \sin \frac{1}{2} \beta$.

8. Endlich wenn die ſcheinbaren Weiten oder die Winkel abc, ebf nicht gar zu groß ſind z. E. nur einige Grade betragen, ſo kann man ohne merklichen Fehler $\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \alpha$; $\sin \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} \beta$ ſetzen; dann wird

ac : ef $= \frac{1}{2} \alpha : \frac{1}{2} \beta = \alpha : \beta$.

9. Man ſiehet alſo aus dem bisherigen, unter welchen Umſtänden man auf dem Felde aus dem Verhältniſſe der ſcheinbaren Weiten verſchiedener Gegenſtände von einander ſogleich das Verhältniß der wahren finden kann. Nähmlich wenn die Gegenſtände gleich weit vom Auge wegliegen, und die ſcheinbaren Weiten nicht ſehr groß ſind.

10. Wären alſo ε, φ; a, c; gleichweit vom Auge, ſo unterſuche man nach dem Augenmaße, wie oft etwann die Weite ac in der $\varepsilon\varphi$ enthalten zu ſeyn ſcheinet; geſetzt dem Auge ſchiene $\varepsilon\varphi$ etwa $=$ 4. ac zu ſeyn, ſo wird in der That auch die wahre Weite $\varepsilon\varphi$ $=$ 4ac ſeyn, vorausgeſetzt daß die Winkel abc, $\varepsilon b \varphi$ nicht gar zu groß ſind.

11. Das weſentliche, was hierbey das Auge zu thun hat, iſt, das ſcheinbare Verhältniß ac : $\varepsilon\varphi$ erträglich genau zu ſchätzen; dieſes kann nicht anders als durch anhaltende Uebung geſchehen. Es wird deswegen vortheilhaft ſeyn, wenn man vorher auf dem Papiere ſich in dieſem Geſchäfte einige Fertigkeit erwirbt, und nur erſtlich kleine Weiten ſchätzen lernt.

12. Man würde, wenn Fig. 1032 auf dem Papiere die Linie ac vorgegeben wäre, ein Stück von ihr z. B. ab etwa auf folgende Art nach dem Augenmaße beſtimmen.

Erſtlich würde ich in Gedanken die Linie ac halbiren. Fände ich nun daß b näher bey a als beym Mittelpunkt läge, ſo würde ich ſchließen daß ab > $\frac{1}{4}$ ac ſeyn müſſe.

Wenn ich mir nun ferner vorſtelle ab würde auf ac ſo oft getragen, als es angienge, ſo würde ich finden, daß ab mehr als viermal, aber nicht völlig 5mal auf ac paſſet, folglich den Schluß machen, daß ab $\frac{1}{5}$ ac ſeyn müſſe.

Auf dieſe Art könnte man noch mehr Vergleichungen anſtellen, und ſich der Grenze des Verhältniſſes ab: ac ſtufenweiſe immer mehr nähern; wolte man mit den Grenzen; ab > $\frac{1}{5}$ ac; ab < $\frac{1}{4}$ ac hier ſich begnügen, ſo könnte man für ab etwa das Mittel zwiſchen $\frac{1}{4}$ ac und $\frac{1}{5}$ ac annehmen, mithin ſetzen ab $= \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\,ac + \frac{1}{5}\,ac) = \frac{9}{40}\,ac$.

13. Die Natur der Sache, und anhaltende Uebung werden hierbey viele Vortheile an die Hand geben, ſo daß man in Stand geſetzt wird, in kurzer Zeit dergleichen Verhältniſſe auf dem Papiere ſehr geſchwind und gleichſam beym erſten Anblicke zu ſchätzen. Auch kann man jederzeit auf dem Papiere die geſchätzten Verhältniſſe mit dem Cirkel nachmeſſen, und dadurch finden, wie viel ſich das Augenmaß betrogen habe.

14. Hat man ſolchergeſtalt ſich erſt auf dem Papiere ein fertiges Augenmaß erworben, ſo kann man alsdann auf dem Felde deſto ſicherer die ſcheinbaren Entfernungen mit einander vergleichen.

15. Je größer auf dem Felde die ſcheinbaren Weiten ſind, deſto unſicherer iſt die Schätzung.

Es wird nähmlich beym Augenmaße zum vorausgeſetzt, daß das Auge, die Weite, die es ſchätzen und mit einer andern vergleichen will, ganz überſehen kann. Wären daher die Objekte Fig. 1032 ziemlich weit von einander entfernt, ſo hat das Auge Mühe, die äußerſten Punkte e, f, zu gleicher Zeit deutlich zu unterſcheiden, und ſich folglich die ganze Weite ef, gehörig vorzuſtellen. Siehet das Auge gerade nach f hin, ſo hat es eine undeutliche Empfindung von dem Punkte e; und wenn es e genau betrachtet, ſo erſcheinet ihm f undeutlich. Weil alſo auf dieſe Art die ganze Weite ef undeutlich empfunden wird, ſo wird auch die Vergleichnng einer andern Weite ac, mit ihr ſehr unſicher ausfallen.

Eben dieſes iſt die Urſache, warum man ein paar kleine Linien weit geſchwinder und ſicherer ſchätzen kann, als ein paar größere.

16. Ferner iſt die Schätzung deſto ſicherer, durch je kleinere Zahlen ein Verhältniß ausgedrückt werden kann. Z. E. unſer Auge kann weit geſchwinder und zuverläſſiger, die Verhältniſſe 1: 2; 1: 3; 2: 3; u. ſ. w. empfinden, als z. E. folgende 1: 16; 2: 27: u. ſ. w. dieſes giebt einige Anleitung, die Zuverläſſigkeit eines geſchätzten Verhältniſſes zu beurtheilen.

17. In den meiſten Fällen pfleget man die Weite eines Gegenſtandes von unſerm Auge bloß nach dem Eindrucke zu beurtheilen, die des entfernten Objekts, mehr oder minder lebhafte Farbe, deſſen Deutlichkeit und Klarheit u. ſ. w. auf unſer Auge macht: und nach Verhältniß dieſes Eindrucks wird der Abſtand verſchiedener Gegenſtände von unſerm Auge mit einander verglichen. Man kann in dieſem Geſchäfte offenbar durch anhaltende Uebung eine Fertigkeit erlangen. Man nehme anfangs nur kleine Weiten vor, ſchätze ſie nach

der Empfindung in unſerm Auge; man vergleiche die geſchätzte Weite mit der wahren, die man etwa durch Schritte finden, oder auf eine andere Art beſtimmen kann, ſo findet man, wie viel ſich das Augenmaß betrogen. Hierauf übe man das Auge immer in größeren Entfernungen, ſo wird man endlich eine ziemliche Fertigkeit erlangen, kleine Weiten ſogleich beym erſten Anblicke ohne großen Irrthum, größere aber wenigſtens erträglich zu ſchätzen.

Vergleiche: Joh. Tobias Mayers praktiſche Geometrie. 1r Th. 3. Kap. §. 53.
Lamberts Beyträge; 1r Theil.
Leipziger Magazin für Naturkunde und Mathem. 1783. 1s Stück.

Entfernungen zu meſſen mit der Bouſſole.

A. Eine Diſtanz zu beſtimmen, da man nicht von einem Ende zu dem andern kommen kann. Fig. 1025.

Man ſtelle die Bouſſole horizontal in C, richte die Diopteru nach A, und ſchreibe den Grad, den die Magnetnadel zeigt, wenn ſie ſtille ſtehet z. E. hier den 48°, auf das bey ſich habende Papier.

Darauf richtet man die Diopteru nach B, ſiehet was für einen Grad die Magnetnadel, wenn ſie ruhet, bemerkt; findet z. E. den 107ten, ſchreibt ihn auf, und mißt CA, CB.

Wenn man die Figur hierauf zu Papier bringen will, ſo ſchraubt man die Bouſſole vom Stativ ab, legt ſie an den Punkt C, wendet ſie ſo lange hin und her, bis die Nadel den 48° zeigt, ziehet dann am Rande des Käſtchens die Linie CA, drehet am Punkte C das Käſtchen herum, und ziehet, wenn die Nadel auf dem 107° ſtille ſtehet, die Linie CB von gehöriger Größe, an der nähmlichen Seite der Bouſſole, da man vorher AB zog, ſo iſt das Dreyeck auf dem Papiere dem auf dem Felde ähnlich.

B. Wenn man nur von dem einen Punkte zu dem Standpunkte kommen kann. Fig. 1027.

Man ſetze das Inſtrument in C auf, viſirt nach A, bemerkt den Winkel, dreht die Bouſſole nach B, beobachtet den Winkel, mißt AC; ſetzt das Inſtrument in A auf, viſirt nach B, und merkt den Winkel. Dann trägt man die Winkel wie vorhin ſammt AC auf das Papier, und das Dreyeck auf dem Papiere iſt dem gemeſſenen ähnlich.

Diſtanz.	Winkel		Länge	
	0	1	0	1
CA	80	6	21	2
CB	159	—	23	4
BA	140 —	3	19	—

Beygefügte Tabelle giebt ein Muſter, wie man die Maße der Winkel und Linien, ohne ſie zu verwechſeln gut anfſchreiben kann.

C. Wenn man zu keinem Punkte aus den Standpunkten kommen kann. Fig. 1028.

Man nehme CD zur Standlinie an, ſetze das Inſtrument in C auf; viſire nach A, D und B und merke die Winkel. Setze in D auf, viſire nach B, A und C um die Winkel zu bekommen.

Dann ſchraube man die Bouſſole ab, ziehe auf dem Papiere eine gerade Linie CD der CD auf dem Felde nach dem verjüngten Maßſtabe gleich, und ſetze an die beyden Enden C und D die Winkel, wie man ſie auf dem Felde mit der Bouſſole fand: ſo erhält man die unbekannte Weite AB.

Ent-

Entfernungen zu meſſen mittelſt der *Camera obſcura* ſ. Licht (Brechung).

Entfernungen zu meſſen mit dem Dendrometer des Hrn. Pickels, ſiehe Dendrometer 10te Aufgabe.

Entfernungen zu meſſen, vermittelſt eines Gegenſtandes ſcheinbarer und wahrer Größe.

Dieſes beruhet auf nachfolgender Aufgabe:

Aus eines gleichſchenklichten Dreyecks Grundlinie: c; und Winkel an der Spitze u; die beyden Schenkel a zu finden.

1. Nach der Formel (ſiehe Dreyeck gleichſchenklichtes, dort $a = \frac{\frac{1}{2} b}{\sin \frac{1}{2} C}$) iſt

hier $a = \frac{c}{2. \sin \frac{1}{2} u}$.

2. Wenn ſich u und a zuſammen ändern, ſo iſt $da = - \frac{1}{2} c. \frac{d \sin \frac{1}{2} u}{\sin \frac{1}{2} u^2}$

$$= - \frac{\frac{1}{2} c. \cos \frac{1}{2} u. \frac{1}{2} du}{\sin \frac{1}{2} u^2}$$

oder $da = - \frac{cdu}{4 \tan g \frac{1}{2} u. \sin \frac{1}{2} u}$.

3. Hier zeiget (2), wie beträchtlich ein geringer Fehler des Winkels in Beſtimmung der Seite ſeyn würde.

4. In dem Falle iſt allemahl u klein. Es ſey ne wo e eine Secunde bedeutet, und du = m. e, wo m gegen n klein ſeyn muß.

5. So iſt $da = - \frac{c m e}{4. \frac{1}{4} n^2 e^2} = - \frac{m c}{n^2. e}$.

Alſo $\log da = \log \frac{m}{n^2} + \log c - \log e$.

Wobey aber bemerkt wird, daß dieſe Größe verneint iſt.

6. Nähmlich wenn u um me wächſt, ſo nimmt a um ſo viel ab.

Aber um ſo viel zu, wenn u um me kleiner wird.

7. Es ſey n = 3600. m ſo iſt

$$\log \frac{m}{n^2} = - 7,1126050$$
$$\log e = + 5,3144251$$
$$\log \frac{m}{n^2. e} = 0,2018201 - 2$$

gehöret zu 0,01591.

Alſo wäre da = — 0,01591 c.

8. Exempel. Ein Thurm 100 Fuß hoch erſchien 1° groß, man ſucht ſeine Entfernung.

$$\log 50 = 1,6989700$$
$$- \log \sin 30' = - 7,9408419 + 10$$
$$\log a = 3,7581280$$
$$= a = 5729, 6 \text{ Fuß}.$$

Wenn man nun den Winkel 1° genommen hatte, da er wirklich nur 59′59″ wäre, alſo ihn eine Sekunde zu groß genommen hätte: ſo wäre der richtige

Winkel u — 1″ alſo m = — 1 und da = + 0,01591. c = + 1,591 Fuß oder die eigentliche Weite wäre 5731,2 Fuß.

Wäre aber der eigentliche Winkel 1°0′1″ alſo m = + 1, ſo wäre die eigentliche Entfernung a — 1,591 Fuß = 5728 Fuß.

Iſt man alſo bey dem Winkel um 2″ ungewiß, ſo iſt man bey der Entfernung um etwas über 3′ ungewiß.

Zur Probe nehme man u = 3601″ an, und weil ſich hier der kleine Bogen, ſtatt ſeines Sinus ſetzen läßt, ſo iſt ſin 30′0″, 5 = 1800″, 5 alſo

$$\log e = 4,6855749 - 10$$
$$\log 1800,5 = 3,2553931$$
$$0,9409680 - 2$$
$$\text{von } \log 50 = 1,6989700$$
$$\log a = 3,7580019$$
$$a = 5728,0 \text{ Fuß wie vorhin}$$

Käſtners aſtronomiſche Abh. 2 Samml. S. 95.

Man ſehe hierüber mit mehreren den Artickel Mikrometer nach.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt des Meßtiſches, ſiehe Meßtiſch.

Entfernungen zu meſſen mit dem Mikrometer, im Fernrohre, ſiehe Mikrometer.

Entfernungen vermittelſt entfernter Objekte zu beſtimmen.

Entfernungen zu meſſen, vermittelſt entfernter Objekte, von Lambert, ſiehe deſſen Beyträge 14. Theil.

Fig. 1043. Man nehme eine willkührliche Standlinie CD an, und bemerke bey C, auf welchen Gegenſtand I des entlegenen Horizontes die Richtung CA hintrifft. Dc ſey nun ein beliebiger Theil der Standlinie DC. Man begebe ſich nach c und laſſe bey i in die Richtung cI nach dem entlegenen Objekte, einſetzen. Auf gleiche Weiſe treffe die Richtung CB auf das Objekt K am entlegenen Horizonte, und man laſſe auch bey k einen Stab in die Richtung ck einſetzen. Hierauf gehe man mit zwey Stäben in der Richtung ci vorwärts, (welches geſchiehet, wenn man mit den Stäben c, i, immer in gerader Linie bleibt,) und ſetze bey a einen Stab ſo ein, daß ein Gehülfe bey D ihn in der geraden Linie DA ſiehet. Auf gleiche Weiſe gehe man auch mit dem andern Stabe in der Richtung ck vorwärts bis nach b, wo der Gehülfe D ihn in der geraden Linie DB ſiehet: Solchergeſtalt ſteht alſo a in dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte der beyden Linien cI, DA, und b in dem Durchſchnitte der beyden Richtungen cK, DB. Man meſſe hierauf die Weite ab, ſo wird dieſelbe ein ſolcher Theil von AB ſeyn, als cD von der Standlinie CD iſt.

Denn weil die Objekte I, K, ſehr weit entlegen ſind, ſo kann man ohne großen Fehler die Stücken ca, CA; cb, CB, als parallel anſehen, mithin die Winkel ACD = acD; CDB = cDb, BCD = bcD, folglich das Dreyeck ACD dem acD, und BCD dem bcD ähnlich ſetzen. Daher hat man

$$DA : Da = DC : Dc$$
$$BD : bD = DC : Dc$$
$$\text{alſo } DA : Da = BD : bD$$

folglich wegen des gemeinſchaftlichen Winkels ADB das △ABD ∾ abD, mithin AB : ab = BD : bD = DC : cD, folglich iſt ab ein ſolches Stück von AB, als cD von CD.

Es

Es verſteht ſich, daß dieſe Methode deſto weniger fehlerhaft iſt, je weiter die Gegenſtände I, K am Horizonte hinaus liegen.

Man ſehe vom Gebrauch der entferntern Objekte mit mehrern den Artickel: Gegenſtände, entfernte.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt des optiſchen Winkels, ſiehe Winkel optiſcher.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt des Brander'ſchen *Polymetroſcopium Dioptricum* ſiehe daſſelbe.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt des Schalles, ſiehe Schall.

Entfernungen zu meſſen vermittelſt der Stäbe.

1. Die Weite AB, Fig. 1033 die ſich nicht unmittelbar meſſen läßt, zu finden, wenn man von dem willkührlichen Standpunkte D, nur nach B aber nicht nach A hinkommen kann.

Man verlängere AB, und nehme auf ihrer Verlängerung eine Länge BC, von zureichender Größe; von D meſſe man die Weiten BD, DC, und trage ſie in geraden Linien, rückwärts; BD von D bis b und DC von D bis c, ſetze in b, c, Stäbe ein, und gehe mit einem andern Stabe, in der geraden Richtung cb, bis d fort, wo ein Stab d mit DA, in gerader Linie ſtehen würde. Die bd meſſe man demnach, ſo wird bd = AB ſeyn. Der Grund liegt in der Gleichheit der Dreyecke ABD, bDd, welche ſich gar leicht erweiſen läßt. Auch hätte man nur nöthig proportionale Stücken rückwärts zu tragen. Auch hätte man, wenn man Dd mäße, des Standpunkts D Weite von A, weil Dd = DA.

Eine andere Auflöſung dieſer Aufgabe zeigt Fig. 1034, wo vorausgeſetzt wird, daß man vermittelſt einer Meßſchnur oder Kette, im Stande iſt, einen Winkel an einen andern Punkt zu tragen.

Man meſſe erſtlich die Weite BD bis an den angenommenen Standpunkt, und trage ſie rückwärts von D nach b, ſo daß bDB eine gerade Linie ſey. Bey α ſtecke man einen Stab in die gerade Linie BA, und bey δ einen in die gerade Richtung BD, und meſſe nun in dem kleinen Dreyecke αBδ, die drey Seiten Bα, Bδ, αδ.

Dieſes kleine Dreyeck trage man nun an den Punkt b, ſo, daß der Winkel B an b komme. Man nehme alſo auf der geraden Linie bD, die Linie ba = Bδ. Faſſe auf einer Meßkette oder Schnur, eine Länge ſo groß, als die Summe der beyden Linien Bα, αδ, befeſtige die beyden Enden dieſer Schnurlänge bey a, b, und ſpanne ſie nach den Richtungen bd, ad ſo aus, daß bd = Bα und ad = αδ werde: ſo erhält man bey b einen Winkel = B. Man ſtecke nun bey C einen Stab ein, ſo daß er ſowohl mit b und d, als auch mit A und D in gerader Linie ſtehe: ſo wird die Weite bC, die man hierauf meſſen kann, = AB ſeyn, wie aus der Gleichheit der beyden Dreyecke bDC und ADB erhellet.

Es wird bey dieſem Verfahren gut ſeyn, die Längen Bα, Bδ nicht gar zu klein, ſondern z. E. einige Ruthen lang zu nehmen.

Noch beſſer und bequemer iſt es, Bα = Bδ zu nehmen, damit das Dreyeck αBδ gleichſchenklicht werde.

Aus den gemeſſenen Seiten des kleinen gleichſchenklichten Dreyecks Bαδ läßt ſich der Winkel B durch trigonometriſche Rechnung finden. Wenn man nun auf eben die Art auch bey D, nach den Richtungen BD, DA, die Längen Dε und Dε willkührlich annähme, und dann εε mäße, ſo ließ ſich aus den Gröſ-

ſen

ſen De, Dε, und eε, auch der Winkel D berechnen. Aus den beyden ſolcher Geſtalt gefundenen Winkeln B, D, und aus der gemeſſenen Seite BD, findet ſich alsdann die unbekannte Weite AB, durch trigonometriſche Rechnung. Dieſes Verfahren zeigt alſo, wie bloß durch Hülfe der Meßkette, und der damit verbundenen Rechnung, die Weite AB gefunden werden könnte, ohne daß man nöthig hat auf dem Felde ſelbſt die Seite BD rückwärts, und den Winkel B an b zu tragen.

Nimmt man die Längen Bκ, Dε, Dε durchaus von derjenigen Größe, nach welcher man eine berechnete Chordentafel beſitzt, ſo läßt ſich auch hierdurch die Größe der Winkel κδ und eε beſtimmen.

2. **Die Entfernung zweyer Oerter, ohne zu einem von ihnen kommen zu können, mit bloßen Stäben zu meſſen.**

Fig. 1036. Man erwähle eine beliebige Standlinie CD, theile ſie in E in zwey gleiche Theile, und ſtecke ſowohl hier als in C und D Stäbe ein. In F und G laſſe man wiederum Stäbe einſtecken, ſo, daß F mit CA und G mit DB in gerader Linie komme. Die Weite FE trage man in gerader Linie zurück in H, und EG auf gleiche Art in I, gehe hierauf mit CI in gerader Linie ſo weit zurück bis BE auch in gerade Linie kommt, welches in L ſeyn wird. Ein gleiches thue man auch in K, ſo, daß K ſowohl AE als auch DH deckt, wenn man nun die Weite von L bis K mißt, ſo wird dieſe Linie gleich AB ſeyn.

3. **Die Entfernung zweyer Oerter, zu welchen man aus einem angenommenen Standpunkte, nicht aber von einem zum andern in gerader Richtung kommen könne, mit bloßen Stäben zu beſtimmen.** Fig. 1037.

Man ſtecke einen Stab in C, meſſe die Linie AC und trage ſich dieſe wahre Länge aus C in gerader Richtung AC zurück bis in D, wohin man einen Stab ſetzt. Dann meſſe man die Linie CB, und trage auch dieſe wie vorhin zurück in E; nun meſſe man die Entfernung von D nach E, und ſie muß, wenn überall richtig gemeſſen worden, AB gleich ſeyn.

Wäre aber zum Zurückſtecken der ganzen Linien hinterwärts nicht Raum genug, ſo theile man die Linien CA und CB in 4 oder 3 gleiche Theile, wie hier, und trage dieß Drittel aus C in F und in G, und meſſe die Linie FG, ſo wird dieſe auch das Drittel von AB, das heißt dreymal FG gleich AB ſeyn. Gleicher Geſtalt kann man auch in h und i rückwärts verfahren, wenn etwa die Spitze des Waldes bis in C heruntergienge, und alſo obige Operation verhinderte. Z. B. man hätte beym erſten Falle $\frac{1}{4}$ genommen, und AC wäre 236′, und CB 212′ geweſen; ſo würde man C in F 59′ und aus C in G 53′ abſetzen, und alsdann die gefundene Entfernung von F bis G viermal genommen = AB ſeyn müſſen; denn in den ähnlichen Dreyecken ACB, FCG verhalten ſich die Seiten AB : FG, wie AC : CF, oder BC : CG.

Oft kann man ſich bey Ausmeſſung dieſer Aufgabe auch folgendes Hülfsmittels bedienen, Fig. 1038 wo z. E. AB wegen eines darzwiſchen liegenden Fluſſes nicht gemeſſen werden könnte, bey M ſich aber eine Brücke befände; da hier das Rückwärtstragen nicht ſtatt findet, ſo nehme man in der Verlängerung von AB ein paar willkürliche Stücken Aa, Bb; an ab ſetze man ein paar Perpendikularlinien am, bn, ſo lang daß man über die Brücke M von m nach n wegmeſſen kann. Um nun aus den gemeſſenen Stücken am, bn, mn, die Weite AB zu finden, ſo gedenke man ſich durch n mit AB oder ab eine Parallele pn, ſo iſt pn = ab, und das Dreyeck mnp rechtwinklicht, wo

pm

$pm = am - bn$ folglich $pn = \sqrt{(mn^2 - (am - bn)^2} = ab$, mithin auch $AB = ab - Aa - Bb$ gefunden werden kann.

4. **Die Entfernung zweyer Oerter, ohne von einem bis zum andern kommen zu können, zu meſſen.** Fig. 1039.

Man ſtecke in A einen Stab ein, fälle ſich eine ſenkrechte Linie, verlängere ſolche, und theile ſie, nachdem man ſie gemeſſen, in 3 gleiche Theile, von beliebiger, doch gegen AB verhältnißmäßiger Größe in C, D und E ein, welche man mit Stäben bezeichnen muß. In E errichte man wiederum auf AE rückwärts eine perpendikulär EF. bemerke ſelbige gleichfalls mit einem Stabe, und gehe dann mit EF in gerader Linie ſo weit zurück, bis man mit D und B eingerichtet, welches in dem Punkte G ſeyn wird. Wenn man nun die Linie EG miſſet, und ſolche zweyfach nimmt, ſo wird dieſe zweyfache Größe EG = AB ſeyn.

Hat man aber rückwärts nicht ſo viel Raum ſo weit zurücke gehen zu können, welches geſchehen kann, wenn B ſehr weit von A entlegen wäre; ſo theile man AE in 4, 5 oder mehrere Theile, und EG wird im erſten Falle $\frac{1}{3}$ von AB betragen u. ſ. w.

5. **Ein anderes Verfahren die Weite AB Fig. 1040 zu meſſen, zu deren keinem Endpunkte A oder B man bequem hinkommen kann.**

Man ſetze bey C einen Stab ein in gerader Linie mit A und B. An C mache man einen rechten Winkel B, C, D., und nehme CD von beliebiger Länge. Aus dem Standpunkte D trage man auf CD von D nach c eine andere willkürliche Länge z. E. einige Ruthen, und ſetze an c abermals einen rechten Winkel, damit die Richtung ce mit CA parallel werde. In dieſe Richtung ce ſetze man b und a in die geraden Linien DB, DA, ein paar Stäbe ein, ſo iſt, weil abc mit ABC parallel läuft

$$AB : ab = BD : bD = CD : cD; \text{ alſo}$$

$$AB = \frac{ab \cdot CD}{cD}.$$

Miſſet man alſo auſſer dem willkürlich angenommenen Längen CD, cD, auch noch die ab, ſo findet ſich daraus die unbekannte Entfernung AB.

C, c brauchen nicht rechte Winkel zu ſeyn, wenn ſie nur ſonſt von gleicher Größe ſind, — die Hauptſache kommt nur darauf an, daß die Richtung ce, der CA parallel werde.

6. **Noch ein anderes Verfahren** Fig. 1041.

Man nehme bey D einen willkürlichen Standpunkt an, und ſetze dann bey F einen Stab mit D und A, und bey E einen Stab mit D und B in gerader Linie:

Setze demnächſt bey G einen Stab mit B und F in gerader Linie, und alsdann in die gerade Richtung GD bey H einen Stab, auch mit E und A in gerader Linie, ſo ergiebt ſich durch dieſe Verzeichnung auf dem Felde ein Viereck HG EF; darinnen kann man meſſen EH, HD, DG, GF, FE, ED, DF.

Um nun die unbekannte Weite AB zu finden, ſo verzeichne man auf dem Papier nach dem verjüngten Maaßſtabe eine kleinere Figur ehdgfe, welche der EHDGFE auf dem Felde ähnlich iſt, dergeſtalt, daß die kleinen Dreyecke ehd, edf, fdg, in eben der Ordnung und Verhältniß auf dem Papiere, wie auf dem Felde, gegen einander liegen.

Verlängere hierauf die Seiten eh, fd, und ed, fg, bis erſtere ſich in a und letztere in b durchſchneiden, meſſe nach dem verjüngten Maßſtabe, womit

das

das kleine Viereck aufgetragen worden iſt, die Weite ab: ſo viel Ruthen, Fuß ꝛc. man für dieſelbe findet, eben ſo viel Ruthen, Fuß ꝛc. wird die Seite AB wirklich halten, wenn man ſie mit der Meßkette meſſen könnte.

Weil die kleinen Dreyecke hde, edf, fdg, denen HED, EDF, FDG ähnlich gemacht worden, ſo ſind die Winkel hed = HED; def = DEF. Alſo hed + def = HED + DEF oder der Winkel hef = HEF; nun iſt auch efd = EFD, folglich in den Dreyecken AEF, aef, die Winkel an den Grundlinien EF, ef einander gleich, nähmlich AEF = aef; EFA = efa; daher die beyden Dreyeck: AEF, aef einander ähnlich; auf gleiche Weiſe ſind auch die Dr. BEF, bef, ähnlich. Dieß giebt alſo folgende Proportionen

AE: EF = ae: ef
EF: EB = ef: eb

Alſo AE: EB = ae: eb
Aber auch AEB = aeb
Daher Dr. AEB ∾ Dr. aeb.
Mithin AE: AB = ae: ab
Aber auch EF: AE = ef: ae

folglich EF: AB = ef: ab
oder EF: ef = AB: ab.

D. h. weil nach dem verjüngten Maße, ef ſo viel Ruthen, Fuß ꝛc. hält, als EF auf dem Felde nach der Meßkette, ſo wird auch ab nach dem verjüngten Maße ſo groß ſeyn, als AB nach der Meßkette.

Uebrigens iſt es bey dieſem Verfahren vortheilhaft, die Standlinie EF auf dem Felde nicht zu kurz anzunehmen.

Auch kann man alſo verfahren. Fig. 1042.

Man wähle bey C einen willkürlichen Standpunkt, und ſetze in mäßiger Entfernung von C, bey E, D, ein paar Stäbe in die geraden Richtungen CB, CA; in den Verlängerungen von CE, CD, DE, nehme man EG = CE, HD = CD, EF = ED = DI. Setze bey G, F, H, I, Stäbe ein. Hierauf bringe man bey L einen Stab hin, ſo, daß er ſich ſowohl mit G, F, als auch mit A, E, in geraden Richtungen befindet, ſo wird GL = CA ſeyn, wie ſich leicht erweiſen läßt. Auf eben die Art ſetze man bey K einen Stab, in die gemeinſchaftlichen geraden Richtungen HIK, BDK, ſo wird auch HK = BC ſeyn. Man meſſe alſo die beyden Längen HK, GL, und trage erſtere in die Verlängerung von AC, von C nach b, die andere GL, in die Verlängerung der BC, von C nach a, ſo wird die Weite ab, die man nun meſſen kann, der AB gleich ſeyn.

7. Man begehrt zu wiſſen, wie weit es von A bis B ſey, da wegen des dazwiſchen liegenden Berges dieſe Länge nicht gemeſſen werden kann, wie der Entwurf in Fig. 1241 zeiget.

Wenn uns frey ſtehet, auf der rechten oder linken Seite des einen Punkts nach dem andern herum zu gehen, ſo erwähle man nach Gefallen einen dritten Punkt als hier C, der ſo beſchaffen, daß man von ſelbigen nach den andern beyden Punkten genau ſehen und kommen kann; in dieſen ſetze man alſo eine Stange ein. Nun meſſe man von A bis C, und alsdenn in gerader Linie fort bis F, (FC nimmt man ohngefähr ⅓ ſo lang als BC, wenn es möglich, viel kleiner darf es nicht ſeyn) und bezeichne den Punkt F mit einer Stange; ſodann meſſe man von F bis B, und von B wieder bis C, und ſchreibe

alle

alle Maße auf dem Operations-Entwurfe ſo genau als ſie gemeſſen worden. Wenn dieſe Ausmeſſung hernach richtig aufgetragen wird, ſo bekommt man einen Triangel FBC, welcher einen Theil der Linie FA zur Grundlinie hat; und alſo kann die Weite AB nach dem Maßſtabe gemeſſen werden, der zum Auftragen dieſes Triangels gebraucht worden. Dieſes deutlicher zu machen, wollen wir annehmen, daß die Längenmaße ſo aufgetragen worden, wie der Entwurf ausweiſet, nähmlich von A nach C 26 Ruthen, und von A bis F 51 Ruthen 4 Fuß, daß alſo CF für ſich allein 25 Ruthen 4 Fuß hält. Von dem hierzu gebrauchten Maßſtabe habe man 24 Ruthen abgenommen, und ſolche aus F nach B durch einen Kreuzſchnitt getragen, ferner habe man 25 Ruthen 4 Fuß nach gedachtem Maßſtabe aus C in B auf vorige Art getragen, ſolchergeſtalt haben dieſe beyden Längen einander in B durchſchnitten. Wenn wir nun die Länge von dieſem Durchſchnittspunkte bis in den Punkt A mit dem Zirkel auf dem hier ſchon gebrauchten Maßſtabe meſſen, ſo findet ſich dafür 70 Ruthen, welches die zu wiſſen begehrte Länge iſt.

8. Die Breite eines Fluſſes, über den man nicht kommen kann, vermittelſt eines Stabes zu meſſen. Fig. 1035.

Man ſtecke einen geraden Pfahl oder Stock von eines Mannes Höhe oder drunter, in welchen oben ein kurzes Stöckchen geklemmt iſt, ſenkrecht am dieſſeitigen Ufer in A dem jenſeitigen B gegenüber, ſtelle ſich gerade hinter dieſen Pfahl dergeſtalt, daß die eine Spitze des eingeklemmten Stöckchens nach B hingewandt, die andere aber zu uns gekehrt iſt, und ziele über ihn der Länge nach, nach B hin. Um nun von dem gegenſeitigen Ufer bey B über die Länge des Stöckchens hin eine gerade Geſichtslinie zu erhalten, wird man letzteres ſo lange herunter oder herauf biegen müſſen, bis mit ſeiner vorderſten Spitze der Stein, oder was man am Ufer für B angenommen, gedeckt iſt. Nun laſſe man das eingeklemmte Stöckchen unverrückt, drehe aber den Pfahl herum, doch ſo, daß er ſenkrecht bleibe, trete wiederum hinter denſelben, und ſehe über den kleinen Stock. Wenn man nun da, wo die verlängerte Geſichtslinie die Erde in C berührt, jemanden hintreten läßt, ſo wird man von C bis A die nächſt richtige Breite des Flußes AB haben.

Dieſe Auflöſung ſetzt einen geraden horizontalen Boden voraus, in welchem Falle in den △△ ADB, ADC die Seite ADC die Seite AD mit den beyden anliegenden Winkeln einander gleich ſind, und folglich auch AB = AC ſeyn muß.

Wie man vermittelſt zweyer Stäbe die horizontale Entfernung eines Thurms, deſſen Spitze man nur ſieht, finden kann, ſiehe Höhenmeſſung vermittelſt der Stäbe (4).

Entfernungen zu meſſen vermittelſt der Zollmannſchen Scheibe ſiehe Scheibe des Zollmann.

Entfernungen ohne Inſtrument durch bloße Rechnungen zu finden, eine Aufgabe nebſt der Auflöſung. Frkf. u. Leipzig. 1785. 8. 32 Seiten mit 2 Kpfrtafel und eine Tabelle, für die Winkel, derer Sehnen bey einem Halbmeſſer von 30 Schuhen in Zehntheilen eines Schuhes wachſen. (Von Iuſt. H. Gunckel.)

ADB. 85. B. 469. Leipz. g. A. 1785. II. 1003.

Der Verfaſſer Juſtus Heinrich Gunkel hat mit den Prinzen von Heſſen-Homburg die Weiten einiger Orte aus einer gemeſſenen Standlinie, nach der in Böhms praktiſchen Geometrie vorgetragenen Aufgabe, Winkel durch ge-

meſſene Sehnen von 30 Fuß in Graden und Minuten anzugeben, trigonometriſch berechnet, und läßt dieſe Berechnung mit der in Böhms praktiſchen Geometrie und vielen andern Büchern ſchon befindlichen Chorden-Tafel drucken. Wer Trigonometrie verſteht, braucht des Verf. Abhandlung nicht, und ohne ihre Kenntniß iſt ſie nicht zu gebrauchen.

Entfernungen zu meſſen aus einem einzigen Stande.

I.

1. Man hat verſchiedene Werkzeuge ausgedacht, aus einer ſehr kleinen Standlinie z. E. nur von einigen Fußen, dennoch mit erträglicher Genauigkeit Entfernungen zu meſſen, und man nennt dieſe Meſſungsart, die Meſſung aus einem Stande, weil man ſo eine kleine Standlinie, ohne ſich weit von der Stelle zu bewegen, erhalten und meſſen kann. Um nun aus ſo kleinen Standlinien, Entfernungen zu meſſen, ſo ſind die aus dieſer Abſicht erfundenen Werkzeuge vorzüglich dahin gerichtet, die ſogenannten parallaktiſchen Winkel mit großer Schärfe zu meſſen.

2. Es ſey Fig. 1075 AB eine ſehr kleine Standlinie und C ein Gegenſtand, deſſen Weite CA oder CB man finden ſoll, ſo heißt der Winkel ACB welcher der Standlinie AB gegenüber ſtehet, der parallaktiſche Winkel, oder die ſcheinbare Größe der Standlinie am Punkte C.

3. Nun erhellet, daß wenn AB ſehr klein, AC und BC aber beträchtlich groß ſind, auch der parallaktiſche Winkel C ſehr klein ſeyn werde.

4. Da eine ſo kleine Standlinie immer nach Willkür gelegt werden kann, ſo kann man AB ſo annehmen, daß der Winkel CAB ein rechter iſt, oder wenigſten einem rechten ſehr nahe kömmt. Geſchiehet dieſes, ſo wird auch B beynahe ein rechter Winkel ſeyn; daher kann man ohne merklichen Irrthum ACB als ein gleichſchenklichtes Dreyeck anſehen, und es erhellet, daß man aus der Größe des parallaktiſchen W. C und der Standlinie AB, die Weiten AC, BC durch Rechnung finden könne. Es wird nähmlich $\sin C : AB = \sin \text{tot} : BC$ oder $BC = AC = \frac{AB}{\sin C}$, wenn man $\sin \text{tot} = 1$ ſetzet. Iſt nun C ſehr klein, mithin ohne merklichen Irrthum $\sin C = C$ (oder $= \frac{C}{206264}$ wenn C in Secunden gegeben wäre) ſo findet ſich $BC = AC = \frac{AB}{C} \cdot 206264$.

5. Es kömmt alſo darauf an, den parallaktiſchen Winkel C ausfindig zu machen. Am beſten wäre es wenn man wirklich nach C hinkommen und dieſen Winkel meſſen könnte. Da dieſer Winkel ſehr klein iſt, ſo würde man ihn bloß, ohne einen Winkelmeſſer, vermittelſt eines Fernrohrs, das mit einem Micrometer verſehen wäre, meſſen können, wenn man nähmlich unterſuchte, wie viel Schrauben, Umdrehungen, oder Abtheilungen eines Glasmikrometers, dem Bilde der Standlinie AB im Fernrohre bey C zugehörten. Vorausgeſetzt daß des Fernrohrs Feld, die ſcheinbare Größe ACB noch faßte.

6. Weil man aber auf ſolche Art ſich von dem Standorte bey A und B wegbegeben müßte, und die Abſicht iſt, bloß bey A oder B ſogleich die Größe des parallaktiſchen Winkels C auszufinden, ſo hat man andere Werkzeuge und Hülfsmittel erfunden, dieſen Endzweck zu erreichen.

7. Man könnte denken: wozu ſind neue Werkzeuge nöthig? Man meſſe mit dem Aſtrolabio bey A, B, die beyden Winkel A, B, ſo hat man auch C = 180° — A — B.

8. Allein man überlege, daß wegen der geringen Größe der Standlinie AB theils das Werkzeug nicht mit der gehörigen Genauigkeit geſtellet werden kann, theils auch die geometriſchen Winkelmeſſer von gewöhnlicher Größe bey weitem nicht die gehörige Schärfe, bey Ausmeſſung dieſer Winkel verſtatten. Denn man müßte A, B, wenigſtens bis auf einige wenige Sekunden genau meſſen können, wenn man den parallaktiſchen Winkel ſo genau finden wollte, als beym Gebrauche einer ſo kleinen Standlinie nothwendig iſt. Wie würde man aber dieſes von Aſtrolabiis, die einen oder $1\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmeſſer hätten, erwarten können? Andere Hinderniſſe zu geſchweigen.

9. Man ſtelle ſich Fig. 1076 durch A, B ein paar parallele Linien, Am, Bn vor, die mit CA, CB die kleinen Winkel mAC, CBn machen, auch durch C mit mA, nB, eine parallele Cr, ſo wäre der parallaktiſche Winkel ACB bekannt, wenn man die kleinen Winkel mAC, CBn wüßte. Denn hier wäre z. E. ACB = ACr + rCB = mAC + cBn, weil die Linien parallel ſind.

10. Oder man gedenke ſich Fig. 1077. durch A, mit BC eine Parallele Aw, ſo hätte man gleichfalls den parallaktiſchen Winkel, wenn man CAw meſſen könnte.

11. Auf dieſe beyden letzten Sätze gründen ſich nun die Werkzeuge, parallaktiſche Winkel zu meſſen, ohne ſelbſt nach C hinzugehen, und da die Winkel, wie mAC, nCB, CAw nur klein ſind, ſo erhellet, daß zur Meſſung derſelben kein eingetheilter Rand von vielen Graden nöthig ſey.

Man ſehe Pantometrum des Pacecco.

II. Der erſte, der den Verſuch machte, aus einem Standpunkte Entfernungen zu beſtimmen, war ohne Zweifel Camillus Raverta, deſſen Erfindung Curtius Caſatus heraus gegeben hat.

Schwenter hat uns in ſeiner praktiſchen Geometrie Tract. IV. eine Ueberſetzung von der Schrift des Caſatus geliefert, davon wir einen Auszug machen wollen. Der Titel iſt:

Geometricum Problema, mit Hülf der Perſpektiv, einer jeden für gegebenen Linie, durch eine Operation eine Parallel-Linie zu finden. Erſtlich zu practicirn erfunden, durch Hrn. CamillumRavertam von Mayland, hernach aber Geometrice demonſtrirt, durch Curtium Caſatum Mediolanenſem Math. publ. Profeſſ. zu Mayland. Dabey auch feine Bericht, wie man füglich die Landſchaften in Grund legen ſoll. Von gedachten Curtio Caſato erfunden, und Geometriſch demonſtrirt. Mayland. Ex Typographia q. Pacifici Pontii et Iohann Bapt. Picalaei ſociorum, Impreſſorum Archiepiſcop. Superiorum conſenſu. MDCII.

1. Aufgabe. Einer geraden gegebenen Linie aus einem gegebenen Punkte, durch eine einzige Operation in einem Stande, eine Parallellinie zu ziehen.

Zu mehrerm Verſtändniß ſind folgende 3 Grundſätze vorausgeſchickt.

I. Fig. 1078. Was nach einer geraden Linie, die man überzwerg anſiehet, in der Gegend oder gegenüber erſcheint, und geſehen wird, iſt mit gedachter Linie in einer Ebene: alſo auch was in der Gegend eines beſtimmten Punkts erſcheint, befindet ſich auch in der Verticalfläche des gegebenen Punktes. Z. E. Man ſieht aus A die Linie BC, und jenſeits derſelben die Punkte D, E, ſo lie-

liegen ſolche mit B, C in einer Ebene. Siehet man in A gegen D die Punkte F und G, ſo liegen ſolche auf der verlängerten Linie AD.

2. Fig. 1079. Wenn eine gerade Linie in zweyen unterſchiedenen ebenen Flächen liegt, ſo iſt ſie an dem Orte, in welchem ſich beyde Flächen durchſchneiden. Die Linie AB befindet ſich ſowohl in der Fläche ABCD als ABEF.

3. Wenn eine ebene Fläche durch zwey Punkte einer andern gehet, ſo ſchneiden ſich beyde Flächen in einer Linie, ſo durch gedachte beyde Punkte ſtreichet. So gehet in Fig. 1079 die Fläche ABEF durch die Punkte AB, der andern Fläche ABCD, und ſchneiden ſich beyde in der Linie AB, ſo durch die Punkte A und B gehet.

4. Verfertigung des Inſtruments zur Auflöſung der Aufgabe. Man nehme eine viereckichte oder runde ganz ebene Tafel, etwa eines Quadratfußes groß, in den Mittelpunkt ſetze man einen winkelrecht ſtehenden Stift. Man nehme eine andere Tafel, ſo lang als vorige, und von 3 Zoll Höhe, und mache in den Mittelpunkt der Länge und Breite ein Loch, welches der Dicke des Stiftes entſpricht, auf dieſen Stift ſetzt man die Tafel, ſo ſtehet ſolche auf der größern winkelrecht Fig. 1080 EF iſt die erſte Tafel, G der Stift, ABCD die zweyte Tafel, welche ein Diopterlineal abgiebt.

5. Erklärung der Aufgabe. Es ſey gegeben die Linie KL Fig. 1081, man ſoll aus dem Punkte G, mit einer einzigen Operation bey G verbleibend, eine Parallellinie ziehen.

Man ſetzet die Tafel EF ſo, daß der Punkt G der Tafel, genau über dem gegebenen G auf der Erde ſich befindet, ihre Fläche aber muß mit der Fläche, wodurch die beyden gegebenen Punkte ſtreichen einerley ſeyn, welches geſchiehet wenn man es alſo ſtellet, daß die beyden Punkte gleich der Tafel-Fläche geſehen werden, oder daß ſie parallel davon abſtehen, welches man durch die Bleywaage haben kann.

Wenn nun die beyden gegebenen Punkte auf dem Horizonte des Beobachters gegeben ſind, G aber an einen Ort ſo höher iſt, wann die Tafel alſo ſtehet, und man die Regel ABCD um den Stift ſo lange drehet, bis man DC und KL auf einmal ſiehet. Iſt dieſes geſchehen, ſo ziehet man an der Baſis der Regel AB auf der Tafel die Linie AB durchs Centrum G, ſo wird AGB parallel der KL ſeyn.

Denn wie aus Fig. 1082 zu ſehen, ſo iſt die Diopter ABCD gleich hoch, drehet man ſolche alſo herum, ſo wird CD eine ebene Fläche HI beſchreiben, die mit der Fläche des Tiſchleins EF parallel, und deshalben auch der Fläche die entweder mit ſolcher übereinſtimmet, als ABKL, oder in gleicher Weite iſt (welches hier nicht angenommen, damit die Figur deutlicher ſey, man kann ſich aber ſolches einbilden an der Tafel FE und den Punkten KL) von welcher Fläche HI das Oberſte der Regel, ſie werde gewendet wohin man will, nicht abweichen kann. Deshalben wenn man wie geſagt verfahren, und durch das Oberſte der Regel die Punkte KL auf einmal ſiehet, ſo iſt nach (1), die Linie CD auf der Fläche CDKL, welche durchs Geſicht und gedachte Punkte ſtreichet (KL), und weil ſie in beyden gedachten Flächen ſtehet, ſo wird ſie auch an dem Orte ſeyn, wo ſich beyde einander durchſchneiden, nach (2). Und deswegen wird die geſehene Fläche CDKL die Fläche KI ſchneiden, in der Linie CD, welche mit der oberſten Linie der Regel übereinſtimmt: deshalben, weil eben die Fläche CDKL auch zerſchneidet die Fläche, die entweder mit der Fläche der Tafel übereinſtimmt ABKL, oder parallel davon ſtehet, der rechten Linie KL nach

(3,

(3, indem ſie durch die Punkte LK gehet, die entweder in der Fläche ABKL ſind, oder in der Fläche ſo von der Tafel parallel ſtreichet welche Flächen parallel ſind der Fläche HI) ſo wird die geſehene Fläche CDKL, die zwey parallen Flächen CD, KL zerſchneiden, dahero dann KL der Linie CD wird parallel ſeyn. Weil aber das Unterſte der Regel dem Oberſten parallel, wegen ihrer gleichen Höhe, oder aber wenn die Fläche der Regel vergrößert, würde ſie durch CD ſtreichen, und die Fläche HI durchſchneiden in der Linie CD nach (3). Aus eben der Urſache, in dem ſie durch die Punkte AB ſtreichet, zerſchneidet ſie auch die Fläche EF in der rechten Linie AB. Die Flächen HI, EF aber ſind parallel, alſo auch AB und CD. Weil aber auch CD und KL parallel, ſo wird die Linie AB durch den gegebenen Punkt G gezogen, parallel ſeyn der Linie KL, ſo durch die gegebenen Punkte KL ſtreichet, welches zu vollziehen verlanget wurde. Es iſt alſo der vorgegebenen Linie durch einen gegebenen Punkt aus einem Stande eine Parallellinie gezogen worden.

5. Gebrauch dieſer Aufgabe. Die Anwendung iſt, folgende zwey anderweitige Aufgaben aufzulöſen.

1) Eine jede vorgegebene Entfernung aus einem Stande zu meſſen.

2) Aus einem Stande eine ganze Landſchaft aufzunehmen.

Erſte Aufgabe. Man ſoll die horizontale Entfernung des Punktes K vom Punkte S Fig. 1083 aus dem Standpunkte S beſtimmen. Man viſire auf einen andern Punkt, als hier auf L, deſſen Entfernung entweder bereits bekannt oder gemeſſen werden kann. Man ſtellet die Tafel in S, ſo daß der Stift S, über das gegebene S kömmt, und der Tafel Fläche entweder correſpondire der Fläche ſo durch KL ſtreichet, oder aber nur derſelben parallel ſey. Wenn ſie nun alſo feſt ſtehet, ſo richtet man die Regel gegen KL, und bey derſelben Baſi ziehet man auf der Tafel die Linie S. 1 ſo auf K zuſtreicht und S 2 auf L. Hiernach aber ziehet man nach der Grund-Aufgabe aus S die Linie ASB mit KL parallel. Mit AB ziehe man auf der Tafel, aus irgend einem Punkte der Linie S 2, nach SI, eine Parallellinie PQ. Wie ſich nun verhält SQ zu SP, alſo SL zu SK, daher iſt $\frac{SL.\ SP.}{SQ} = SK =$ der geſuchten Entfernung des Punktes K von S.

Damit man aber bequem die Linie SQ meſſen kann, ſo wird die Baſis der Regel in kleine gleiche Theile getheilt, wodurch man einen Maßſtab erhält, nach welchem man die Größe der Linien beſtimmen kann.

Dieſes wird noch füglicher verrichtet, wenn man den untern Theil der Regel in einige kleine und gleiche Theile eintheilet, etwann von 5 zu 5 oder 10 zu 10. Wollen wir hernach prakticiren, ehe die Parallellinie PQ gezogen wird, ſo meſſe man zuvor LS nach Ellen, Schritten oder dergleichen, darnach wenn die Regel auf S 2 nach L gerichtet iſt, trägt man von der Regel ſo viel kleine Theile von S gegen 2 bis in Q reichend und ziehet alsdann aus QP die Parallellinie QP gegen KL, wie oben gelehrt worden. Wenn dieſes nun geſchehen und wir zu wiſſen verlangen, wie lang SK in Ellen ſey, ſo rücken wir die Regel auf SP, und zählen die kleinern Theile von S nach P, eben ſo viel Ellen wird von S nach K ſeyn; Denn SQ: SP = SL: SK, ſo werden ſich auch die kleinern Theile in SQ zu den kleinen Theilen in SP verhalten, wie die Ellen der Linie SL zu den Ellen der Linie SK. Es iſt alſo die Länge der Linie SK ohne alle Rechnung beſtimmt worden welches z. th. w.

Fig. 1084. Wenn man aber bey Meſſung der Ellen von der Linie GM, die mit GK in einer Linie iſt, nicht gehen darf; ſo dirigirt man die Regel auf ein ander Objekt z. E. einen Stab, der auf der Linie GM etwa in M eingeſteckt worden, und ziehe vermittelſt der Regel nach der Richtung GM, auf der Tafel G. 3. Hierauf viſirt man auf ein ander Ziel z. E. in L, und ziehe nach dieſer Richtung, die Linie G 2, iſt dieſes geſchehen, und die Diſtanz GL durch GM beſtimmt, ſo läßt ſich durch GL auch die Linie GK beſtimmen.

Zweyte Aufgabe. Von einer Höhe G die Oerter K, L, M, N, die man daſelbſt liegen ſieht, ihrer Lage nach aus einem Stande zu beſtimmen. Fig. 1085. Man ſtelle das Täflein über den Punkt G, ſo daß der Stift G über dem Punkt ſtehet, und ſtelle die Tafel mit dem Horizonte parallel. Man viſire auf die Oerter K, L, M, N und ziehet die Linien G. 1, G. 2. G. 3, G. 4. Alsdann nimmt man einen Punkt in Q an, und ziehet daraus mit der Linie KL eine Parallellinie, die die GK in P berührt. Aus Q ziehet man QR, LM, und aus R die RS, MN, ſo wird GPQRSG ähnlich GKLMNG.

Wenn aber zwey oder mehr Oerter in einer geraden Linie mit G auslägen, als zwiſchen GL das Kaſtel O. Dieſes nun auf der an dem entſprechenden Ort zu bringen, ziehet man entweder aus P die Linie PT parallel mit KO, oder aus R, die RT mit MO. Weis man nun wie weit G von O abgelegen iſt, ſo wird ſich GT zu GO wie jede andere entſprechende Linie auf der Tafel zu der im Felde verhalten.

Es iſt hieraus leicht einzuſehen, daß die Auflöſung des Caſatus aus einer Stelle, vermittelſt einer der Größe nach bekannten Linie (GQ) eine Figur auf den Felde zu meſſen, der erſte Gedanke zum Meßtiſche geweſen, denn Caſatus lehrt ſelbſt in der Folge, vermittelſt ſeiner Tafel aus 2 Stellen, deren Entfernung bekannt iſt, eine Gegend aufnehmen. Es wird alſo wohl dem Caſatus die Erfindung des Meßtiſches zugeſchrieben werden müſſen.

Hierauf erzählt Caſatus die Mängel dieſes Inſtruments, und Schwenter macht einige Erinnerungen darüber.

Entfernungen zu meſſen aus einem Stande nach *Iaques Pelletier*. (Uſage de la Geometrie. Paris 1573). Ein hölzerner prismatiſcher Stab, etwa 4 Fuß lang, ſein Querſchnitt etwa ein Quadrat Zoll, die Länge in Zoll und dergleichen getheilt, wird an einem Ende der Weite, die man wiſſen will, lothrecht geſtellt, um ſein oberſtes Ende drehet ſich eine Regel mit Dioptern, und längſt an ihm läßt ſich eine abgetheilte Regel ſenkrecht auf ihn verſchieben. Nun viſirt man nach dem andern Ende der Weite, und vergleicht mit einander den Theil des Stabes von oben herunter, wie weit die Regel verſchoben iſt, und das Stück der abgetheilten Regel das die mit den Diopteru abſchneidet. Eben ſo verhält ſich der ganze Stab, und die Weite die man meſſen will.

So mißt Pelletier eigentlich die horizontale Weite, an deren einem Ende er ſich befindet, vermittelſt einer Standlinie, die vertikal alſo ſenkrecht auf ſie, und etwa 4 Fuß lang iſt. Pelletier ſagt, wenn die Weite exceſſivement grande iſt, ſoll man ſich auf eine Höhe ſtellen, damit man von oben hinunter nach dem Ende der Weite viſiren kann. Da wird man freylich die Höhe vermittelſt eines Lothes meſſen ſollen. Er thut ſich viel darauf zu gute, dieſes Verfahren entdeckt zu haben, das diente z. E. eine Feſtung zu recognosciren, ein Lager zu ſchlagen u. ſ. w. wo die Schwierigkeit nicht ſo ſehr darauf ankömmt, daß die Weite groß iſt, als es gefährlich aus zwey Ständen zu viſiren.

Ent-

Entfernungen zu meſſen aus einem Stande nach *Rensbergers Geometrie* Augſp. 1568. R. lehrt die Zubereitung des geometriſchen Quadrats und Triangels. Der Triangel beſtehet aus 2 Stäben, einer 18 Zoll der andere 12 Zoll lang mit einem kürzern Stabe ſenkrecht auf ihm, in der Ebene des Winkels den die andern beyden machen, und einem dritten auch 18 Zoll, zur linea viducide zu gebrauchen. Man begreift daß ſich mit dieſen Stäben Dreyecke bilden laſſen, von deren Seiten man das Verhältniß weiß, wenn auf den Stäben Theilungen ſind.

Wie man das geometriſche Quadrat und den Triangel im Abmeſſen brauchen, und jede Länge, Weite oder Höhe an einem ſtillſtehenden Ort erfahren ſoll, lehrt R. in VI. Kap. Wie man eine Weite nach der Länge einer Meilweges oder weiter ſtillſtehend auf einem hohen Thurme abmeſſen ſoll das VII Kap.

Er ſtehet auf einem hohen Thurme, des Höhe iſt 50 Ellen: viſirt an dem geometriſchen Quadrate nach einem entlegenen Gegenſtande, und ſiehet wie viel Theile die Abſehenslinie auf der horizontalen Seite des Quadrats abſchneidet, ſo iſt: Seite des Quadrats, zur Menge dieſer Theile, wie Höhe des Thurms zur Weite des Gegenſtandes.

Ganz richtig, aber Höhe des Thurms iſt da Standlinie, weil man annimmt, die Weite vom Fuße des Thurms nach dem Gegenſtande ſey ſenkrecht auf den Thurm.

Eben ſo hängt er im VI K. ſeinen Triangel an einen verticalen Stab, der alsdann Standlinie iſt.

Auf dieſe Art aus einem Stande zu meſſen konnte jeder Mathematicus leicht fallen, und mancher hielt es vielleicht nicht der Mühe werth zu beſchreiben.

Entfernungen zu meſſen aus einem einzigen Stande vermittelſt der Bewegung eines Objekts. (ſ. Lamberts Beyträge zum Gebrauch der Mathematik. 1r Th. I. §. 242 ‒ 260).

1. Wenn es an dem iſt, daß unſere Begriffe vom Abſtand der Objekte nicht vom Auge, ſondern vom Gefühl und von der Bewegung ihren Urſprung haben, ſo ſollte man vermuthen, daß die Bewegung uns bey der Ausmeſſung der Entfernung, und Lage der Gegenſtände Dienſte thun könne. Allein ſie ſind zur Zeit noch ſehr eingeſchränkt, wenn wir ſie bey irdiſchen Objekten gebrauchen wollen; und man kann ſagen, daß man dabey am Himmel glücklicher geweſen als auf der Erde. In der That hat die ganze Aſtronomie bey dem angefangen, was wir am Himmel ſehen, und daher bloß bey der ſcheinbaren Bewegung der Sterne; dadurch hat man es endlich dahin gebracht, daß man ihre wahre Bewegung und daraus ihre Lage für jede Zeit zum Voraus beſtimmen kann, und dieſe Beſtimmung nunmehro nach und nach auf die Kometen und in ſpätern Weltaltern auch auf die ſogenannten Fixſterne erſtrecken wird, weil kein Zweifel iſt, daß dieſe nicht auch ihren Ort unter einander ändern ſollten.

2. Wenn wir hierinnen bey irdiſchen Gegenſtänden nicht ſo glücklich ſind, ſo fehlt es nicht an den allgemeinen Geſetzen der Bewegung, die in der Mechanik zu reichend entwickelt ſind, ſondern an genugſamen Anläſſen, und an der Anwendung derſelben auf beſondere Fälle. Wir können dieſes durch leichte Betrachtungen erweiſen. Dann erſtlich, wenn wir die Bewegung geradlinicht, und ihre Geſchwindigkeit einförmig ſetzen, ſo iſt nichts leichter als aus der Zeit und aus der Geſchwindigkeit auf den durchlaufenen Raum zu ſchlieſ-

ſchlieſſen, weil die Zeit mit der Geſchwindigkeit multiplicirt den Raum giebt. Und weiß man von der Geſchwindigkeit nur dieſes, daß ſie gleichförmig ſey, ſo kann man dennoch den Raum mit der Zeit proportioniren, und die Verhältniſſe zwiſchen jeden Theilen des Raums finden.

3. Allein wenn wir die Anläſſe aufſuchen, wo dieſer einfache Fall vorkömmt, ſo werden wir ſehr wenige finden, die zur Ausmeſſung einer Länge oder eines Abſtandes dienen können. Der einzige Fall wo die Geſchwindigkeit wirklich gleichförmig iſt, iſt die Bewegung des Schalles in der Luft. Da derſelbe in Zeit von einer Secunde ohngefähr 1140 pariſer Schuh durchläuft, ſo wird er er 20 Sekunden gebrauchen um eine deutſche Meile zu durchlaufen. Man kann ihn alſo da gebrauchen, wo es auf 1000 Schritte mehr oder minder nicht ankömmt, und wo man den Anfang weiß, wenn er entſtehet, damit man mittelſt eines Pendels, das Sekunden ſchlägt, die verfloſſene Zeit bemerken könne. Folglich.

1) Bey dem Echo, wenn man ſelbſt einen Schall erreget, und die Zeit mißt, in welcher das Echo antwortet. Die Zeit in Secunden und auf 20 Sekunden eine Meile gerechnet, giebt den doppelten Abſtand des Ortes welcher den Schall zurückſchläget. In dieſen Fall wird der Fehler, welcher von der Abzählung der Sekunden herrührt, um die Hälfte geringer, hingegen bleibt der, ſo von der Veränderlichkeit in der Geſchwindigkeit des Schalles entſtehet.

2. Bey Ungewittern. Da der Blitz und der Knall des Donners zu gleicher Zeit entſtehen, das Licht ſich aber hier ſo gut als unendlich geſchwinde beweget, ſo zählt man die Sekunden, die inzwiſchen verfließen, bis man den Schall höret, und findet dadurch den Abſtand des Ungewitters, wenn man wie vorhin 20 Sekunden auf die Meile rechnet.

3. Bey Löſung des Geſchützes. Da hat es aber die Bewandtniß, weil man das Feuer in eben dem Augenblicke ſiehet, wenn das Stück gelöſet wird, ſo zählt man wiederum die Secunden, die verfließen bis man den Knall höret, und findet dadurch den Abſtand. Dieſes Mittels können ſich die Schiffe bedienen um ihren Abſtand von einander zu finden, da ſie ohne dem einander Zeichen geben.

Man ſehe hiervon mit mehrern den Art. Schall.

4. Die Bewegung der Erde da ſie ſich in 24 Stunden um ihre Axe drehet, giebt die meiſten Mittel an, deren man ſich bedienet, um den Unterſchied der geographiſchen Länge der Städte, und überhaupt jeder Punkte auf der Erdfläche zu finden, weil ſie den Unterſchied der Zeit verurſachet, zu welcher an Orten die verſchiedene Länge haben, Mittag iſt. An jedem Orte wird die Uhr nach den Mittage deſſelben gerichtet, und wenn zwey Obſervatoren ein Phänomen in einem Augenblicke, und dieſen Augenblick auf ihrer Uhr bemerken, ſo giebt der Unterſchied der Uhren den Unterſchied der geographiſchen Länge. Solche Phänomene ſuchte man ſonſt nur am Himmel, ſchon längſt aber haben die franzöſiſchen Akademiker angefangen, das Licht von entzündetem Pulver hierzu zu gebrauchen, weil man es des Nachts in ſehr großer Entfernung ſehen kann, wenn es auf einem hohen Berge angezündet wird.

5. Vielleicht ließen ſich, zumal in ebenen Ländern, die Ungewitter dazu gebrauchen. Da hierbey ein einziger beträchtlicher Zweifel vorkömmt, ſo wollen wir denſelben in ſein Licht ſetzen, und ſodann auch die Bequemlichkeit

der

der Methode und die Umſtände anführen, bey welchen man ſie gebrauchen könnte. Allenfalls iſt es leicht Proben davon zu machen, und die Vortheile, die die Geographie davon hatte, ſind groß genug dazu aufzumuntern.

Einmal laſſen ſich faſt alle Sommerblitze am äuſſerſten Horizont ſehen, wo man keinen Knall mehr hört, und es iſt vermuthlich, daß man in dieſen Fällen nur das reflektirte Licht des Blitzes ſieht. Wir wollen ſetzen, die Höhe des Orts, wo der Blitz entſteht, ſey eine halbe Stunde oder 5000 Schuhe; es iſt klar, daß er höher und niedriger ſeyn kann. Sieht man denſelben nun in der Horizontallinie, ſo läßt ſich hierdurch der Abſtand deſſelben finden. Die Quadratwurzel von 5000 iſt beynahe 70. Sieht man dieſe Zahl als Minuten eines Grades an, ſo drückt ſie die ſcheinbare Vertiefung des Meerhorizontes aus, wenn er in einer Höhe von 5000 Schuhen geſehen wird; daher iſt ſie hier = 70′. Sie verhält ſich aber zum Abſtande des Horizontes, wie 6 zu 7; folglich iſt dieſer Abſtand beynahe 82 Minuten, oder bey $20\frac{1}{2}$ Meilen. Und ſo weit würde man in einem ebenen Lande den Blitz zu Nacht noch ſehen, wenn er in einer Höhe von 5000 Schuhen erzeugt wird. Iſt ſein Erzeugungsort höher oder niedriger, ſo wird dieſe Weite im Verhältniß der Quadratwurzel ſeiner Höhe größer oder kleiner. Es iſt nicht zu vermuthen, daß man das reflektirte Licht noch um vielmal weiter ſehe.

Hieraus folgt, daß zwey Obſervatoria, welche einen gleichen Blitz in der Höhe von 5000 Schuhen noch ſehen, bey 40 Meilen von einander entfernt ſeyn können. Liegt demnach das eine gegen Oſten, und das andere gegen Weſten, ſo beträgt der Unterſchied der Zeit, wenn beyde unter dem Aequator liegen 5″20‴; in Europa unter der Polhöhe von 48°12′, wo ein Grad des Parallelzirkels nur $\frac{2}{3}$ von einem Grade des Aequators hat, wird dieſer Unterſchied um die Hälfte größer, und wächſt folglich auf 8 Minuten. Da man aber auf beyden Obſervatoriis den Blitz in gleichem Augenblicke ſieht, ſo iſt klar, daß ſich dieſer Unterſchied mittelſt wohlgerichteter Penduluhren ſehr genau beſtimmen ließe. Eben dieſes gienge noch an, wenn auch die beyden Obſervatoria einander viel näher wären. Wir haben hier unter den größten Entfernungen die mittlere beſtimmt. Es iſt aber immer beſſer, wenn ſie einander oſt- und weſtwärts liegen.

Es hat hingegen hiebey nichts zu ſagen, wo das Ungewitter entſteht, oder ob es ſich von einem Orte an den andern zieht. Denn da wir den entſtandenen Blitz nur als ein Zeichen anſehen, das an beyden Orten in einem Augenblicke beobachtet wird, ſo dienet uns dieſer Augenblick allein, um auf den Uhren die Zeit zu bemerken, und den Unterſchied davon zu beſtimmen. Da es ferner in einer Nacht unzähligemal blitzen kann, ſo laſſen ſich eben ſo viele Obſervationen machen, und unter einander vergleichen.

Dieſe Vergleichung beſtimmt ferner die Zeiten, welche mit einander verglichen werden, weil die Blitze ſehr ungleich, und bald geſchwinder, bald langſamer auf einander folgen. Wenn daher jeder Obſervator die Minuten und Secunden aufzeichnet, die er bey jedem Blitze an ſeiner Uhr bemerkt, und man hält die beyden Columnen gegen einander, ſo müſſen die Zeiten mit einander verglichen werden, die einen gleichen Unterſchied geben, und es iſt faſt unmöglich, daß dieſe Vergleichung auf mehr als einerley Art geſchehen könnte, weil es zum voraus ſetzte, daß von jedem Blitze zum folgenden, genau eben ſo viele Secunden verfließen ſollten, und dieſes wird ſich wohl niemals zutragen.

Um hievon ein leichtes Beyſpiel zu geben, ſo ſetze man, der eine Obſervator habe auf ſeiner Uhr folgende Minuten gefunden, 8, 10, 13, 17, 20, 21, 22, 25, 29; und der andere in gleicher Stunde folgende: 13, 14, 16, 18, 21, 25, 28, 29, 31. Wir geben dieſe Zahlen Kürze halber nur in Minuten. Man nimmt die Unterſchiede zwiſchen jeden zwey auf einander folgenden Zahlen, ſo hat man von der erſten Reihe 2, 3, 4, 3, 1, 2, 3, 4; von der andern Reihe 1, 2, 2, 3, 4, 3, 1, 2. Dieſe beyden Reihen von Unterſchieden müßten einander gleich ſeyn, wenn beyde Obſervatoren bey gleichem Blitze angefangen hätten; da dieſes aber nicht iſt, ſo muß man ſie ſo verſchieben, daß die ähnlichen Zahlen über einander zu ſtehen kommen, und es iſt klar; daß es nur auf folgende Art angeht:

		2	3	4	3	1	2	3	4
1	2	2	3	4	3	1	2		

Woraus man ſieht, daß der andere Obſervator um zwey Blitze zu früh angefangen, und folglich die obſervirten Minuten ſelbſt ſo ſtehen müſſen:

		8	10	13	17	20	21	22	25	29
13	14	16	18	21	25	28	29	31		

Zieht man nun die obern von den untern ab, ſo giebt der Unterſchied bey allen 8 Minuten, und ſo groß muß nothwendig der Unterſchied der Zeit ſeyn.

Wenn man dieſen Unterſchied ohne dem ſchon beyläufig, z. E. aus den Landcharten weiß, ſo iſt offenbar, daß dieſe Vergleichung dadurch noch merklich abgekürzt wird.

Da es ſich zutragen kann, daß zwey und mehrere Ungewitter zugleich am Himmel ſind, ſo giebt es dabey folgende Fälle:

1) Wenn die Obſervatoria ſehr entlegen ſind, ſo kann es geſchehen, daß der eine Obſervator das eine, der andere aber das andere Ungewitter obſervirt. In dieſem Falle iſt es phyſikaliſch unmöglich, daß die erſt beſchriebene Vergleichung angehen ſollte, weil man ſetzen müßte, daß die Blitze am erſten Orte denjenigen, ſo am andern beobachtet werden, ſämmtlich und der Ordnung nach um gleich viel Minuten und Secunden vorgehen oder folgen. Man kann zweifeln, ob dieſes in der Natur möglich ſey. Ueberdieß müſſen die Ungewitter dem weſtlichen Obſervator oſtwärts, und dem öſtlichen weſtwärts, oder in gleicher Linie mit ihnen liegen. Denn weichen ſie auf verſchiedenen Seiten ab, ſo läßt ſich der Unterſchied bald erkennen

2) Wenn beyde Obſervatoren beyde Ungewitter ſehen, und dieſelben in verſchiedenen Gegenden liegen, ſo laſſen ſie ſich unterſcheiden, und folglich kommt es auf den vorigen Fall an; liegen ſie aber zwiſchen den Obſervatoren und in gleicher Linie mit ihnen, ſo wird das eine höher über den Horizont gehen, als das andere, und das höhere iſt dem Obſervator näher, welches ebenfalls ſtatt hat, wenn er von dem einen den Donner hört, vom andern aber nicht, oder viel ſchwächer und ſpäter; denn man kann auch dieſes Mittel zu Hülfe nehmen. Das ſchwerſte iſt, wenn man keinen Unterſchied finden ſollte, welches aber nicht glaublich oder wenigſtens ſehr ſelten iſt. Doch auch in dieſem Falle hat es nichts zu ſagen, und die Zeit kann unter einander obſervirt werden. Denn da es, wie ſchon erinnert worden, auf den Ort des Ungewitters nicht ankommt, ſo wird jeder Blitz, den beyde Obſervatoren ſehen, ihnen den Augenblick beſtimmen, wenn ſie

auf ihrer Uhr die Zeit bemerken ſollen, und die Vergleichung wird wie vorhin angeſtellt.

3) Sieht der eine Obſervator beyde, der andere aber nur ein Ungewitter, die ſich nicht ſollten unterſcheiden laſſen, ſo wird jener ungleich mehr Obſervationen haben, als dieſer, wenn beyde keinen Blitz unbemerkt vorbey laſſen. In dieſem Falle geht die Vergleichung nicht wohl anders an, als wenn man den Unterſchied der Länge beyder Oerter ohne dem ſchon beyläufig weiß. Denn dadurch laſſen ſich aus des erſtern Obſervationen ſehr viele wegſchaffen, und man behält nur die wahren und unzweifelhaften. Hierdurch wird die Vergleichung erleichtert, ungeachtet ſie noch allezeit mühſam bleibt.

Man ſieht hieraus, daß man bey ſolchen Obſervationen jede Umſtände mitnehmen müſſe, und wo es am ſchlimmſten geht, da iſt das einzige Uebel dabey, daß man vergebens obſervirt hat, und die Obſervation zu einer andern Zeit wiederholen muß, die dazu bequemer iſt.

Da man bey Beſtimmung der geographiſchen Länge der Oerter die Erſcheinungen am Himmel, das Licht des entzündeten Pulvers, und nach dieſer letzten Methode das Licht des Blitzes nur deswegen gebraucht, damit man an beyden Oertern in einem gleichen Augenblicke die Zeit auf der Uhr, und dadurch ihren Unterſchied finden könne, ſo läßt ſich ein Mittel gedenken, welches beſonders in den Nordländern eben dieſe Dienſte thun kann, und noch allgemeiner zu gebrauchen wäre. Die Frage kommt darauf an: Ob bey dem Nordlichte ſich ſolche plötzliche Veränderungen, wo nicht allemal, doch zuweilen äuſſern; die man an ſehr entlegenen Orten als eben dieſelben erkennen kann? Wenn dieſes iſt, ſo leiſtet daſſelbe zur Beſtimmung der Länge viel allgemeinere Dienſte. Denn da dieſes Licht, nach Hrn. von Mairan Berechnung, gemeiniglich 120 Meilen hoch iſt, ſo iſt unſtreitig, daß man daſſelbe weit herum ſehen könne. Und hat es kennbare Phänomene, beſonders ſolche, die in einem Augenblicke entſtehen, ſo läßt ſich, wie vorhin, der Unterſchied der Zeit, und daraus der Unterſchied der Länge der Oerter beſtimmen. Folgen mehrere ſolche Erſcheinungen auf einander, ſo kommen bey der Vergleichung, wenn ſie auch nicht anders zu unterſcheiden wären, eben die Fälle vor, die wir vorhin bey den Ungewittern aus einander geſetzt haben.

6. Die übrigen Bewegungen, die wir auf der Erde ſehen, ſind ſo ordentlich nicht, daß wir Zeit, Raum und Geſchwindigkeit mit einander auf eine leichte und ſichere Art vergleichen, und daraus den Abſtand und die Lage des durchlaufenen Raums beſtimmen könnten. Zu einer beyläufigen Ausmeſſung des Weges, den wir ſelbſten durchwandeln, gebrauchen wir die Abzählung der Schritte, und man hat Inſtrumente oder Schrittzähler ausgedacht, dadurch wir der Mühe des Zählens überhoben werden. Und eben ſo iſt man auf Räder, Schubkarren ꝛc. gefallen, um den durchlaufenen Weg durch den Umlauf der Räder zu meſſen. Sie reichen aber zur genauen Beſtimmung nicht zu, und ſind zu weitläuftig, wenn man die Länge nur ohngefähr wiſſen will.

7. Zur Beluſtigung giebt es Anläſſe folgendes Mittel zu gebrauchen. Man befinde ſich in A, Fig. 1090 wo man auf dem Felde, eine Straße BCD, und auf derſelben einen Menſchen gehen oder fahren ſiehet. Am bequemſten iſt es, wenn man ihn zu ſeinen Fenſter hinaus ſehen kann. In dem er von B nach D gehet, zähle man ſeine Schritte, und wenn er von B in C, und von C in D eine gewiſſe Anzahl gemacht, ſo meſſe man die beyden Winkel BAC, BAD

BAD welches am füglichſten geſchiehet wenn in B, C, D, oder auf den Linien BA, CA, DA, kennbare Objekte ſind, weil man dadurch im Zählen nicht gehindert wird. Da man nun die Linien BC, CD in Schritten weiß, ſo wird die Lage des Punkts A und die Länge der Linien BA, CA, DA gefunden, wenn man jede als die Chorde eines Kreiſes anſiehet, deſſen Winkel ſo bekannt iſt, an der Peripherie lieget, und ſolche Zirkel entweder vermittelſt des Zirkelinſtruments wirklich ziehet, oder trigonometriſch berechnet. Man ſetzt hierbey der Weg von B bis D gehe gerade fort. Die Winkel in A müſſen eine ziemliche Größe haben. Beym Fahren zählt man den Umlauf der Räder, und es iſt klar, daß man bey größern Entfernungen Ferngläſer zu Hülfe nehmen, oder den Weg durch die Zeit beſtimmen müſſe.

Iſt BD der Weg eines Schiffes, und man befindet ſich in A am Ufer, ſo müßten die Theile BC, CD der Zeit proportional gemacht werden. Da man aber die Geſchwindigkeit des Schiffes nicht weiß, ſo wird man zwar die Figur zeichnen können, aber keinen Maßſtab dazu haben.

Wenn aber Fig. 1091 zwey Schiffe, das eine nach der Richtung AD, das andere nach einer andern Richtung ab fähret, und auf A mißt man die Winkel aAD, bBD, bCD, dDA, welche das andere Schiff in 4 Zeiten mit der Richtungslinie AD macht, und die Zeit wenn man in A, B, C, D iſt, wird bey jeder Obſervation beſtimmt, ſo läßt ſich aus der Zeit und der Geſchwindigkeit des Schiffes, die Linie AD eintheilen, und aus den obſervirten Winkeln, können die Linien Aa, Bb, Cc, und Dd gezogen werden. Da man nun hier annimmt, daß die Theile ac, bc, cd eben das Verhältniß wie AB, BC, CD, haben, ſo läßt ſich ad conſtruiren, und daher wird auf dem Schiffe A, der Weg und der Abſtand des andern Schiffes a beſtimmt.

Es kömmt dieſe Aufgabe bey Beſtimmung des Laufes und des Abſtandes der Kometen vor, wenn man die durchlaufenen Bogen ſo klein nimmt, daß man ſie als gerade Linien anſehen kann. Man muß nähmlich 4 Linien von gegebener Lage, ſo durchſchneiden, daß die abgeſchnittenen Theile der Linie, die man durch ſelbige ziehet, ein gegebenes Verhältniß haben. Die Auflöſung und Conſtruktion dieſer Aufgabe hat Newton gegeben.

Entfernungen zu meſſen; vermiſchte Aufgaben.

1. Es ſey Fig. 1045 AB eine Weite von bekannter Größe, und CD eine Weite die man finden ſoll, zwiſchen C und D iſt ein Hinderniß, daß man von C nach D zwar nicht meſſen, aber doch hinſehen kann; an die bekannte Länge AB kann man gar nicht kommen; man ſoll CD finden, voraus geſetzt, daß man nur über C und D die Beobachtungen machen kann.

Auflöſung. Man verfahre eben ſo als wenn man aus der Standlinie CD, die Weite AB finden wollte, da aber CD nicht gemeſſen werden kann, ſo mache man, wenn man ſich des Meßtiſches bedient, auf dieſen CD von willkürlicher Länge z. E. nehme CD, tauſend Theile eines gewiſſen Maßſtabes gleich. Nachdem nun der Meßtiſch gehörig über D gebracht worden, und man auf demſelben alle Richtungslinien gezogen hat, ſo wird die Figur abcd, der ABCD ähnlich, und es ſind ab, cd, den Linien AB, CD proportional; man meſſe alſo auf dem Meßtiſche die Linie ab, nach dem Maßſtabe, nach welchem man hier z. E. cd = 1000 Theilen genommen hat; ich will ſetzen man fände nach dieſem Maßſtabe ab = 3560 Theilen; wenn nun die bekannte Weite AB = 670 Ruthen wäre, ſo fände man CD nach der Propor-

tion

tion ab.: cd = AB : CD oder

3560 : 1000 = 670 : CD

alſo CD = 188, 2 Ruthen.

Wenn man auf dem Meßtiſche die Weiten ac, cb, u. ſ. w. miſſet ſo findet man aus den Proportionen

ab : AB = ac : AC

cb : CB = ab : AB

ac : AC = cb : CB u. ſ. w. auch die Entfernungen, AC, CB, AD BD.

S. Meyers praktiſche Geometrie. 2r Th. §. 243.

2. Die Entfernung zweyer Oerter A und B Fig. 1044 die ſo groß iſt, daß man ſie nicht bequem aus einer einzigen Standlinie beſtimmen kann, zu meſſen, vorausgeſezt, daß man noch von A nach B hinſehen kann,

Auflöſung. 1) Man wähle auf dem Felde ſchickliche Standpunkte C. D. E F. G, ſo daß die Dreyecke ACD, DCE, CEF, FGB, wodurch beyde Oerter AB unter einander müſſen zuſammen hängen, weder zu ſpitzige noch zu ſtumpfe Winkel bekommen. Auch wird es gut ſeyn, die Standpunkte ſo angenommen zu haben, daß die Linie AB die Seiten der Dreyecke wirklich ſchneidet.

2) Man meſſe in jedem Dreyecke, wenn es nöthig ſeyn ſollte, alle drey Winkel, damit man von der Genauigkeit der Meſſung ein ſicheres Urtheil fällen könne. Gehet es aber nicht an, ſo müſſen wenigſtens 2 Winkel in jedem gemeſſen werden; unter den gemeſſenen Winkeln, verſtehe ich zugleich die centrirten.

Auſſer dem meſſe man z. E. in dem erſten Dreyeck ACD, die Seite AD.

3) So kann man daraus und vermittelſt des Zuſammenhangs der Dreyecke, alle übrigen Seiten, CD, AC, CE, CF u. ſ. w. trigonometriſch herleiten.

4) Daraus laſſen ſich nun ferner alle Dreyecke in ihrem richtigen Zuſammenhange, auf das Papier tragen, und wenn man nun die Figur ACFBGEDA mit möglichſter Genauigkeit verzeichnet hat, ſo ziehe man durch A und B auf dem Riſſe eine gerade Linie und meſſe ſie, ſo hat man die geſuchte Weite AB durch Zeichnung, ſelbſt wenn man nicht unmittelbar von A nach B hätte hinſehen können.

5) Wollte man ſich aber gar keiner Zeichnung bedienen, und ſezt man, es ließe ſich wirklich von A nach B hinſehen, ſo meſſe man überdem auch die Winkel CAB, FBA.

6) So kann man erſtlich in dem Dreyecke ACD, aus den bekannten Seiten AC, AD, und den Winkeln CAm, und DAm = CAD — CAm; die Linien Cm, Dm, und Am berechnen, wozu ſich leicht eine Formel finden läßt.

7) Da nun auch der Winkel Cmn = CAm + ACD bekannt iſt, ferner in dem Dreyecke Cmn die Seite Cm und der Winkel mCn = DCE, ſo kann man daraus ferner mn, und Cn berechnen.

8) In dem Dreyecke Eno iſt ferner bekannt, der Winkel Eno = Cnm = 180° — mCn — Cmn (7), der Winkel nEo = CEF, und die Seite En = CE — Cn; (7) daraus findet ſich denn no und Eo.

Und ſo kann man nach und nach in den Dreyecken Fop, GpB, ferner op und pB finden.

9) Die

9) Die Summe aller gefundenen Stücke Am + mn + no + op + pB iſt demnach der geſuchten Weite AB gleich.

10) Um ſich in der Ordnung, nach welcher man nach und nach die einzelnen Stücke Am, mn etc. ſucht, nicht zu irren, ſo wird es allemal gut ſeyn, vorher eine roh entworfne Zeichnung (4) von dem Zuſammenhange aller Dreyecke gemacht zu haben.

11) Will man ſeine Arbeit berichtigen, ſo kann man auch in dem letzten Dreyecke FBG eine Standlinie FB und den Winkel FBA gemeſſen haben, und nun rückwärts von B gegen A eine ähnliche Rechnung führen, und die Stücke Bp, po, on u. ſ. w. finden, deren Summe denn mit der Rechnung von A aus, übereinſtimmen muß.

12) Daß übrigens in allen Dreyecken die Winkel horizontal gemeſſen werden müſſen, bedarf kaum einer Erinnerung.

13) Wenn auch die Standpunkte C, D, E u. ſ. w nicht ſo liegen, daß AB wirklich in den Seiten CD, CE, FE u. ſ. w. einſchneidet, ſo wird man doch nach einiger Ueberlegung, und durch Hülfe eines rohen Entwurfs, aus den bekannten Seiten und Winkeln aller Dreyecke CAD, DEC u. ſ. w. und aus dem gemeſſenen Winkel CAB Mittel finden, die ganze Weite AB ſtückweiſe trigonometriſch zu berechnen. Es können dabey auch Perpendikularlinien zu Hülfe genommen werden, die man ſich von den Punkten C, D, E, F etc. auf AB herabgefället gedenket; man kann die Stücken auf AB berechnen, die zwiſchen jedem Paare nächſt auf einander folgenden Perpendicularlinien fallen, und ſo durch deren Summe oder Abzug, AB auch Stückweiſe finden.

3. Wenn man auch gleich nicht von A nach B wirklich hin viſiren kann, um einen Winkel wie CAB zu meſſen, dem ohnerachtet die Weite AB durch Hülfe des Zuſammenhangs aller Dreyecke CAD, CDE etc. zu finden.

Aufl.. 1) Man ſiehet leicht daß dieſe Aufgabe darauf hinaus läuft, eine vorgegebene Diagonale eines Polygons, deſſen Winkel und Seiten bekannt ſind, zu finden. Denn wenn man ſich das Vieleck ACFBGEDA vorſtellet, ſo iſt AB eine gewiſſe Diagonallinie deſſelben, welche durch die beyden gegebenen Punkte AB gehet. Da nun wegen des Zuſammenhangs aller Dreyecke, alle Winkel und Seiten am Umfange des Vielecks, als gegeben angeſehen werden können, ſo muß begreiflich die Diagonallinie AB durch dieſe Dinge können gefunden werden.

So könnte man z. E. bey dem Polygon Fig. 1044 leicht durch folgende Rechnung die Diagonale AB finden.

Man ſtelle ſich AC und BF verlängert vor. Sie durchſchneiden ſich bey M, und in dem Dreyecke CMF hat man die Seite CF, und die beyden Winkel MCF = 180° — ACF = 180° — ACD — DCE — ECF, und MFC = 180° — CFE — EFG — GFB; daraus findet ſich trigonometriſch CM und FM, und in dem Dreyecke AMB ſind nun bekannt der Winkel M, und die Seiten AM = AC + CM; BM = BF + FM; woraus ſich denn AB finden läßt.

2) Man könnte eben ſo z. E. AD und BG verlängert haben, und wenn man ſich nun DG gezogen vorſtellet, ſo könnte man in dem Dreyecke DEG, aus den bekannten Seiten DE, EG, und dem Winkel DEG, die Linie DG, und die Winkel EDG, EGD berechnen — daraus hätte man nun ferner in dem Dreyecke DGN, die Winkel CDN = 180° — ADC — CDE — EDG: und

und eben ſo auch den Winkel DGN. Daraus fänden ſich DN und GN und der Winkel N, und um AB zu finden, verführe man nun mit dem Dreyeck ANB, wie vorhin mit AMB.

S. Mayers praktiſche Geom. 3r Th. §. 367. 368.

4. Die drey folgenden Aufgaben können zur See vorkommen, wenn man die Entfernungen und die Lage der Felſen, Sandbänke u. ſ. f. von dem Ufer ausſucht; auch ſind ſie in vielen Fällen der Vermeſſung zur See ſehr nützlich, um eine Karte einer Gegend von einer Reihe von Dreyecken zu machen, welche von einer oder mehreren gemeſſenen Grundflächen genommen worden.

Erſte Aufgabe. Es ſey die Entfernung zweyer Gegenſtände A, B. Fig. 1069 und die Winkel ACD, ADB, BDC, BCA gegeben, man ſoll die Entfernung der zwey Stationen D, C von den Gegenſtänden A, B ſuchen.

Durch Verzeichnung. Man gebe dc eine Zahl nach Gefallen, und mache die Winkel bdc, adc u. ſ. f. jeden gleich den Winkeln BDC, ADC u. ſ. f. und verbinde ab; ſo ſiehet man daß dieſe Figur derjenigen verlangten ähnlich ſeyn müſſe; daher ziehet man AB Fig. 1068 gleich der gegebenen Entfernung, und mache ABC gleich abc, BAC gleich bac u. ſ. w.; man verbinde die Punkte, wo man denn die verlangten Entfernungen haben wird.

Durch Berechnung. In dem Dreyecke adc haben wir dc, adc und acd, um ad, ac zu finden, in bcd haben wir auf gleiche Art die drey Winkel und dc, um db, bc zu finden.

In dem Dreyecke adb haben wir ad, bd und den Winkel adb, um ab zu finden, daher vermöge der Natur ähnlicher Figuren:

wie ab zu AB = dc : DC
= ad : AD
= bd : BD
= bc : BC.

Zweyte Aufgabe. Die Entfernungen, dreyer Gegenſtände, A, B, C, von einander, und die Winkel ADC, CDE, CED, CEB Fig. 1070 ſind gegeben, man ſoll die Seiten AD, DC, DE, EC und EB ſuchen.

Man nehme eine Linie dc willkürlich, mache den Winkel cde gleich dem Winkel CDE, und den Winkel ced gleich dem Winkel CED; desgleichen den Winkel cda gleich dem Winkel CDA, und den Winkel ceb gleich dem Winkel CEB, man verlängere ad, bc, um einander in f zu ſchneiden, und verbinde cf.

Man ſiehet, daß die Figuren cdfe, CDFE ähnlich ſind: daher an AC. Fig. 1071 beſchreibe man ein Segment eines Cirkels, welcher einen Winkel AFC gleich afc enthalte; und an cb ein Segment, welches einen Winkel CFB gleich dem Winkel cfb faſſe; von dem Durchſchnittspunkte F ziehe man FA, FB, FC; man mache den Winkel FCD gleich dem Winkel fcd, und FCE gleich dem Winkel fce, wo man die Verzeichnung vollſtändig erhalten wird, nimmt man ſodann de gleich irgend einer Zahl, ſo kann alles übrige gefunden werden.

Dieſes Verfahren findet nicht ſtatt, wenn AD parallel mit BE Fig. 1072 iſt; daher, nach dem man die Segmente ADC, BC beſchrieben hat, ziehe man CF um ein Segment gleich dem Winkel CEG abzuſchneiden, G, F, wird in der geraden Linie DE ſeyn; daher verbinde man G, F, und verlängere die Li-

Linie auf beyden Seiten, bis ſie die Segmente ſchneidet, wo dann die Punkte DE die geſuchten Stationen ſeyn werden.

Dritte Aufgabe. Vier Punkte B, C, D, F, Fig. 1073 oder die vier Seiten einer vierſeitigen Figur, nebſt ihren Winkeln ſind gegeben, und die Winkel BAC, BAE, AED, DEF ſind aus Beobachtungen bekannt, man ſoll den Stationspunkt A, E und folglich die Länge der Linien AB, AC, ED, EF ſuchen.

Durch Verzeichnung. 1) An BC beſchreibe man das Segment eines Cirkels, um einen Winkel gleich BAC zu enthalten. 2) Von C ziehe man die Chorde CM, ſo daß der Winkel BCM gleich ſey dem Supplemente des Winkels BAE. 3) An DF beſchreibe man das Segment eines Cirkels, für einen Winkel gleich DEF; man verbinde MN, und ſchneide die zwey Cirkel bey A und E, den verlangten Punkten.

Durch Rechnung. In dem Dreyecke BCM ſind der Winkel BCM (das Supplement von BAE) und der Winkel BMC (gleich BAC), und die Seite BC gegeben, daher es denn leicht wird, MC zu ſuchen. Auf die nähmliche Art kann DN in dem Dreyecke DNF gefunden werden, allein der Winkel MCD (gleich dem Winkel BCD weniger dem Winkel BCM) iſt nebſt den Schenkeln MC, DC bekannt, folglich wird MD und der Winkel MDC ſogleich gefunden werden können.

Der Winkel MDN (gleich dem Winkel CDF weniger CDM weniger FDN) und MD, DN ſind bekannt, daher finden wir MN, und die Winkel DMN, DNM.

Der Winkel CMA (gleich DMC + DMN) der Winkel MAC (gleich MAB + BAC) und die Seite MC ſind gegeben; daher wird vermöge der Rechnung MA und AC gleichfalls bekannt ſeyn.

In dem Dreyecke EDN ſind die Seiten DN und die Winkel E und N gegeben; daher finden wir EN, ED, und folglich AE = MN — MA — EN.

Und in dem Dreyecke ABC ſind der Winkel A nebſt deſſen Seite BC, AC bekannt; daher werden denn AB und der Winkel BCA gefunden.

In dem Dreyecke EFD ſind der Winkel E nebſt den Seiten ED, DF bekannt, EF und der Winkel EDF wird alſo gefunden werden.

Endlich in dem Dreyecke ACD ſind der Winkel ACD (= BCD — BCA) und AC, CD gegeben; daher wird AD auf eben die Art gefunden wie EC in dem Dreyecke ECD.

In dieſer, ſo wie in der 1ſten und 2ten Aufgabe, wenn die zwey Stationen in einer geraden Linie, mit einem der gegebenen Gegenſtände fallen, wird die Aufgabe unbeſtimmt. Was die andern Fälle dieſer Aufgabe anbetrifft, ſo treffen ſie mit dem zuſammen, was bereits darüber erwähnt worden iſt.

Die Aufl. dieſer Aufgabe iſt allgemein, und kann für die zwey vorhergehenden gebraucht werden. denn man nehme CD den nähmlichen Punkt in der letzten Figur, ſo giebt er die zweyte Auflöſung; allein nimmt man B, C als die nähmlichen Punkte DF, ſo erhält man die Auflöſung der erſten Aufgabe. Man ſ. Vermeſſungen vermittelſt eines Vierecks.

5. Vermittelſt einer Standlinie auf dem Felde einen Punkt aufzunehmen, den man von keiner Stelle der Standlinie ſehen kann. Fig. 1074.

I) Von einem Punkte auf dem Felde A, kann man nach zwey andern B, D, ſehen aber nicht meſſen, auch kann man überhaupt nicht an B, D, kommen.

II) Eine Standlinie PQ, kann man meſſen, von jedem ihrer Endpunkte nach dem andern ſehen, auch nach B, D; aber nicht nach A.

III) Laſſen ſich hieraus die drey Punkte im Grund legen?

Beantwortung. 1) Wegen II hat man die Linie PQ, und die Winkel BPQ, DPQ, BQP, DQP; alſo die Figur BPDQ folglich auch die Linie BD und deren Lage gegen die Linien der genannten Figur.

2) Im Dreyecke DAB, weiß man den genannten Winkel (I) und die Seite ihm gegenüber (1).

3) Iſt von dieſem Dreyecke weiter nichts bekannt, ſo weiß man bloß des Punkts A geometriſchen Ort einen Bogen eines gegebenen Kreißes über der Sehne DB.

4) Dieſe Aufgabe erwähnt Joh. Fr. Werner, K. Pr. Landmeſſer: Erfahrungen vom Gebrauche der Magnetnadel, und wie vermittelſt derſelben am füglichſten eine Feldmeſſung angeſtellt. . . (Berlin 1778) 61 S. Er nennt ſie geometriſch unmöglich. Vermuthlich ſoll das heiſſen: Wenn man nichts weiter vornehmen will, als das bisher erzählte, ſey ſie unbeſtimmt.

5) Läßt ſich, ſeitwärts der Linie AB ein Stand annehmen, von dem man A und B ſehen, und bis A meſſen kann, ſo findet ſich AB als eine Weite an deren eines Ende man kommen kann. Oder auf eine ähnliche Art AD.

6) Und ſo einen Stand giebt es doch wohl für AB oder AD wenn nicht etwa A, B, D Gipfel von Bergen wären, und an A gleich hinab auf beyden Seiten das Erdreich ſich ſo ſenkte, daß man nach B und D nur von A hinſehen könnte.

7) Läßt ſich (5) anbringen, ſo iſt die Aufgabe beſtimmt, alſo würde Hr. W. ſie für geometriſch möglich erkennen.

8) Gebraucht man die Magnetnadel mit der Vorausſetzung: ſie bleibe immer ſich ſelbſt parallel, ſo giebt ſich folgendes. Wir nennen die Nordſpitze der Magnetnadel allemahl N.

9) Man bringe in Q die Magnetnadel. Ihre nordliche Hälfte macht mit QB den Winkel NQB. Den alſo die Beobachtung angiebt.

10) Nach B kann man nicht kommen, ſtellt man ſich aber dort eine Magnetnadel vor, ſo macht derſelben nordliche Hälfte mit BQ, den Winkel NBQ $= 180° - NQB$, den man alſo aus (9) berechnet.

11) Wegen der gegebenen Figur PBQD (1) iſt der Winkel DBQ bekannt.

12) Alſo weiß man (10) $NBD = 180° - NQB - QBD$.

13) Da man nach A kommen kann, ſo bringe man dahin auch die Magnetnadel und beobachte den Winkel NAB.

14) Daraus berechnet man $NBA = 180° - NAB$.

15) Folglich aus (14; 12) $NBA - NBD = ABD = NQB - NAB + QBD$.

16) So hat man nun im Dreyecke ABD, zwey Winkel an der Seite AB, und die Seite BD.

17) Die Figur nimmt A ſüdwärts des Punktes Q. Man entwirft ſich leicht die Figur für jede andere Lage.

18) Es iſt auch klar, daß was mit A gemacht iſt, ſich mit mehr Punkten machen läßt, an deren jeden man kommen, und nach B und D ſehen, aber nicht dahin meſſen kann. Daher nennt Werner, außerdem, den wir betrachten, noch einen.

19) Die Magnetnadel wird bloß als eine Linie angeſehn, die in unterſchiedne Punkte gebracht überall ſich ſelbſt parallel bleibt.

20) Gäbe es alſo einen ſehr weit entlegenen Ort, den man von Q und A ſehen könnte, ſo ließen ſich dahin gezogne Linien QN, AN, BN für parallel annehmen, und gäben eben die Schlüſſe die von der Magnetnadel ſind gemacht worden.

21) Auch Mittagslinien durch mehr Punkte laſſen ſich parallel annehmen, wenn die Punkte ſo nahe beyſammen ſind, daß ihre Entfernung von einander für gerade Linien dürfen angenommen werden.

So ließe ſich die Aufgabe auch durch Mittagslinien in Q, A auflöſen. M. ſ. Mittagslinie.

Käſtners geometr. Abh. 1. Saml. Nr. 47. S. 368.

6. Der Thurm ED Fig. 1309 ſtehet auf der Fläche, in der die gerade Linie AC gezogen worden, perpendikulär. Die Winkel, unter denen man den Thurm, aus den 3 Punkten A, B C ſiehet, werden gegeben. Man ſoll die Entfernung des Thurms von jedem Punkte beſtimmen.

Auflöſung. Weil die Entfernung der Punkte gegeben wird, ſo ſey AB = a; BC = b und die Entfernung BE = x. Da auch die Winkel DAE, DBE, DCE gegeben werden, ſo ſey m = Tang DAE; n = Tang DBE; und p = Tang DCE. Weil nun alle Dreyecke DBE, DAE DCE rechtwinklicht ſind, ſo wird wenn der Radius 1 angenommen wird

$$1 : tg\ DAE = EA : DE \text{ oder } 1 : m = EA : DE$$
$$1 : tg\ DBE = EB : DE = 1 : n = x : DE$$
$$1 : tg\ DCE = EC : DE = 1 : p = EC : DE$$

Es iſt alſo $m. EA = nx$, folglich $EA = \frac{nx}{m}$

$$p. EC = nx = EC = \frac{nx}{p}.$$

Ferner iſt in dem Dreyeck EBA $Cof\ EBA = \frac{BA^2 + BE^2 - EA^2}{2BE. AB}$

$$\text{oder } Cof\ EBE = \frac{a^2 + x^2 - \frac{n^2x^2}{m^2}}{2ax}$$

In dem Dreyeck EBC iſt ebenfalls

$$Cof\ EBC = \frac{BC^2 + BE^2 - CE^2}{2BC. BE}$$

$$\text{oder } Cof\ EBC = \frac{b^2 + x^2 - \frac{n^2x^2}{p^2}}{2bx}.$$

Weil nun die beyden Winkel EBA, EBC zuſammen genommen, zween rechten Winkeln gleich ſind, ſo iſt einer das Supplement des andern, folglich ſind ihre Coſinus einander gleich, aber entgegen geſetzt. Es iſt demnach

$$\frac{a^2 + x^2 - \frac{n^2x^2}{m^2}}{2ax} = \frac{-b^2 - x^2 + \frac{n^2x^2}{p^2}}{2bx}$$

folg-

folglich $a^2b + bx^2 - \frac{bn^2x^2}{m^2} = - ab^2 - ax^2 + \frac{an^2x^2}{p^2}$

wenn man nun die ganze Gleichung mit m^2p^2 multiplicirt ſo wird

$p^2m^2a^2b + p^2m^2bx^2 - bp^2n^2x^2 = - p^2m^2ab^2 - ap^2m^2x^2 + am^2n^2x^2$

folglich

$(m^2p^2b - n^2p^2b)x^2 - (am^2n^2 - am^2p^2)x^2 = ab^2p^2m^2 + a^2bp^2m^2$

und $x^2 = \frac{(ab^2 + a^2b)\, p^2m^2}{m^2p^2b - n^2p^2b - am^2n^2 + am^2p^2}$

oder $x^2 = \frac{(ab^2 + a^2b)\, p^2m^2}{(m^2 - n^2)\, p^2b + (p^2 - n^2)\, am^2}$

und $x = \mp pm \sqrt{\left(\frac{ab^2 + a^2b}{(m^2 - n^2)\, p^2b + (p^2 - n^2)\, am^2}\right)}$.

Tempelhof Analyſis endl: Gröſſen. 290.

7. Der Thurm DE ſtehet auf der Fläche, in der ſich der Triangel ABC Fig. 1308 befindet, perpendikular. Man weiß die Winkel, unter denen der Thurm in den Punkten A, B, C erſcheint, man weiß ferner die Entfernungen der Punkte A, B, C von einander, und man will die Entfernung des Thurms von einem jeden Punkte wiſſen.

Aufloͤſung. Da die Winkel bekannt ſind, unter denen man den Thurm in A, B, C ſiehet, ſo ſind auch die Tangenten derſelben bekannt. Es ſey alſo der Tangente des Winkels DAE = m; des Winkels DBE = n; des Winkels DCE = p; es ſey ferner die Linie AC = a.

Nun iſt offenbar, daß man die Entfernung des Punkts D, von den gegebenen Punkten wiſſen würde, ſo bald man wüſte, wie weit derſelbe von der gegebenen Linie AC entfernt iſt.

Man ziehe alſo von D auf AC die Linie DF perpendikulär, und nenne AF = x, und FD = y ſo bald man nun dieſe beyden Linien beſtimmen kann, ſo weiß man auch die Entfernungen des Punktes D von den gegebenen Punkten A, B, C.

Es iſt aber AD : DE = 1 : tg DAE = 1 : m

und BD : DE = 1 : tg DBE = 1 : n

und CD : DE = 1 : tg DCE = 1 : p

Alſo iſt AD : BD = n : m und AD : DC = p : m.

Es iſt alſo das Verhältniß der Entfernungen gegeben.

Man ziehe von B auf AC die Linie BG perpendikulär, ſo wird dieſelbe, da alle Seiten des Dreyecks ABC bekannt ſind, gegeben. Man ſetze alſo BG = b, und AG = c.

Es iſt aber $AD^2 = AF^2 + FD^2 = x^2 + y^2$, und da FC = a − x, ſo wird $CD^2 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2$. Ferner wenn man BH auf die verlängerte DF perpendikulär ziehet, ſo wird BH = GF, und BG = HF = b, folglich HD = y + b.

Nun iſt AD : CD = p : m = $\sqrt{(x^2 + y^2)} : \sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + y^2)}$ man nehme die Quadrate von allen Gliedern der Proportion und multiplicire die äußerſten und mittelſten, ſo wird

$\frac{m^2x^2 + m^2y^2}{p^2} = a^2 - 2ax + x^2 + y^2$

 und

und $\frac{m^2x^2 - p^2x^2 + m^2y^2 - p^2y^2}{p^2} = a^2 - 2ax.$

Es iſt ferner $BD^2 = HB^2 + HD^2 = (AF - AG)^2 + HD^2 = (x - c)^2 + (y + b)^2$, oder $BD^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 2by + b^2$.

Da nun auch $AD : DB = n : m = \sqrt{(x^2 + y^2)} : \sqrt{(x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 2by + b^2)}$
und man quadrirt alle Glieder, und multiplicirt hernach die äußerſten und mittelſten, ſo wird

$$\frac{m^2x^2 + m^2y^2}{n^2} = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 2by + b^2$$

oder $\frac{m^2x^2 - n^2x^2 + m^2y^2 - n^2y^2}{n^2} = c^2 - 2cx + 2by + b^2.$

Man ſetze der Bequemlichkeit wegen

$$\frac{m^2 - p^2}{p^2} = \alpha, \quad \frac{m^2 - n^2}{n^2} = \beta; \; c^2 + b^2 = \gamma$$

ſo wird

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 - a^2 + 2ax = 0$$
$$\beta x^2 + \beta y^2 - \gamma + 2cx - 2by = 0.$$

Von dieſen letztren multiplicire man die erſtere mit β, und die zweyte mit α, ſubtrahire die erſte von der zweyten ſo wird

$a^2\beta - \gamma\alpha + (2c\alpha - 2a\beta)\,x - 2b\alpha y = 0$

ſetzt man nun ferner zu mehrer Kürze

$$\frac{a^2\beta - \gamma\alpha}{2b\alpha} = \delta; \quad \frac{c\alpha - a\beta}{b\alpha} = \varepsilon$$

ſo wird $y = \delta + \varepsilon x$.

Das Quadrat von dieſem gefundenen Werthe ſetze man in der Gleichung $\alpha x^2 + \alpha y^2 = a^2 - 2ax$,
ſo wird $\alpha x^2 + \varepsilon^2\alpha x^2 + 2\delta\varepsilon\alpha x + \delta^2\alpha = a^2 - 2ax$
und $(\alpha + \varepsilon^2\alpha)\,x^2 + (2\delta\varepsilon\alpha + 2a)\,x + \delta^2\alpha - a^2 = 0$
und wenn alles mit $\alpha + \varepsilon^2\alpha$ dividirt, ſo bekommt man

$$x^2 + \frac{(2\delta\varepsilon\alpha + 2a)\,x}{\alpha + \varepsilon^2\alpha} + \frac{\delta^2\alpha - a^2}{\alpha + \varepsilon^2\alpha} = 0.$$

Nun ſuche man vor allen Dingen den Werth von $\frac{m^2 - p^2}{p^2} = \alpha$;
$\frac{m^2 - n^2}{n^2} = \beta$; $b^2 + c^2 = \gamma$; $\frac{a^2\beta - a\gamma}{2b\alpha} = \delta$; $\frac{c\alpha - a\beta}{b\alpha} = \varepsilon$;
$\frac{\delta\varepsilon\alpha - a}{\alpha + \varepsilon^2\alpha} = P$ und $\frac{\delta^2\alpha - a^2}{\alpha + \varepsilon^2\alpha} = Q$; damit man die Gleichung

$$x^2 + 2Px + Q = 0$$

bekommt, aus der man

$$x = -P \pm \sqrt{(P^2 - Q)}$$

findet. Hat man den Werth von x gefunden, ſo findet man auch den Werth von y aus der Gleichung $\delta + \varepsilon x$, und aus dieſen beyden gefundenen Größen die Entfernung $AD = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, woraus man nachgehends die übrigen Linien BD, CD erhält.

Tempelhof. Analy. endlicher Größen 281.

Die

8. Die vier Punkte A, B, C, D liegen in einer geraden Linie. Man weiß wie weit A von B entfernt, desgleichen wie weit C von D iſt. Allein die Entfernung der mittelſten Punkte C und D weiß man nicht. Aus einem gewiſſen Punkte E aber kann man die vier Punkte A, B, C, D ſehen, und daſelbſt die Winkel AEB, AEC, AED Fig. 132. meſſen. Man ſoll nun die Länge der Linie AD beſtimmen.

Auflöſung. Weil der mittelſte Theil CB der geraden Linie AD unbekannt iſt, ſo kann derſelbe nicht anders gefunden werden, als wenn man in dem Triangel AEC eine Seite und zwey Winkel, oder andere drey Stücke weiß, welche zur Beſtimmung eines Triangels erfordert werden. Man muß daher dieſes aus den gegebenen Stücken zu bekommen ſuchen.

Nun iſt in dem Triangel AEB der Winkel AEB und die Seite AB bekannt. Es wird alſo nur noch erfordert, daß man den Winkel EAB weiß, und ſobald dieſer bekannt iſt, ſo wird das übrige leicht gefunden. Die ganze Aufgabe kommt alſo darauf an, den Triangel AEB erſt völlig zu beſtimmen. In dieſer Abſicht ſey AB = m, CD = n. Der Winkel AEB = a, AEC = b, AED = c. Man ziehe von E auf AD die Linie EP perpendikulär, und ſetze AEP = x, ſo wird hieraus AEP = x — a, CEP = b — x, DEP = c — x.

Es iſt alſo 1) EP : AP = 1 : Tang x, folglich AP = EP. Tang x.

2) EP : BP = 1 : Tang (x — a), und alſo BP = EP. Tang (x — a).

3) EP : CP = 1 : Tang (b — x), und CP = EP. Tang (b — x).

4) EP : PD = 1 : Tang (c — x), und PD = EP. Tang (c — x).

Hieraus bekommt man AB = AP — BP = EP (Tang x — Tang (x — a)); CD = PD — PC = EP (Tang (c — x) — Tang (b — x)). Alſo AB : CD = m : n = EP (Tang x — Tang (x — a)) : EP (Tang (c — x) — Tang (b — x)), oder m : n = Tang x — Tang (x — a) : Tang (c — x) — Tang (b — x). Es iſt aber $\text{Tang}\,(x - a) = \frac{\text{Tang}\,x - \text{Tang}\,a}{1 + \text{Tang}\,x.\,\text{Tang}\,a}$

$$\text{Tang}\,(c - x) = \frac{\text{Tang}\,c - \text{Tang}\,x}{1 + \text{Tang}\,c.\,\text{Tang}\,x}$$

$$\text{Tang}\,(b - x) = \frac{\text{Tang}\,b - \text{Tang}\,x}{1 + \text{Tang}\,b.\,\text{Tang}\,x}$$

folglich $\text{Tang}\,x - \text{Tang}\,(x - a) = \text{Tang}\,x - \frac{\text{Tang}\,x - \text{Tang}\,a}{1 + \text{Tang}\,x\,\text{Tang}\,a}$

$$= \frac{\text{Tang}\,x + \text{Tang}\,x^2\,\text{Tang}\,a - \text{Tang}\,x + \text{Tang}\,a}{1 + \text{Tang}\,a\,\text{Tang}\,x}$$

$= \frac{\text{Tang}\,a\,(1 + \text{Tang}\,x^2)}{1 + \text{Tang}\,a\,\text{Tang}\,x}$. Und da $1 + \text{Tang}\,x^2 = \text{Sec}\,x^2$

ſo wird $\text{Tang}\,x - \text{Tang}\,(x - a) = \frac{\text{Tang}\,a.\,\text{Sec}\,x^2}{1 + \text{Tang}\,a.\,\text{Tang}\,x}$.

Eben ſo wird

$$\text{Tang}\,(c - x) - \text{Tang}\,(b - x) = \frac{\text{Tang}\,c - \text{Tang}\,x}{1 + \text{Tang}\,c.\,\text{Tang}\,x}$$

$- \frac{(\text{Tang}\,b - \text{Tang}\,x)}{1 + \text{Tang}\,b.\,\text{Tang}\,x} = (\text{Tang}\,c + \text{Tang}\,c.\,\text{Tang}\,b$

$\text{Tang}\,x - \text{Tang}\,x - \text{Tang}\,b.\,\text{Tang}\,x^2 - \text{Tang}\,b - \text{Tang}\,b.\,\text{Tang}\,c.$

Tang

$\text{Tang } x + \text{Tang } c. \text{Tang } x^2 + \text{Tang } x) : (1 + \text{Tang } c. \text{Tang } x)\ (1 +$

$$\text{Tang } b. \text{Tang } x) = \frac{(\text{Tang } c - \text{Tang } b)(1 + \text{Tang } x^2)}{(1 + \text{Tang } c. \text{Tang } x)(1 + \text{Tang } b. \text{Tang } x)}$$

$$= \frac{(\text{Tang } c - \text{Tang } b) \text{ Sec } x^2}{(1 + \text{Tang } c. \text{Tang } x)\ (1 + \text{Tang } b. \text{Tang } x}.$$

Wenn man nun gehörig ſubſtituirt, ſo wird

$$m : n = \frac{\text{Tang } a. \text{Sec } x^2 : (\text{Tang } c - \text{Tang } b) \text{ Sec } x^2}{1 + \text{Tang } a. \text{Tang } x (1 + \text{Tang } c. \text{Tang } x)(1 + \text{Tang } b. \text{Tang } x)}$$

$= \text{Tang } a. (1 + \text{Tang } c. \text{Tang } x)\ (1 + \text{Tang } b\ \text{Tang } x) : (\text{Tang } c - \text{Tang } b)\ (1 + \text{Tang } a. \text{Tang } x)$, indem man dieſe Proportion dadurch verändert, daß man jedes Glied durch das Produkt aus den Nennern multiplicirt. Es iſt alſo auch

$(\text{Tang } c - \text{Tang } b)\ (1 + \text{Tang } a. \text{Tang } x)\ m = n \text{ Tang } a\ (1 + \text{Tang } c. \text{Tang } x)\ (1 + \text{Tang } b. \text{Tang } x)$; oder indem man wirklich multiplicirt, $n. \text{Tang } a. \text{Tang } b. \text{Tang } c. (\text{Tang } x)^2 + n. \text{Tang } a. \text{Tang } c. \text{Tang } x + n. \text{Tang } a. \text{Tang } b. \text{Tang } x + n. \text{Tang } a = m. (\text{Tang } c. - \text{Tang } b) + m. \text{Tang } a. \text{Tang } x\ (\text{Tang } c. - \text{Tang } b.)$ Hieraus wird

$\text{Tang } x^2\ (n. \text{Tang } a. \text{Tang } b. \text{Tang } c) + (\text{Tang } a\ (n. \text{Tang } c + n. \text{Tang } b + m. (\text{Tang } b - \text{Tang } c))\ \text{Tang } x = m. \text{Tang } c - m. \text{Tang } b - n. \text{Tang } a$, oder wenn man mit $n. \text{Tang } a. \text{Tang } b. \text{Tang } c$ dividirt, und ver $\frac{1}{\text{Tang}}$, Cot ſetzet, ſo wird $\text{Tang } x^2 + \text{Tang } x\ (\text{Cot } b + \text{Cot } c + \frac{m}{n} (\text{Cot } b - \text{Cot } b)) = \frac{m}{n} (\text{Cot } b - \text{Cot } c) \text{ Cot } a - \text{Cot } b. \text{Cot } c$. Aus dieſer Gleichung findet man den Werth der Tangente des Winkels x nach den bekannten Regeln, welche die Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen anzeigen. Man ſetze nähmlich $\text{Cot } b + \text{Cot } c + \frac{m}{n} (\text{Cot } c - \text{Cot } b) = P$; $\frac{m}{n} (\text{Cot } b - \text{Cot } c) \text{ Cot } a - \text{Cot } b. \text{Cot } c = Q$: ſo hat man $\text{Tang } x + P \text{ Tang } x = Q$ und $\text{Tang } x = -\frac{1}{2}P + \sqrt{(\frac{PP}{4} + Q)}$. Da man nun hieraus den Winkel AEP durch die bekannte Tangente findet, ſo iſt auch der Winkel EAB, und alſo in dem Triangel AEB die Seite AB und die Winkel, folglich alles, bekannt, und dadurch findet man die Länge AD nach den gewöhnlichen trigonometriſchen Regeln.

Anmerkung. Dieſe letzte Gleichung giebt für Tang x zwey Werthe an, und es muß aus beſondern Umſtänden ausgemacht werden, welcher derjenige iſt, der die Aufgabe ſo auflöſet, wie ſie vorgetragen worden. Indeſſen iſt dabey auch weiter keine Schwierigkeit, denn die Linien AD können auch Fig 1323 die Lage B′C′ haben, ſo, daß die Theile AB′, C′D′, die zwiſchen die Schenkel der gegebenen Winkel AEB, CED fallen, eben das Verhältniß gegen einander haben. Daher kann einmal x den Winkel AEP und das anderemal den Winkel AEP′ bedeuten. Denn der Winkel AEP wird durch eben die Gleichungen, und durch die übrige Schlüſſe beſtimmt, welche wie vorhero gemacht haben. Daher iſt der Werth des Winkels x = AEP, leicht von dem

dem Werth $x = AEP'$ zu unterſcheiden. Der poſitive Werth, der für Tang x aus der Gleichung kommt, iſt allezeit derjenige, welcher die Aufgabe ſo auflöſet, wie ſie vorgetragen worden.

Um hiervon ein Beyſpiel zu geben, ſey der Winkel $AEB = 15° = a$, $AEC = 60° = b$, $AED = 80° = c$, $m = 7,8$ Ruthen, $n = 46$ Ruthen, ſo wird $\frac{m}{n} = \frac{7,8}{46} = \frac{3,9}{23} = 0,17$.

Ferner $\text{Cot } 60° = 0,57735 = \text{Cot } b$

$\text{Cot } 80° = 0,17632 = \text{Cot } c$

und $\text{Cot } b + \text{Cot } c = 0,75367$

$\text{Cot } c - \text{Cot } b = -0,40103$

$\frac{m}{n} (\text{Cot } c - \text{Cot } b) = -0,068176$

folglich $P = 0,68550$

$\frac{m}{n} (\text{Cot } b - \text{Cot } c) \text{ Cot } a = 0,06817 \times 3,73205 = 0,25441$. Ferner $\text{Cot } b \text{ Cot } c = \text{Cot } 60° \times \text{Cot } 80° = 0,10169$, folglich $Q = 0,15272$. Und $\frac{1}{4}PP + Q = (0,34275)^2 + 0,15272 = 0,27027$, und $\sqrt{(\frac{PP}{4} + Q)} = \sqrt{0,27020} = 0,51980$. Und alſo $-\frac{1}{2}P + \sqrt{(\frac{PP}{4} + Q)} = -0,34275 + 0,51980 = 0,17711$. Schlägt man nun in den Sinustafeln nach, ſo findet ſich, daß dieſe Zahl, die Tangente des Winkels 10° 2′ iſt, oder des Winkels 10°, wenn man es nicht ſehr genau nimmt. Es iſt alſo der Winkel $AEP = 10°$, folglich der Winkel $EAP = 180° - 10° - 90° = 80°$. Folglich da $AEB = 15°$ iſt, ſo wird $EBA = 85°$. Ferner, da $AEC = 60°$ iſt, ſo wird $ACE = 40°$. Nun iſt $AB : AE = \text{ſin } 15° : \text{ſin } 85°$. Folglich $\text{Log } AE = \text{Log } AB + \text{Log ſin } 85° - \text{Log ſin } 15°$, und alſo $\text{Log } AE = 0,8920946 + 9,9983442 - 9,4129962 = 1,4774426$. Dieſer Logarithmus gehört zu der Zahl 30, folglich iſt $AE = 30$ Ruthen. Nachdem alſo AE gefunden worden, ſo iſt wieder $AE : AC = \text{ſin } ACE : \text{ſin } AEC = \text{ſin } 40° : \text{ſin } 60°$, folglich $\text{Log } AC = \text{Log } AE + \text{Log ſin } 60° - \text{Log ſin } 40°$

$= 1,4774426$
$\underline{9,9375306}$
$11,4149732$
$\underline{9,8080675}$

$\text{Log } AC = 1,6069057$, und $AC = 40,45$ Ruthen.

Tempelhof l. c. 490.

Entfernungen eines vierten Orts von 3 bekannten Oertern zu finden, die man alle drey aus dem vierten Orte ſehen kann.

I. Es iſt die Lage dreyer Oerter bekannt, die Lage eines 4ten Ortes zu finden.

Nach Herrn Lambert Beyträge 1 B. S. 73.

1. Aufgabe. Es ſeyn die drey Oerter A, B, C Fig. 1096 von gegebener Lage, und man obſervire in D die beyden Winkel ADB, BDC; die Lage des Orts D zu finden.

Man bringe über D Fig 1101 als dem Standpunkte das Meßtiſchchen und beſtimme auf demſelben den Punkt d, lothrecht über D. Aus d ziehet man auf dem Papiere nach den Objekten A, B, C die Richtungslinien dα, dβ, dγ. Nun ſeyen OE, OF ein paar Lineale dergeſtalt mit einander verbunden, daß ſie, wie die Figur ausweiſet, um eine Axe bey O, ohngefähr wie die Schenkel eines Cirkels, um ihren Kopf beweglich ſind, und durch eine Schraube nach Gefallen in jeder Oeffnung feſt gehalten werden können.

Beyde Lineale OE, OF, ſeyen bey i, k, mit ein paar Hülſen verſehen, an denen ſich ſehr ſcharfe ſtählerne Spitzen oder Stifte a, c befinden, welche ſich zugleich mit den Hülſen, längſt den Linealen verſchieben laſſen. Unter dem Umdrehungspunkte O, befindet ſich eine dritte dergleichen Spitze b. So ſtellet alſo dieſes Werkzeug gleichſam einen dreyſpitzigen Stangencirkel vor, und durch gehörige Verſchiebung der Hülſen ſowohl als auch durch gehörige Oeffnung der beyden Lineale wird man machen können, daß zwiſchen den drey Spitzen, a, b, c ein beliebiges Dreyeck enthalten iſt. Um nun dieſes Werkzeug zur gegenwärtigen Abſicht zu gebrauchen, ſo faſſe man auf einem verjüngten Maßſtabe zwiſchen die drey Spitzen a, b, c, die drey Seiten des Dreyecks ABC, ſo daß die Weiten ab, bc, cd, denen AB, BC, CD gemäß werden. Setze nun den Stangencirkel auf die gezogenen Richtungslinien dα, dβ, dγ, dergeſtalt, daß jede Spitze a, b, c auf die entſprechende Richtungslinie dα, dβ, dγ zu ſtehen kommt, mithin das kleine Dreyeck abc auf dem Meßtiſche gegen den Punkt d eben die Lage bekomme, die das Dreyeck ABC gegen D hat, ſo wird man auf dem Meßtiſche die Weiten da, db, dc erhalten, welche, nach dem verjüngten Maßſtabe, denen DA, DB, DC gemäß ſeyn werden.

Weil die Entfernungen da, db, dc, ab, bc, denen DA, DB, DC, AB, BC gemäß ſind, weil folglich in den Dreyecken dab, DAB, da : ab = DA : AB, und in den Dreyecken dbc, DBC, dc : cb = DC : CB, ſo ſind die Seiten ab mit AB und bc mit BC, und auf eben die Art ac mit AC parallel.

Anmerk. Bey Auflöſung der bisherigen Aufgabe ſiehet man den lothrecht über D liegenden Punkt d auf dem Meßtiſche als gegeben an, und beſtimmet die Weiten da, db, dc, dadurch, daß man dem ganzen Dreyecke abc ſeine gehörige Lage gegen d giebt. Die Auflöſung würde aber ganz anders ausfallen, wenn das Dreyeck auf dem Meßtiſche bereits vorgezeichnet wäre, und der Punkt d geſucht werden ſollte. In dieſem Falle würde offenbar Herrn Branders Auflöſung einiger Abänderung bedürfen. Indeſſen iſt aber die letztere Frage ungleich wichtiger bey Entwerfung der Landſchaften. Wenn es blos darum zu thun iſt, die Weiten DA, DB, DC auf dem Felde zu beſtimmen, ſo kann man nach Hrn. Branders Art verfahren; wenn aber A, B, C drey Oerter auf dem Felde ſind, die man bereits durch a, b, c, auf dem Meßtiſche entworfen hat, und ſoll nun den Standort des Meßtiſches D, durch den Punkt d auf dem Meßtiſche angeben, ſo daß d gegen die bereits verzeichneten Punkte a, b, c eben die Lage bekömmt, die D gegen A, B, C hat, ſo muß man offenbar auf eine andere Auflöſung bedacht ſeyn.

Man ſiehet leicht, daß in dem letzten Falle die Hauptſache darauf ankomme, den Meßtiſch ſo zu ſtellen, daß die Seiten ab, bc, ca, mit den zugehörigen AB, BC, AC eine parallele Lage erhalten, denn unter ſolchen Umſtänden darf man nur an die Punkte a, b, c die dioptriſche Regel legen, nach den

den Objekten A, B, C viſiren, und die Richtungslinien αa, βb, γc, rückwärts verlängern, ſo werden ſie ſich insgeſamt auf dem Meßtiſche, bey d durchſchneiden, und ſolchergeſtalt den verlangten Punkt d angeben, der gegen a, b, c, dieſelbe Lage haben wird, die D gegen A, B, C hat.

In der bisherigen Aufgabe liegen die drey Punkte ABC nicht in einer geraden Linie, ſie können aber auch wie in der 1102 Figur, in einer geraden Linie liegen, und ſo iſt dieſes alsdann ein beſonderer Fall der allgemeinen Auflöſung in (II. 3. 4.) Es iſt alsdann der dortige Winkel β hier 180°, und der geſuchte Winkel x hier der DAC.

Der Ingenieur François, welcher 1695 zu Paris in 8 herausgekommen, ſaget, daß dieſe Aufgabe in des Herrn Fleury de Fremicourt, Profeſſeur de Mathematiques, und zwar in den Leçons gratuites enthalten ſey.

Dieſe Aufgabe iſt eine von den wichtigſten in der praktiſchen Geometrie, und vorzüglich denen zu empfehlen, die ſich mit der Ausmeſſung eines großen Diſtrikts beſchäftigen.

Schickard ſcheint dieſe Aufgabe zuerſt bey wirklichen Meſſungen angewändt zu haben, die er zur Berichtigung der Geographie von Würtenberg anſtellte. Epiſt. Keppler edit. Hanſch p. 686.

IV. In Adams geometriſchen und graphiſchen Verſuchen. S. 201 wird die Auflöſung dieſer Aufgabe alſo vorgetragen:

Der 4te Punkt iſt entweder außerhalb oder innerhalb dem gegebenen Dreyecke, oder in der Richtung zweyer Punkte des Dreyecks.

Erſter Fall. Wenn die drey gegebenen Gegenſtände ein Dreyeck machen, und der Punkt oder die Station, deren Lage geſucht wird, iſt außerhalb dem Dreyecke.

Beyſpiel. Man will die Lage eines Felſens D. Fig 1103 von dem Ufer aus beſtimmen; die Entfernungen der drey Punkte A, B, C oder vielmehr die drey Seiten AC, CB, AB, des Dreyecks ſind gegeben.

Zuerſt müſſen die Winkel ADC, CDB vermöge eines Inſtruments gemeſſen werden, worauf denn die Lage des Punktes D entweder durch Rechnung oder durch Verzeichnung leicht gefunden werden kann.

Durch Verzeichnung. Erſtes Verfahren. An AC Fig 1104 beſchreibe man einen Cirkel, welcher einen Winkel faſſen kann, der dem Winkel ADC gleich iſt; an CB ein Segment, das einen Winkel enthält, der dem Winkel CDB gleich iſt; der Durchſchnittspunkt D iſt der verlangte Ort.

Ein anderes Verfahren. Man mache den Winkel EBA Fig 1105 gleich dem Winkel ADE, und den Winkel BAE gleich dem Winkel EDB. Durch A, B, und durch die Interſektion E beſchreibe man einen Cirkel AEBDA; durch E, C ziehe man EC, und verlängere ſie, um den Cirkel bey D zu ſchneiden; man verbinde AD, BD, und die Entfernungen AD, CD, BD werden die verlangten Entfernungen ſeyn.

Durch Berechnung. In dem Dreyecke ABC ſind die drey Seiten gegeben, man ſoll den Winkel BAC finden. In dem Dreyecke AEB ſind der Winkel BAE, die Winkel ABE, AEB und die Seite AB gegeben, man ſoll AE und BE ſuchen.

In dem Dreyecke AED haben wir die Seite AE und die Winkel AED, ADE, und folglich DAE, man ſoll die Seite AD ſuchen.

Der

$$\text{folglich } \frac{b.\,\sin x}{\sin\delta} = \frac{c\,\sin(\mu - x)}{\sin\varepsilon}$$

$$\text{und } \frac{b\,\sin\varepsilon}{c.\,\sin\delta} = \frac{\sin(\mu - x)}{\sin x}.$$

$$\text{Nun iſt } \frac{\sin(\mu - x)}{\sin x} = \frac{\sin\mu\cos x - \sin x\cos\mu}{\sin x} = \sin\mu\cot x - \cos\mu$$

$$\text{alſo iſt } \cos\mu + \frac{b\,\sin\varepsilon}{c\,\sin\delta} = \sin\mu\cot x.$$

$$\text{Mithin wegen } \frac{\cos\mu}{\sin\mu} = \cot\mu \text{ der Werth von}$$

$$\cot x = \cot\mu + \frac{b.\,\sin\varepsilon}{c.\,\sin\delta.\,\sin\mu}.$$

5. Iſt nun auf ſolche Art der Winkel x gefunden, ſo hat man aus (4) auch die Weite BD, und in den Dreyecken ABD, BCD iſt genug bekannt, um die Seiten AD, CD durch Rechnung zu finden.

6. Bey Berechnung der Cotangente des Winkels x iſt zu bemerken, daß alle trigonometriſche Linien für den ſinus totus = 1 genommen werden müſſen, und wenn für cot x ein negativer Werth heraus kommt, ſo zeiget dies an, daß der Winkel x ſtumpf ſey. Man ſuche alſo in ſolchem Falle einen ſpitzigen Winkel, deſſen Tangente eben den bejahten Werth hat, addire zu dieſem Winkel 90°, ſo hat man den eigentlichen ſtumpfen Winkel x.

Ex. Es ſey $\beta = 115°$; $\delta = 25°$; $\varepsilon = 45°$; b = 1112 Fuß, c = 2000 Fuß, ſo wird $\mu = 175°$ mithin

$$\begin{aligned}
\log b &= 3{,}0461048 \\
\log\sin\varepsilon &= 9{,}8494850 - 10 \\
\hline
\log b.\,\sin\varepsilon &= 2{,}8955898
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ferner } \log c &= 3{,}3010300 \\
\log\sin\delta &= 9{,}6259483 - 10 \\
\log\sin\mu &= 8{,}9402960 - 10 \\
\hline
\log c\sin\delta.\sin\mu &= 1{,}8672743;
\end{aligned}$$

$$\text{daher } \log\frac{b.\,\sin\varepsilon}{c.\sin\delta.\,\sin\mu} = 1{,}0283155$$

$$\text{welches die Größe } \frac{b.\,\sin\varepsilon}{c.\,\sin\delta.\sin\mu} = 10{,}67371 \text{ giebt.}$$

Nun iſt $\cot\mu = \cot 175° = \cot(90° + 85°) = -\tan 85° = -11{,}43005$. Dies giebt demnach $\cot x = -11{,}43005 + 10{,}67371 = -0{,}75634$.

Da alſo hier cot x verneint wird, ſo iſt x ſtumpf.

Man ſuche alſo einen ſpitzigen Winkel, deſſen Tangente 0,75634 iſt. Man findet ihn in den Tafeln = 37°6′ addire 90° dazu, ſo wird x = 127°6′.

Die Berechnung der Seiten AD, BD, CD iſt nicht nöthig hier vorzunehmen, denn ſie iſt, nachdem man den Winkel ABD, DBC, BCD gefunden hat, nach den Proportionen

$\sin\delta : b = \sin x : BD$

$\sin\delta : b = \sin ABD : AD$, wo $ABD = 180° - x - \delta$ u. ſ. w. gar leicht durch Logarithmen anzuſtellen.

7. So

7. So kann man, indem man bloß an dem Standpunkte D die zwey Winkel δ, ε, mißt, leicht die Weiten AD, BD, DC durch Rechnung, ſo genau man will, finden. Man kann aber, wenn es um keine große Schärfe zu thun iſt, die Weiten AD, BD, DC durch eine geometriſche Conſtruktion finden.

Nachdem man in Fig 1099 ein Dreyeck abc auf dem Papier beſchrieben hat, welches dem ABC auf dem Felde ähnlich iſt, ſo beſchreibe man ferner über der Seite ac einen Kreiß, dergeſtalt, daß ac die Chorde eines Bogens amc werde, der doppelt ſo groß iſt, als das Maß des auf dem Felde obſervirten Winkels ADC. Nehme hierauf von a bis m die Chorde eines Bogens am, der doppelt ſo groß iſt, als der auf dem Felde beobachtete Winkel ADB, ziehe durch m, b, eine gerade Linie mbd, ſo wird dieſe bey d, im Umfange des Kreiſes einen Punkt beſtimmen, der gegen die Punkte a, b, c eben ſo lieget, wie D auf dem Felde, in Abſicht der Oerter A, B, C und die Weiten ad, bd, dc, werden denen AB, BD, DC auf dem Felde gemäß ſeyn.

Beweis. Denn weil der Winkel adc am Umkreiſe zu ſeinem Maße den halben Bogen amc hat, und der Bogen amc doppelt ſo viel Grade ꝛc. hält, als der Winkel DC auf dem Felde, ſo iſt klar, daß der Winkel adc = ADC ſeyn müſſe.

Auf eben die Art iſt auch der Winkel adb vermöge der Conſtruktion = ADB. Es muß alſo der Punkt d gegen die drey a, b, c nothwendig eben die Lage haben, welche D gegen A, B, C hat, weil durch das Dreyeck abc, und die beyden Winkel adb, adc der Punkt d völlig ſo beſtimmt iſt, als wie es D vermöge des Dreyecks ABC, und der beyden Winkel ADB, ADC iſt.

Mithin müſſen die Weiten ad, bd, cd nach dem verjüngten Maßſtabe, womit man das Dreyeck abc aufgetragen hat, denen AD, BD, CD gemäß ſeyn.

8. Wegen der Ziehung des Kreiſes amcd muß noch folgendes erinnert werden.

Um deſſen Halbmeſſer zu finden, bediene man ſich des geradlinichten Transporteurs, oder noch beſſer eines tauſendtheilichten Maßſtabes auf folgende Art.

Man verzeichne Fig. 1100 einen willkürlichen Winkel KIM, trage von I bis K, den Halbmeſſer des geradlinichten Transporteurs oder tauſend Theile des tauſendtheilichten Maßſtabes, von I bis L die Chorde oder Seite ac des Dreyecks abc Fig. 1099 von I bis M die Chorde des doppelten Winkels ADC oder adc nach dem tauſendtheilichten Maßſtabe (z. E. die Chorde von 2 $(\delta + \varepsilon) = 140°$ in dem Beyſpiele 6) ziehe durch KM eine gerade Linie, und durch L mit KM eine Parallele, ſo wird wie ſich leicht überſehen läßt, IN der Halbmeſſer eines Kreiſes ſeyn, für welchen ac die Chorde von 2. adc = 2 $(\delta + \varepsilon)$ iſt. Man faſſe alſo IN mit dem Cirkel, und beſchreibe aus a, c, ein paar ſich bey n durchſchneidende Kreisbogen, ſo wird n der Mittelpunkt des zu ziehenden Kreiſes amcd ſeyn.

Um die Chorde am einzutragen ſo trage man Fig. 1100 von I bis r die Chorde des doppelten Winkels ADB = δ, nach dem tauſendtheilichten Maßſtabe, und ziehe hierauf mit Kr, durch N eine Parallele N p, ſo wird I p die Chorde eben dieſes Winkels für den Halbmeſſer des Kreiſes amcd ſeyn, die man dahero von a bis m, in den Kreis einzutragen hat.

III. Herrn Branders mechaniſche Auflöſung dieſer Aufgabe ſ. ſeine Beſchreibung des Meßtiſches, Augsb. 1772.)

Aufl. Sehet die Seiten AB, BC als Chorden von Cirkelbögen an, die doppelt ſo groß ſind als die beobachteten Winkel ADB, BDC, und beſchreibt dieſe Cirkel, ſo iſt klar, daß der Obſervirort D auf dem Umkreiſe eines jeden derſelben, und folglich in dem Punkt ihres Durchſchnitts liegen muß. Denn der Winkel ADB iſt die Hälfte des Bogens AB, und der Winkel BDC die Hälfte des Bogens BC.

2. Anders und kürzer. Es ſeyn wiederum die 3 Oerter A, B, C Fig. 1097, und die obſervirten Winkel ADB, BDC. Beſchreibet wie vorhin auf der Seite AC einen Cirkel, ſo daß der Bogen AEC, den ſie abſchneidet, doppelt ſo groß ſey, als der Winkel ADC, welcher auf dieſer Seite ſteht. Zählet von A gegen E doppelt ſo viel Grade als der Winkel ADE hat, und zeichnet den Punkt E. Durch B und E ziehet eine gerade Linie BE bis in D, ſo iſt D der Obſervirort. Denn da vermöge der Conſtruktion D nothwendig auf dem Cirkel AEC liegen muß, ſo muß auch die Diagonale DB nothwendig durch E gehen, weil der Bogen AE immer = 2. ADB iſt, der Punkt D mag liegen wo er will. Nun habt ihr die zwey Punkte B und E, durch welche die Diagonal BD gehen muß, und daher auch gezogen werden kann.

3. Anders, trigonometriſch. Fig. 1098. Ziehet durch AB und AC die zwey Cirkel ABD, BCD wie in der erſten Auflöſung, ihre Mittelpunkte ſeyn F, H, ziehet D und B mit denſelben zuſammen, und fället die Perpendikularen FE, HG, auf die Chorden AB, BC, ſo habt ihr die Winkel, BHG = BDC, folglich HBG = 90° — BDC; BFE = BDA, folglich FBE = 90° — BDA. Ziehet ferner durch H, F, die Linie H I, welche auf der Chorde DB ſenkrecht ſtehen, und DI = IB machen wird. Nun iſt

$$FBH = ABC - HBG - FBE$$

folglich $FBH = ABC + ADC - 180°$.

Da ihr nun aus den Chorden AB, BC und ihren Bögen die Halbmeſſer der Cirkel BF und BH findet, ſo habt ihr in dem △ FBH die beyden Seiten BF, BH und den Winkel FBH, woraus ihr den Winkel BFH folgends BFI, und aus dieſem und der Hypothenuſe BF den Cathetum BI = ½ BD und den Winkel FIB finden könnet. Die übrigen Seiten und Winkel finden ſich hieraus ohne Mühe.

4. Anders und kürzer. Fig 1097. Machet die Winkel ADB = a; BDC = b; ABC = c, DAB = x, ſo habt ihr BCD = (360° — a — b — c — x). Setzet ferner AB = A, BC = B, BD = z, ſo iſt

$$\sin a : A = \sin x : z$$

$$\sin b : B = \sin (360° - a - b - c - x) : z.$$

Schaffet aus dieſen zwey Gleichungen das z weg, ſo habt ihr

$$\sin (360° - a - b - c - x) : \sin x = A \sin b : B \sin a.$$

Folglich durch eine bekannte Verwandlung

$$\tang \left(\frac{360° - a - b - c}{2}\right) : \tang \left(\frac{360° - a - b - c - 2x}{2}\right)$$

$$= (A \sin b + B \sin a) : A \sin b - B \sin a)$$

Ziehet die gegen überſtehenden Winkel ABC + ADC von 360 Gr. ab, und nehmet von dem Ueberreſt die Hälfte, dieſe ſey = d, ſo iſt

$$(A \sin b + B \sin a) : (A \sin b - B \sin a) = \tang d : \tang (d - x).$$

Hieraus findet ihr den Winkel DAB, folgends auch BCD; und CAD und ACD, und aus dieſen jede Seite AD, BD, CD.

5. Verfertigung eines Inſtruments zur Auflöſung dieſer Aufgabe. Dieſes wird nach der Fig. 1097 verfertigt und beſtehet aus einem Cirkel ADC und den 3 Linialen AB, CB und BD, wodurch man vermittelſt der Winkel BAC, BCA, ADB, BDC die Geſtalt des Vierecks ABCD erhält. Der Maaßſtab muß hernach dazu gemacht werden. Man ſchraubt nähmlich das Lineal DB an dem Umkreiſe des Cirkels z. E. in D an, und giebt ihm eine beliebige Lage z. E. DA, ſodann kehret man das Inſtrument gegen den Ort A und bemerkt den Punkt A auf dem Cirkel. Sodann drehet man das Lineal gegen die Oerter C und B, und bemerkt die Punkte C, E auf dem Umkreiſe des Cirkels. In A und C werden die andern Lineale angeſchraubt, und ſo gelegt, daß die Punkte A, B, C, den Triangel, ſo die drey Oerter ABC, die man vor ſich hat, vorſtellen, welches dadurch geſchehen kann, wenn man von A gegen F doppelt ſo viele Grade zählt, als der Winkel BCA hat, und hinwiederum von C gegen G doppelt ſo viel als der Winkel BAC hat. Endlich wird das Lineal in D ab und in B angeſchraubt. Man drehet es ſodann auf den Punkt E, und es wird in D den Obſervirort abſchneiden. Uebrigens müſſen wir noch anmerken, daß wenn alle vier Oerter in einer geraden Linie oder in einem gleichen Cirkel liegen, z. E. wenn B auf E fällt, dieſe Aufgabe aus den Winkeln ADB, BDC alleine nicht aufgelöſet werden kann. Man muß in dieſem Falle einen andern Obſervirort annehmen. Der Fall iſt aber ſehr ſelten.

II. Herr Hofrath Meyer träget die Auflöſung dieſer Frage in ſeiner praktiſchen Geometrie II. S. 245. (2. Aufl. S. 289.) alſo vor:

A, B, C Fig. 1097 ſind drey Oerter auf dem Felde, deren Lage gegen einander bekannt; D iſt ein vierter Ort: man ſoll finden, wie weit er von denen A, B, C entfernt iſt.

Aufl. Um die Lage der Objekte zu beſtimmen, ſo ſetzen in dem Dreyecke ABC, gegeben, oder bekannt, die Seiten AB = b, BC = c und der eingeſchloſſene Winkel ABC = β. Es erhellet, daß man auch andere Stücke des Dreyecks, als gegeben anſehen könne, wenn ſie nur das Dreyeck beſtimmen.

2. Man meſſe nur an dem Orte D die beyden Winkel ADB = δ, BDC = ε, ſo werden ſich daraus die Entfernungen AD, BD, DC durch trigonometriſche Rechnung finden laſſen.

3. Man nenne den unbekannten Winkel BAD = x, ſo iſt in dem Vierecke ABCD, der Winkel

$$BCD = 360° - ABC - BAD - ADC$$
$$= 360° - \beta - x - \delta - \varepsilon$$
$$= \mu - x$$

wenn man der Kürze halber

$$360 - \beta - \delta - \varepsilon = \mu \text{ nennet.}$$

4. Nun hat man in den beyden Dreyecken BAD, BDC

$$\sin ADB : AB = \sin BAD : BD$$
$$\sin BDC : BC = \sin BCD : BD$$

oder $\sin \delta : b = \sin x : BD$

$$\sin \varepsilon : c = \sin(\mu - x) : BD$$

alſo $BD = \frac{b . \sin x}{\sin \delta}$; $BD = \frac{c . \sin(\mu - x)}{\sin \varepsilon}$

Der Winkel ADE addirt zu dem Winkel AEC, und ſodann ſubtrahirt von 180°, giebt den Winkel DAE. Der Winkel CAE ſubtrahirt von dem Winkel DAE giebt den Winkel CAD, und daher DC. Endlich der Winkel AEC ſubtrahirt von AEB giebt DEB, folglich haben wir in dem Dreyecke DEB, EB, den Winkel DEB, und den Winkel EDB, um DB zu finden.

In dieſem Verfahren wird, wenn der Winkel BDC geringer iſt als der BAC, der Punkt C über dem Punkte E ſeyn; indeſſen iſt die Berechnung der vorhergehenden ſo ähnlich, daß ſie keiner fernern Erklärungen nöthig hat.

Wenn die Punkte E und C zu nahe an einander fallen, um EC gegen D mit Gewißheit zu erhalten, ſo iſt es beſſer, ſich dieſerwegen des erſtern Verfahrens der Verzeichnung zu bedienen.

Zweyter Fall. Wenn der gegebene Ort oder die Station D Fig. 1106 auſerhalb dem Dreyecke liegt, welches vermöge der drey gegebenen Gegenſtände A, B, C entſteht, allein in einer Linie mit einer der dadurch gebildeten Seiten.

Man meſſe den Winkel ADB, ſo kann ſodann die Aufgabe ſowohl durch Verzeichnung als durch Berechnung aufgelöſet werden.

Durch Verzeichnung. Man ziehe den gemeſſenen Winkel ADB von dem Winkel CAB ab, ſo erhält man den Winkel ABD; ferner ziehe man bey B an die Seite BA den Winkel ABD, ſo wird die verlängerte Seite CA an D treffen; und DA, DC, DB werden die geſuchten Entfernungen ſeyn.

Durch Rechnung. In dem Dreyecke ABD wird der Winkel D durch Beobachtung erhalten, der Winkel BAD iſt das Supplement des Winkels CAB zu 180°: ſind nun zwey Winkel des Dreyecks bekannt, ſo iſt der dritte auch bekannt; wir haben folglich in dem Dreyecke ABD drey Winkel und eine Seite gegeben, um die Länge der andern zwey Seiten zu finden, welches vermöge der trigonometriſchen Lehrſätze ſehr leicht bewirkt werden kann.

Dritter Fall. Wenn der Stationspunkt in einer der Seiten des gegebenen Dreyecks Fig. 1107 iſt.

Durch Verzeichnung. 1. Man meſſe den Winkel BCD. 2. Man mache den Winkel BAE gleich dem beobachteten Winkel. 3. Man ziehe CD parallel mit EA, ſo iſt D der geſuchte Stationspunkt.

Durch Rechnung. Man ſuche den Winkel B in dem Dreyecke ABC, ſo erhalten wir, da die Winkel B und BDC bekannt ſind, DCB; und folglich wie der Sinus des Winkels BDC zu BC, ſo iſt der Sinus des Winkels DCB zu BD.

Vierter Fall. Wenn die drey gegebenen Oerter in einer geraden Linie ſind.

Beyſpiel. Zur See nahe am Ufer beobachte man drey Gegenſtände A, B, C Fig. 1108 welche gehörig auf der Charte aufgetragen ſind; man will den Ort eines gefundenen Felſen D eintragen; zu dieſer Abſicht werden die Winkel ADB, BDC mit dem Hadleyſchen Quadranten beobachtet.

Durch Verzeichnung. Erſtes Verfahren. An AB Fig. 1109 beſchreibe man das Segment eines Cirkels, welches dem beobachteten Winkel ADB enthalten kann. An BC beſchreibe man das Segment eines Cirkels, welches den Winkel BDC enthalten kann; der Punkt D wird in dem Durchſchnitte der Bögen liegen, und durch Verbindung DA, DB, DC erhält man die geſuchten Entfernungen.

Zwey-

Zweytes Verfahren. Man mache den Winkel ACE Fig 1110 gleich ADB, und den Winkel EAC gleich BDC; von dem Durchſchnittspunkte E durch B ziehe man eine Linie bis ED, um den Bogen ADC zu ſchneiden; man verbinde A, D, und D, C, und DA, DB, DC, werden die verlangten Entfernungen ſeyn.

Durch Rechnung. 1. In dem Dreyecke CAE Fig. 1110 hat man alle Winkel, und die Seite AC, man ſoll AE finden. 2. In dem Dreyecke ABE ſind AB, AE, und der eingeſchloſſene Winkel gegeben, man ſoll die Winkel AEB, ABE finden. 3. In dem Dreyecke BDC ſind der Winkel BDC und DCB (= ABE) gegeben, und folglich der Winkel DCB, und die Seite BC; daher erhält man leicht DB.

Fünfter Fall. Wenn die Station innerhalb des Dreyecks fällt, welches von den drey gegebenen Gegenſtänden gebildet wird.

Es ſind ABC Fig 1111 drey Thürme, deren Entfernungen von einander bekannt ſind; um ihren Abſtand von dem Thurme D zu finden, meſſe man die Winkel ADC, BDC, ADB.

Durch Verzeichnung. An zwey der gegebenen Seiten AC, AB Fig 1112 beſchreibe man Segmente von Cirkeln, welche die gegebenen Winkel enthalten können, ſo wird der Punkt D ihres Durchſchnitts der geſuchte Ort ſeyn.

Ein andres Verfahren. Oder man kann wie in einigen der vorhergehenden Fällen verfahren; man mache den Winkel ABE Fig. 1113 gleich dem Winkel ADE, und BAE gleich BDE; und beſchreibe einen Cirkel durch die drey Punkte A, BE, verbinde EC durch die Linie EC, ſo wird der Punkt D, wo BC den Cirkel EADBE ſchneidet, die verlangte Station ſeyn.

Sechſter Fall. Wenn der Stationspunkt D Fig. 1114 außerhalb dem Dreyecke ABC fällt, der Punkt C aber fällt gegen D.

Z. B. Es ſind ABC Fig. 1114 drey Thürme, deren Entfernungen von einander bekannt ſind; man ſucht ihren Abſtand von dem Punkte D. Man meſſe die Winkel ADC, BDC, und zu Beſtätigung der Beobachtungen meſſe man auch ADB.

Durch Verzeichnung. Erſtes Verfahren. An AC Fig 1115 beſchreibe man einen Cirkel, welcher den Winkel BDC enthalten kann, und an AB einen andern Cirkel, welcher den Winkel ADB enthalte, der Durchſchnittspunkt wird der verlangte Ort ſeyn.

Oder man erhält es durch das 2te Verfahren im erſten Falle, welcher den Punkt D Fig. 1116 giebt, verglichen mit Fig. 1105. Die Berechnung beruht auf Grundſätzen, ſo genau wie diejenigen im 2ten Verfahren des 1ſten Falles übereinſtimmen, daß mithin eine fernere Anführung überflüßig wäre.

Der Stationspunkt D durch Inſtrumente geſucht. Der Punkt D kann leicht auf einen Entwurf gelegt werden, wenn man auf ein leichtes durchſichtiges Papier unbeſtimmte gerade Linien DA, DB, DC unter gleichen Winkeln mit denen zieht, die beobachtet worden; werden dieſe auf den Entwurf gelegt, ſo wird, ſo wie jede Linie über den Gegenſtand weggehen, oder damit zuſammenfallen kann, der Angularpunkt D mit dem Orte der Beobachtung zuſammenfallen. Oder:

Man verſehe ſich mit einem eingetheilten meſſingenen Halbcirkel von ohngefähr 6 Zoll im Durchmeſſer, welcher drey Halbmeſſer mit abgeſtoßenen Rädern hat, jeder ohngefähr 20 Zoll lang, (oder ſo lang, als man den Abſtand der Stationen von den drey gegebenen Objekten rechnen dürfte) einer dieſer

Halbmeſſer ſey eine Fortſetzung des Durchmeſſers, welcher durch den Anfang der Grade auf dem Halbcirkel gehe, allein unbeweglich daran befeſtiget; die andern zwey ſind um den Mittelpunkt beweglich, damit ſie auf dem Halbcirkel unter irgend einem Winkel geſtellt, und feſtgeſchraubt werden können. In dem Mittelpunkt befinde ſich eine kleine Röhre oder Oeffnung, um einen Stift einzulegen, und den Centralpunkt auf dem Entwurfe zu bemerken. Wenn die abgeſtoſſenen Räder der zwey beweglichen Halbmeſſer auf den Halbcirkel gelegt und unter den gehörigen Graden und Minuten der zwey beobachteten Winkel feſte geſchraubt werden, und denn das ganze Inſtrument auf dem Entwurfe bewegt wird, bis die Räder der drey Halbmeſſer längs den drey ſtatimetriſchen Punkten liegen, ſo daß jeder an den gehörigen Punkt anliegt, ſo wird alsdann der Mittelpunkt des Halbcirkels in dem Stationspunkte D ſtehen, welcher auf dem Entwurfe durch die Röhre vermittelſt einer Spitze bemerkt werden kann. Ein ſolches Inſtrument könnte ein Stationsſucher (ſtation-pointer) genannt werden, und wäre beſonders ſehr bequem, um leicht und genau den Stationspunkt zu ſuchen, ausgenommen, wenn die gegebenen Gegenſtände ſehr nahe wären; wenn die Breite des Bogens und der Halbmeſſer, desgleichen die meſſingene Fläche den Mittelpunkt des Halbmeſſers hindern ſollten, die Punkte zu ſehen, oder die Halbmeſſer würden ſo geſtellt, daß ſie zwiſchen ſich einen ſehr kleinen Winkel faßten.

V. Nach Herrn Späth. (Analytiſche Unterſuchungen über die Zuverläſſigkeit, mit welcher ein Landmeſſer vermittelſt verſchiedener Geometer-Werkzeuge, Linien und Winkel abmeſſen kann. 1789. S. 136).

Wenn in (Fig 1097 a) A, B, C drey Gegenſtände auf dem Felde ſind, deren Abſtand unter einander man weiß; die Lage eines vierten Orts D gegen dieſe Gegenſtände zu beſtimmen, vorausgeſetzt, daß man nach allen drey Gegenſtänden von dem Orte D aus viſiren könne. a) Bey Auflöſung dieſer Frage kommt es bloß darauf an, die Größe des Winkels BAD oder BCD aufzuſuchen. Denn da bekanntermaßen in einem jeden Viereck die Summe aller 4 Winkel genau 360° ausmacht, ſo iſt BCD = 360° — ABC — ADC — BAD heißt; man nun den Winkel BAD, X, den Winkel ABC = B, den Winkel ADB = γ; den Winkel BCD = α, ſo iſt der Winkel BCD = 360 — (B + α + γ + x) oder wenn man 360 = (B + α + γ) mit dem Buchſtaben ϕ ausdrückt, ſo iſt BCD = ϕ — X. Es iſt ferner c. ſin x = BD. ſin γ im $\triangle$BAD a. ſin (ϕ — x) = BD. ſin α im $\triangle$BCD; demnach

$$\frac{c.\,\text{ſin}\,x}{\text{ſin}\,\gamma} = \frac{a.\,\text{ſin}\,(\phi - x)}{\text{ſin}\,\alpha};$$

$$\text{oder}\quad \frac{c.\,\text{ſin}\,\alpha}{a.\,\text{ſin}\,\gamma} = \frac{\text{ſin}\,(\phi - x)}{\text{ſin}\,x} = \frac{\text{ſin}\,\phi\,\text{coſ}\,x - \text{coſ}\,\phi\,\text{ſin}\,x}{\text{ſin}\,x}$$

$$= \text{ſin}\,\phi\,\cot x - \text{coſ}\,\phi \quad \text{hieraus}$$

$$\cot x = \frac{c.\,\text{ſin}\,\alpha}{a.\,\text{ſin}\,\gamma.\,\text{ſin}\,\phi} + \frac{\text{coſ}\,\phi}{\text{ſin}\,\phi}$$

$$= \frac{c.\,\text{ſin}\,\alpha}{a.\,\text{ſin}\,\gamma.\,\text{ſin}\,\phi} + \cot\phi.$$

Dieſer Ausdruck, den Winkel BAD zu beſtimmen, iſt allgemein, der Punkt D mag gegen ABC die Lage haben, wie in (Fig 1097 a) oder es mag B dem Punkt D näher als A, oder mit A und C in gerader Linie ſeyn, oder es mag

auch

auch der Punkt D ſelbſt innerhalb des Dreyecks ABC liegen. Hat man nun die Größe des Winkels BAD gefunden, ſo läßt ſich aus dieſem, dem Winkel α und der Seite c die Weite BD beſtimmen.

b) Eine andere Frage bleibt hierbey noch übrig, in Anſehung des Grades der Genauigkeit in Rückſicht der wahren Lage des Punktes D.

Die Beantwortung dieſer Frage hängt von der Genauigkeit ab, mit welcher man den Winkel B, x, α, γ, die Seite c, a, angeben kann. Setze ich nun, man ſey hiebey in Anſehung der wahren Größe des Winkels ungewiß, um

	B	dB
	α	$d\alpha$
	γ	$d\gamma$
	x	dx
der Seite	a	da
	c	dc

ſo iſt nach den Regeln des Differenzial-Calculs,

$$-\frac{dx}{\sin x^2}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{ac.\sin\gamma.\sin\phi.\,d\alpha.\cos a - ac\sin\alpha.\sin\gamma.\,d\phi.\cos\phi}{(a.\sin\gamma.\sin\phi)^2}\\ +\dfrac{(a.dc - c.da)\sin\alpha.\sin\gamma.\sin\phi - a.c.\sin\alpha.\sin\phi.\,d\gamma.\cot\gamma}{(a.\sin\gamma.\sin\phi)^2}\end{array}\right.$$

$$-\frac{d\phi}{\sin\phi^2}-\frac{dx}{\sin x^2}$$

$$=\frac{a.c.\sin\gamma.\sin\alpha.\sin\phi}{a^2.\sin\gamma^2.\sin\phi^2}.\left(d\alpha.\cot\alpha - d\gamma.\cot\gamma+\frac{dc}{c}-\frac{da}{a}\right.$$

$$\left.-d\phi.\cot\phi\right)-\frac{d\phi}{\sin\phi^2}$$

$$=\frac{c.\sin\alpha}{a.\sin\gamma.\sin\phi}.\left(d\alpha.\cot\alpha - d\gamma.\cot\gamma - d\phi.\cot\phi+\frac{dc}{c}-\frac{da}{a}\right)$$

$$-\frac{d\phi}{\sin\phi^2}.$$

Es iſt aber

$$-d\phi\left(\frac{c.\sin\alpha.\cot\phi}{a.\sin\gamma.\sin\phi}+\frac{1}{\sin\phi^2}\right)$$

$$=-d\phi\left(\frac{c.\sin\alpha.\cot\phi}{a.\sin\gamma.\sin\phi}+\cos\phi^2\right)$$

$$=-d\phi\left(\frac{c.\sin\alpha.\cot\phi + a.\sin\gamma.\operatorname{cosec}\phi}{a.\sin\gamma.\sin\phi}\right.$$

Demnach N. 1.

$$dx=-\frac{c.\sin\alpha.\sin x^2}{a.\sin\gamma.\sin\phi}\left[\frac{dc}{c}-\frac{da}{a}+d\alpha.\cot\alpha-d\gamma.\cot\gamma\right.$$

$$-d\phi\left(\cot\phi+\frac{a.\sin\gamma.\operatorname{cosec}\phi}{c.\sin\alpha}\right.$$

 Wenn

Wenn $d\alpha = d\gamma$

N. 2.

$$dx = -\frac{c.\ \text{ſin}\ \alpha.\ \text{ſin}\ x^2}{a.\ \text{ſin}\ \gamma.\ \text{ſin}\ \phi}\left[\frac{dc}{c} - \frac{da}{a} + d\alpha\,\frac{\text{ſin}\,(\gamma - \alpha)}{\text{ſin}\ \alpha\ \text{ſin}\ \gamma}\right.$$
$$\left. - d\phi\left(\cot\phi + \frac{a.\text{ſin}\,\gamma.\text{coſec}\,\phi}{c.\ \text{ſin}\ \alpha}\right)\right].$$

Wenn in N. 1. $\alpha = \gamma$, $d\gamma$ negativ $= d\alpha$ iſt: ſo iſt

$$dx = -\frac{c.\ \text{ſin}\ x^2}{a.\ \text{ſin}\ \phi}.\left[\frac{dc}{c} - \frac{da}{a} + 2d\alpha\cot\alpha - d\phi\left(\cot\phi + \frac{a.\text{coſec}\,\phi}{c}\right)\right].$$

Um die bisher angeſetzten Formeln=Auflöſung durch ein Exempel zu erläutern, wähle ich folgenden Fall.

a) Ich ſetze ein Landmeſſer habe in Fig 1096 a. die Seite AC, den Winkel BAC und ACB gemeſſen und hieraus

$$BC = \frac{AC.\ \text{ſin}\ BAC}{\text{ſin}\ (BAC + ACB)},\ \text{und}$$
$$AB = \frac{AC.\ \text{ſin}\ ACB}{\text{ſin}\ (BAC + ACB)}$$

berechnet. Auch ſey $AC = 8368',2$; $BAC = 31° + 30' + 25''$. $ACB = 28° + 29' + 35''$. Es iſt alſo $BC = 5050'$; $AB = 3610'$.

An einem Platze bey D ſiehet der Landmeſſer die Gegenſtände A, B, C, und mißt mit ſeinem Winkelmeſſer, den Winkel BDA von $28° + 15'$ und den Winkel BDC von $32°$: es fragt ſich, was für eine Lage wird bey dieſen Umſtänden der Punkt D gegen die Gegenſtände A, B, C haben?

Es kommt hier darauf an, den Winkel BAD zu beſtimmen. Es iſt aber für dieſen Fall

$$\cot BAD = \frac{c.\ \text{ſin}\ \alpha}{a.\ \text{ſin}\ \gamma.\ \text{ſin}\ (360 - (B + \alpha + \gamma))} + \cot(360 - (B + \alpha + \gamma))$$
$$= \frac{4610.\ \text{ſin}\ 32°}{5050.\ \text{ſin}\ 28°15'.\ \text{ſin}\ 179°45'} + \cot\,(90° + 89°45')$$
$$= \frac{461.\ \text{ſin}\ 32°}{505.\ \text{ſin}\ 28°15'.\text{ſin}\ 0°15'} - \text{tang}\,(89°45')$$

welches durch Logarithmen alſo aufgelöſet wird

log c	= 3,6637009	log a	= 3,7032914
log ſin α	= 9,7242097 — 10	log ſin γ	= 9,6751546 — 10
	13,3879106 — 10	log ſin φ	= 7,6398160 — 10
	21,0182620 — 20		21,0182620 — 20

$$\log\ \frac{c.\ \text{ſin}\ \alpha}{a.\ \text{ſin}\ \gamma\ \text{ſin}\ \phi} = 4,3696486 - 2.$$

Die=

Dieſem Logar. gehört die Zahl = 234,23
Auch — tang 89°45 = —229,18166

demnach iſt cot BAD = 5,04834
und BAD = 78°47′50′. Letzlich iſt auch

$$BD = \frac{AB.\ \sin BAD}{\sin BDA} = \frac{4610.\ \sin 78°47'50''}{\sin 28°15'} = 9554',2''$$

b) Was den Grad der Genauigkeit anbetrifft, ſo iſt einmal, wenn man BD mit δ bezeichnet

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{dc}{c} + dx \cot x - d\gamma \cot \gamma.$$

Es iſt aber auch nach Nr. 2.

$$dx = -\frac{c.\ \sin\alpha.\ \sin x^2}{a.\ \sin\gamma.\ \sin\varphi}\left(\frac{dc}{c} - \frac{da}{a} - \frac{d\alpha.\ \sin(\gamma-\alpha)}{\sin\alpha.\ \sin\gamma} - d\varphi.\ \cot\varphi\right)$$
$$- \frac{d\varphi.\ \sin x^2}{\sin\varphi}.$$

Soll der Werth von dx in den Ausdruck für $d\delta$ geſtellet werden, ſo müſſen zuerſt die Werthe von $\frac{dc}{c}$, $\frac{da}{a}$, $d\varphi$ aufgeſucht, und $d\alpha$ beſtimmt werden.

Was nun fürs erſte den Werth von $\frac{dc}{a}$ anbelanget, ſo iſt

a. $$\frac{dc}{c} = \frac{db}{b} + \frac{dC.\ \sin A}{\sin(A+C).\ \sin C} - dA.\ \cot(A+C)$$

b. $$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} + \frac{dA.\ \sin C}{\sin(A+C).\ \sin A} - dC.\ \cot(A+C).$$

Weil ferner $\varphi = 360 - (B + \alpha + \gamma)$: und
$d\varphi = -(dB + d\alpha + d\gamma)$: auch
$\sin\frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+a-c).(b+c-a)}{a.\ c}}$ iſt, ſo iſt auch

$$dB = \left(\frac{2db}{b} - \left(\frac{da}{a} + \frac{dc}{c}\right)\right) \tan\tfrac{1}{2}B.$$

In Anſehung der Werthe von dA, dC, $d\alpha$, $d\gamma$, befinde der Landmeſſer, daß alle einander gleich, und die Größe eines jeden 2 Minuten ſeyn könne. Auch ſey db = 4 Schuh der Theil in der Länge AC, für welchen man in Anſehung der wahren Größe derſelben nicht ſtehen kann, ſo würde nach den geſetzten Datis der Ausdruck für $\frac{dc}{c}$ folgender:

$$\frac{dc}{c} = \frac{4}{8368} + \frac{\sin 31°30'.\ 8,0005817764}{\sin(31°30'+28°29,)\ \sin 28°29'}$$
$$-!0',00058177.\ \cot(59°59)$$

und könnte durch Logarithmen alſo aufgelöſet werden.

Es iſt nähmlich

$\log dA = 6,7647561 - 10$	$\log\cot(A+C) = 9,6991887 - 10$
$\log\sin A = 9,7180851 - 10$	$\log dA = 6,7647561 - 10$
$16,4828412 - 20$	$\log dA\cot(A+C) = 3,4639448 - 7$
$\log\sin(A+C) = 9,9374577 - 10$	Hierher gehört die Zahl
$\log\sin C = 9,6784301 - 10$	0,0002911
$19,6158878 - 20$	$\frac{db}{b} = \frac{4}{8368} = 0,00047$
$\log\frac{dA.\sin A}{\sin(A+C)\sin A} = 3,8669534 - 7$	

Hierzu gehört die Zahl 0,0007361.

Demnach iſt

$$\frac{dc}{c} = 0,0007361 + 0,0002911 + 0,00047 = 0,0014972.$$

Eben ſo wird auch der Werth von $\frac{da}{a}$ gefunden.

Es iſt

$\text{Log } dA = 6,7647561 - 10$	
$\log\sin C = 9,6784301 - 10$	$dA.\,\text{Cot}(A+B) = 0002911$
$16,4431862 - 20$	
$\log\sin(A+C) = 9,9374577 - 10$	$\frac{db}{b} = 0,00047$
$\log\sin A = 9,7180851 - 10$	
$\log\frac{dA.\sin C}{\sin(A+C)\sin A} = 6,7876434 - 10$	

Hierher gehöret die Zahl 0,0006132.

Alſo $\frac{da}{a} = 0,0006132 + 0,0002911 + 0,00047 = 0,0013743.$

Es iſt ferner auch

$$dB = \left(\frac{2db}{b} - \frac{da}{a} - \frac{dc}{c}\right)\text{tang }\tfrac{1}{2}B;\ \text{oder}$$

$$dB = \left(\frac{2.\ 4}{6368} - 0,0013743 - 0,0014972\right)\text{tang }\frac{120}{2}$$

$$= -0,0019315.\ \text{tang }60^\circ = -0,003345 = -0^\circ 11',$$

und $d\phi = -(-11' + 2' + 2') = 7$ Minuten.

Auch iſt $\frac{d\alpha.\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\alpha.\sin\gamma} = \frac{\sin(28^\circ 15' - 32^\circ 3').\ 0,00058177}{\sin 32.\ \sin 28^\circ 15'}$

$$= -\frac{\sin 3^\circ 45'.\ 0,0005817}{\sin 32^\circ.\ \sin 28^\circ 15'} = -0,0001517.$$

Ferner $d\phi.\ \text{Cot }\varphi = 0,0020362.\ \text{Cot}(90^\circ + 89^\circ 45') = -466,7$

und $\frac{d\varphi.\ \sin x^2}{\sin\phi^2} = \frac{0,0020362.\ (\sin 78^\circ 48')^2}{(\sin 179^\circ 45)^2} = 102,92$

dieſem zufolge iſt

$$-dx = \frac{4610.\ \sin 32.\ (\sin 78^\circ 48)^2}{5050.\ \sin 28^\circ 16'.\ \sin 179^\circ 45'}\ (0,0014972 - 0,00013743$$
$$- 0,0001517 + 466,79) - 102,92$$

— dx

$$- dx = \frac{4610.\ \text{ſin}\ 32^\circ.\ (\text{ſin}\ 78^\circ 48')^2}{5050.\ \text{ſin}\ 28^\circ 15'.\ \text{ſin}\ 179^\circ 45'}\ 0,465333 - 102,92.$$

$$dx = -\frac{4610.\ \text{ſin}\ 32^\circ.\ \text{ſin}\ 78^\circ 48')^2}{5050.\ \text{ſin}\ 28^\circ 15'\ \text{ſin}\ 179^\circ 45'}\ 0,465333 + 102,92.$$

$$dx = -104,89 + 102,92 = -0,001,97.$$

Dieſer Bogen hält nach Theilen eines Grades $0^\circ + 6' + 46'',3.$ Letztlich iſt alſo

$$\frac{d\delta'}{\delta} = 0,0014972 - 0,00197.\ \text{Cot}\ 78^\circ 48' + 0,00058.\ \text{Cot}\ 28^\circ 15'$$

$$= 0,00014972 - 0,0006435 = 0,0005537$$

und $d\delta = 8,368.\ 0,0008537 = 7',143.$

VI. Nach Herrn Hofrath Käſtner (Geometriſche Abhandlungen 1te Samml. S. 393).

Aufgabe. Die Lage der Stelle wo man ſich befindet, durch die ſcheinbaren Größen der drey Seiten eines gegebenen Dreyecks zu finden. Fig. 1097 b.

1. ABC ſey ein Dreyeck, von dem alles bekannt iſt. Man befinde ſich auſſer ihm in D, und mißt der 3 Seiten ſcheinbare Größen CDB = α; BDA = γ daher ADC = $\alpha + \gamma$. Das iſt alles was man unmittelbar mißt, und daraus ſoll die Lage des Punktes D gegen das Dreyeck beſtimmt werden.

2. Vom gegebenen Dreyecke heiße der Winkel CAB = A, ABC = B, BCA = C; die Seiten ihm gegenüber

BC = a, AC = b AB = c.

Zur Erleichterung für das Gedächtniß heißen in (1) die ſcheinbaren Größen α die der Seite a, γ die der Seite c; demnach iſt $\alpha + \gamma = \beta$, der Seite b ihre.

3. Im Vierecke ABCD weiß man alſo die Seiten BC = a; AB = c; ihren Winkel = B; und den Winkel ADC = β.

4. Folglich der Winkel BCD, BAD Summe = $360^\circ - (B + \beta)$.

5. Kann man ihren Unterſchied finden, ſo weiß man dieſe Winkel, und nun in den Dreyecken DBC, DBA, die Seiten.

6. Wenn der Winkel CBA = 180 Grad wird, ſo fällt der Punkt B in die Linie CA in E, und das Viereck (3) verwandelt ſich in das Dreyeck davon im Artikel: Scheinbare Größe Anwendung in der praktiſchen Geometrie III gehandelt wird.

7. Man ſuche alſo die Winkel DCB = λ; DAB = ϕ.

8. Man nenne ihre bekannte halbe Summe (4) $180^\circ - \frac{1}{2}(B + \beta) = k$ und ſuche ihren halben Unterſchied = ζ.

Alſo $\lambda = k + \zeta$; $\phi = k - \zeta$.

9. Dieſe Winkel ſind hie ſtatt deren welche dorten (l. c. (1)) A und C heiſſen. Man hat alſo wie dorten

$\text{ſin}\ \lambda : \text{ſin}\ \phi = 1 + \cot k.\ \text{tang}\ \zeta : 1 - \cot k.\ \text{tang}\ \zeta.$

10. Aus den Dreyecken CDB, ADB, iſt

$$DB = \frac{a.\ \text{ſin}\ \lambda}{\text{ſin}\ \alpha} = \frac{c.\ \text{ſin}\ \phi}{\text{ſin}\ \gamma}$$

daher $\frac{\text{ſin}\ \phi}{\text{ſin}\ \lambda} = \frac{a.\ \text{ſin}\ \gamma}{c.\ \text{ſin}\ \alpha} = \text{tang}\ \delta$, welche Tangente gegeben iſt.

11.

11. Folglich (9)

$1 - \cot k . \tang \zeta = (1 + \cot k . \tang \zeta) \tang \delta$

dieſe Gleichung ſtehet auch dort (l. c. (5)) nur daß k, δ hier andere Größen bedeuten.

12. Folglich iſt wie (l. c. (8))

$\tang \zeta = \tang (45° - \delta) . \tang k$).

13. Aus ζ hat man λ, φ (8) und nun des Punktes D Weiten von den drey gegebenen Punkten, durch die gemeine Geometrie.

14. Exempel I. Es ſey $a = 5$; $c = 4$; $B = 100°$; $\alpha = 80°$; $\gamma = 48°$; $k = 60°$.

II. $\log a = 0,6989700$

$\log \sin \gamma = 9,8719735$

$10,5700435$

$\log c = 0,6020600$

$\log \sin \alpha = 9,9933515$

$\log (c \sin \alpha) = 10,5954115$

$10 + \log (a \sin \gamma) = 20,5700435$

$\log (c \sin \alpha) = 10,5954115$

$\log \tang \delta = 9,9746320$

daher $\delta = 43° 19' 40''$

$45° - \delta = 1° 40' 20''$.

III. $\log \tang (45° - \delta) = 8,4652947$

$\log \tang k = 10,3514169$

$\log \tang \zeta = 8,8167116$

daher $\zeta = 3° 45' 6''$

$k = 66°$

$\lambda = 69. 45. 6$

$\phi = 62. 14. 54$

$DBC = 30. 14. 54$

$DBA = 69. 45. 6.$

IV. Statt jedes dieſer Winkel wollen wir in folgender Rechnung den nehmen, der um 6 Secunden kleiner oder größer iſt.

V. Da nun $DC = \frac{a . \sin DBC}{\sin \alpha}$; $DB = \frac{a . \sin \lambda}{\sin \alpha}$; $DA = \frac{DB . \sin DBA}{\sin \phi}$

ſo iſt $\log a = 0,6989700$

$\log \sin \alpha = 9,9933515$

$\log (a : \sin \alpha) = 0,7056185 - 10$

$\log \sin DBC = 9,7022357$

$\log DC = 0,4078542$

$\log \sin \lambda = 9,9722914$

$\log BD = 0,6779099$

$\log \sin DBA = 9,9723380$

$10,6502479$

$\log \sin \phi = 9,9469372$

$\log DA = 0,7033107$

da-

daher DC = 2,5577
— DB = 4,7633
DA = 5 0502

VI. Im Dreyecke BAC iſt nach der gemeinen Trigonometrie

$$\text{tang}\ \frac{(BAC - BCA)}{2} = \frac{\text{tang } 40°}{9}$$

log tang 40° = 9,9238135
log 9 = 0,9542425
8,9685710

dieſes giebt den halben Unterſchied = 5° 19′ 35″
alſo BAC = 45 19 35
BCA = 34 40 20
daher log a = 0,6989700
log ſin ABC = 9,9933515
10,6923215
log ſin BAC = 9,8508179
log CA = 0,8415036
CA = 6,9423.

15. Man ſiehet, daß dieſe Rechnnng ſich leicht mit großer Schärfe führen läßt, und nicht ſehr weitläuftig iſt.

16 Käme δ (10) größer als 45°, ſo würde ζ (12) verneint, oder λ wäre der kleinere der beyden geſuchten Winkel, φ der größere.

17. Bisher iſt angenommen, der Punkt B liege jenſeits der Grundlinie CA daß ſolche zwiſchen ihm und der Stelle D durchgehet.

18. Man ſetze die Stelle D^* befinde ſich auf eben der Seite der Grundlinie CA, auf welcher B liegt, und es ſey wie vorhin $AD^*B = \gamma$; $BD^*C = \alpha$; $AD^*C = \beta$; $D^*AB = \varphi^*$; $D^*CB = \lambda^*$.

19. So iſt im Vierecke $ABCD^*$, welches bey dem Punkte B einen einwärts gehenden Winkel hat

$\lambda^* + \varphi^* = \beta + 360° - B = 360°$. Alſo
$\lambda^* + \varphi^* = B - \beta$.

20. Folglich der geſuchten Winkel bekannte halbe Summe $= \frac{1}{2}(B - \beta)$: Sie heiße $= \varkappa^*$, der geſuchte halbe Unterſchied $= \zeta^*$ alſo

$\lambda^* = \varkappa^* + \zeta^*$
$\varphi^* = \varkappa^* - \zeta^*$.

21. Daher wir in (9)
$\sin\lambda^* : \sin\varphi^* = 1 + \cot\varkappa^*\ \text{tang}\ \zeta^* : 1 - \cot\varkappa^*\ \text{tang}\ \zeta^*$.

22. Nun $D^*B = \dfrac{a.\sin\lambda^*}{\sin\alpha} = \dfrac{c.\sin\varphi^*}{\sin\gamma}$

$$\text{daher}\ \frac{\sin\varphi^*}{\sin\lambda^*} = \frac{a.\sin\gamma}{c\ \sin\alpha} = \text{tang}\ \delta$$

welcher Winkel völlig einerley mit dem (10) iſt.

23 Daher (21)
$1 - \cot\varkappa^*.\ \text{tang}\ \zeta^* = (1 + \cot\varkappa^*\ \text{tang}\ \zeta^*).\ \text{tang}\ \delta$.
Wie im (11), nur die geſtirnten Winkel bemerkt.

24. Folglich auch wie in (12). $\text{tang}\ \zeta^* = \text{tang}\ (45° - \delta).\ \text{tang}\ \varkappa^*$.

25. Daraus hat man λ^*, φ^* und die Lage des Punktes D*.

26. Exempel I. Man behalte die Zahlen 14; I. So iſt (20) $\varkappa^* = -14°$

$$\log\,\text{tang}\,(45° - \delta) = 8,4652947$$
$$\log\,\text{tang}\,14° = 9,3967711$$
$$\log\,\text{tang}\,\zeta^* = 7,8620658$$
$$\text{giebt}\;\zeta^* = -(0°25'1'')$$
$$\text{Nun war}\;\varkappa^* = -14$$
$$\text{alſo}\;\lambda^* = -(14°25'1'')$$
$$\varphi^* = -(13\;34\;59).$$

II. Das Verneinte der Winkel zeigt an CD*; CD*, fallen von CB; AB; nach der Grundlinie AC zu. Dies muß geſchehen weil β größer iſt als φ, daher D* innerhalb des Dreyecks ABC fällt.

III. Wenn man die Figur zeichnet, wird man finden, daß im Dreyecke AD*C, der genannte Winkel = 128 Grad iſt. Ihn theilt BC* nach AC verlängert, in zwey von 80° und von 48°, Nebenwinkel der CD*B, AD*B;

27. Dieſes Beyſpiel lehrt, wie durch gehörige Bemerkung des Bejahten und Verneinten, die Formel auf alle Fälle anzuwenden iſt, welche die Figur daraus man ſie hergeleitet hat, nicht zu enthalten ſcheint.

28. Indeſſen wird man beſſer thun, ſich für jeden Fall beſonders eine Figur zu entwerfen, und nach ihr die Rechnung zu führen, damit man nicht etwa aus Mangel der Aufmerkſamkeit bey dem Gebrauche des Bejahten und Verneinten etwas verſiehet.

29. Soll in (18) D* auſerhalb des gegebenen Dreyecks fallen; ſo muß β kleiner ſeyn als des Dreyecks Winkel B; damit der geſuchten Winkel Summe bejaht wird (20). Es wird nicht überflüßig ſeyn, dazu noch ein Exempel zu geben.

30. I. Wir behalten aus (14) das gegebene Dreyeck a = 5; c = 4; B = 100°, das übrige dieſes Dreyecks iſt (14; V) berechnet.

Nun aber ſetze man $\alpha = 50°$; $\gamma = 40°$; daher $\beta = 90°$.

II. Weil hier $\gamma = 90° - \alpha$; ſo iſt

$$\text{tang}\,\delta = \frac{a}{c}\cdot\text{tang}\,\gamma$$

$$\log a = 0,6989700$$
$$\log\,\text{tang}\,\gamma = 9,9238135$$
$$10,6227835$$
$$\log c = 0,6020600$$
$$\log\,\text{tang}\,\delta = 10,0207235$$
$$\text{giebt}\;\delta = 46°22'$$
$$45° - \delta = -(1\;\;22)$$

III. Nun iſt $\frac{1}{2}(B + \beta) = 95°$; alſo (8) $\varkappa = 85°$; daher

$$\log\,\text{tang}\,(\delta - 45°) = 8,3776223$$
$$\log\,\text{tang}\,\varkappa = 11,0580482$$
$$\log\,\text{tang}\,\zeta = 9,4356705$$
$$\zeta = -(15°\;15'\;11'')$$
$$\lambda = +\;69\;\;44\;\;49$$
$$\varphi = 100\;\;15\;\;11$$
$$DBC = 60\;\;15\;\;11$$
$$DBA = 39\;\;44\;\;49.$$

IV.

IV. Jeder dieſer Winkel iſt nur um 1 Sec. von einem unterſchieden, der durch Zehnfache von Secunden gegeben iſt, wir brauchen alſo dieſe ſtatt jener.

V. $\log a = 0{,}6989700$

$\log \text{ſin}\,\alpha = 9{,}8842540$

$0{,}8147160 - 10$

$\log \text{ſin}\,DBC = 9{,}9386312$

$\log DC = 0{,}7533472$

$\log \text{ſin}\,\lambda = 9{,}9722836$

$\log BD = 0{,}7869996$

$\log \text{ſin}\,DBA = 9{,}8057738$

$10{,}5927734$

$\log \text{ſin}\,\varphi = 9{,}9930093$

$\log DA = 0{,}5997641$

daher $DC = 5{,}6669$

$BD = 6{,}1235$

$DA = 3{,}9789.$

Nun für D^* (18).

VI. $\varkappa^* = 5°$ (20)

$\log \text{tang}\,(\delta - 45°) = 8{,}3776223$

$\log \text{tang}\,\varkappa^* = 8{,}9419518$

$\log \text{tang}\,\zeta^* = 7{,}3195741$

$\zeta^* = -(0°\ 7'\ 10'',5)$

$\lambda^* = +\ 4\ \ 52\ \ 10,\ 5$

$\varphi^* = \ \ 5\ \ 7\ \ 10,\ 5$

$D^*BC = 125\ \ 7\ \ 10,\ 5$

$D^*BA = 134\ \ 52\ \ 49,\ 5.$

VII. Nun $D^*C = \frac{a.\ \text{ſin}\,D^*BC}{\text{ſin}\,\alpha}$; $D^*B = \frac{a.\ \text{ſin}\,\lambda}{\text{ſin}\,\alpha}$

$D^*A = \frac{D^*B.\ \text{ſin}\,D^*BA}{\text{ſin}\,\varphi^*}$; alſo ſtatt der Winkel die nächſten in Zehnfachen von Secunden genommen, wie in (V)

$\log \left(\frac{a}{\text{ſin}\,\alpha}\right) = 0{,}8147160 - 10$

$\log \text{ſin}\,D^*BC = 9{,}9127292$

$\log D^*C = 0{,}7274452$

$\log \text{ſin}\,\lambda^* = 8{,}9298213$

$\log D^*B = 0{,}7445373 - 1$

$\log \text{ſin}\,D^*BA = 9{,}8503885$

$9{,}6219258$

$\log \text{ſin}\,\varphi^* = 8{,}9505222$

$\log D^*A = 0{,}6714036$

daher $D^*C = 5{,}3388$

$D^*B = 0{,}55531$

$D^*A = 4{,}6925.$

Eine

Eine Stelle in der geraden Linie AC.

31. I. Es iſt klar daß man ſich auch einen Punkt T in der verlängerten CA vorſtellen kann, und fragen, wie ſich das bisherige auf ihm anwenden ließe.

Es iſt weder D noch D* ſondern etwas zwiſchen beyden.

II. Alſo $\beta = 0$ (3) folglich $\alpha = -\gamma$.

Nähmlich eine gerade Linie die ſich um T aus der Lage TA, in die TB drehet, beſchreibe den Winkel ATB $= \gamma$; und wenn ſie ſich aus der Lage TB in die TC drehet, den Winkel BTC $= \alpha$ dem vorigen gleich aber entgegengeſetzt.

III. Folglich (8) $\varkappa = 180° - \frac{1}{2}$ B,

IV. Man ſtelle ſich vor, B bewege ſich rechter Hand herum, bis es in T fällt.

V. So verwandelt ſich der Winkel BCD in BCT alſo iſt hier $\lambda =$ BCT $=$ C im gegebenen Dreyecke.

VI. Aber, bey der Bewegung (III) öfnet ſich der Winkel CAD bis an CAT $= 180°$.

Da nun der Schenkel AB liegen bleibt, verwandelt ſich BAD in BAC $+ 180°$, oder es iſt hie $\phi = 180° +$ A dem Winkel des Dreyecks.

VII. Alſo $\lambda + \phi = 180° +$ A $+$ C $= 360° -$ B, alſo die halbe Summe $= 180° - \frac{1}{2}$ B mit (III) übereinſtimmend.

VIII. tang $\delta = -\frac{a}{c}$ (10: und hie 11) daher tang $(45° - \delta) = \frac{c+a}{c-a}$, dieſes mit $-$ tang $\frac{1}{2}$ B multiplicirt giebt tang ζ.

IX. Ueberflüſſig iſt freylich dieſe Rechnung außer zu ſehen, daß auch hie alles übereinſtimmt. Denn man hat ſchon aus V; VI; $\lambda - \phi =$ C $-$ A $- 180°$, alſo $\zeta = \frac{1}{2}$ (C $-$ A) $- 90°$.

X. Aber man hatte hier auch λ, ϕ, eher als ihre Summe und ihren Unterſchied, brauchte ſie alſo daraus nicht zu berechnen.

XI. Vorhin war DBC $= 180° - \lambda - \alpha$; fällt nun hie D auf T, ſo kömmt TBC $= 180° - \lambda - \alpha$ das iſt (V) $= 180° -$ C $- \alpha$ d. i. (II) $= 180 -$ C $+ \gamma$.

XII. Vorhin hatte man (14; IV) DC $= \frac{a.\ \text{ſin DBC}}{\text{ſin}\ \alpha}$ das wird ſin TC $= \frac{a.\ \text{ſin}\ (C + a)}{\text{ſin}\ \alpha}$ (hie XI). Nähmlich wenn man ſich TB gezogen vorſtel- ſo iſt im Dreyecke CTB der genannte Winkel $= \alpha$, und der Winkel CBT $= 180° - (C + \alpha)$ oder ſin CTB: ſin CBT $=$ CB: CT.

XIII. Eben ſo verwandelt man in (14. V) die dortige Formeln für BD; AD; hie in die für BT; AT.

XIV. Die Abſicht iſt nur zu zeigen, wie die allgemeinen Formeln auf dieſen beſondern Fall anzuwenden ſind, da man ohne gehörige Aufmerkſamkeit durch falſche Schlüſſe auf Ungereimtheit kommen würde. Z. E. wenn man in (VI) unter ϕ den Winkel BAT der kleiner als zwey rechte iſt, oder: der $= 180° -$ A iſt, verſtehen wollte.

XV. Sonſt iſt offenbar, daß ein Auge in T am Dreyecke ABC keine ſcheinbare Größe meſſen kann, als BTA = γ der Seite AB ihre. Wäre auch A durchſichtig, daß das Auge C ſehen könnte, ſo wäre doch der Seite BC ſcheinbare Größe hie = $-\gamma$ (II).

XVI. Wenn man aber das Dreyeck ABC gegeben annimmt, ſo iſt im Dreyecke BTA, nebſt dem genannten Winkel (XV) noch der BAT, des gegebenen Dreyecks äußere bekannt, auch die Seite AB; folglich berechnet man AT, BT, auch TA + AB = TC.

Die Stelle durch Zeichnung zu finden.

32. Angenommen, man hat das Dreyeck ABC gezeichnet vor ſich.

Ueber AB beſchreibe man einen Kreis, deſſen Abſchnitt, welcher von AB nach AC zu lieget, den Winkel γ faßt.

Ueber BC einen, deſſen Abſchnitt, welcher nach CA zu liegt, den Winkel α faſſe.

Dieſe beyden Kreiſe ſchneiden einander zweymal. Der Punkt D muß in beyden zugleich liegen. Gewiß liegt er nicht in B, wo die Kreiſe einander ſchneiden, alſo in ihrem andern Durchſchnitte.

33. Man beſchreibe über AB, BC Kreiſe, deren Abſchnitte, die jenſeit AC liegen, die Winkel γ, α faſſen, ſo giebt ihr Durchſchnitt den Punkt D*.

34. Ueber AC ein Kreis beſchrieben, deſſen Abſchnitt den Winkel β faßt, ſchneidet die vorigen in D, wenn der Abſchnitt über AB liegt, in D* wenn der Abſchnitt unter AB liegt.

35. Will man zeichnen, ſo wird es doch bequemer ſeyn, aus den gegebenen Sehnen und Winkel ſogleich die Halbmeſſer der Kreiſe zu berechnen, als dieſe Halbmeſſer erſtlich durch Zeichnung zu finden.

VII. Nach Herrn Camerer in den geometriſchen Oertern des Apollonius von Pergen S. 403. Anhang. Es ſind 3 Punkte A, B, C gegeben, und man hat in einem 4ten Punkte D beobachtet, unter welchen Winkeln je 2 der gegebenen Punkte erſcheinen, die Lage dieſes 4ten Punkts D zu beſtimmen. Fig 1567 bis 1574.

Analyſe und Beſtimmung. Der Punkt D liegt entweder, mit 2 der gegebenen Punkte z. B. mit den Punkten A und B auf einer geraden Linie oder nicht. Er liegt 1) Fig 1567-1570 nicht mit 2 gegebenen Punkten in einer geraden Linie. Weil nun die Linien AD, BD, welche den gegebenen Winkel ADB einſchließen, durch 2 gegebene Punkte A und B gehen; ſo berühret der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Eben ſo weil die Linien BD, CD, die den gegebenen Winkel BDC, einſchließen, durch 2 gegebene Punkte B, C gehen, ſo berührt der Punkt D wiederum einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Sollte nun Fig 1571. 1572 dieſer letzte Kreis mit dem vorhergehenden erſtern einerley ſeyn, ſo müßte alſo der Kreis der durch die Punkte A, B, D ginge auch durch den Punkt C gehen, d. h. es müßte ſich um das Viereck ABCD ein Kreis beſchreiben laſſen; oder wenn der Punkt B und D auf verſchiedenen Seiten der Linie AC liegen; ſo müßte die Summe der Winkel ABC und ADC gleich ſeyn zweyen rechten; liegen aber die Punkte B, D, auf einerley Seite der Linie AC; ſo müßten die Winkel ABC, DADC gleich ſeyn. Wäre nun einer von dieſen Fällen; ſo könnte der Punkt D noch auf jedem beliebigen Punkte des einzigen der Lage nach gegebenen Kreiſes liegen, und die Aufgabe bliebe alſo noch unbeſtimmt. Es ſey folglich keiner

dieſer Fälle, ſo ſind mithin die Kreiſe ABD, ACD zwey verſchiedene der Lage nach gegebene Kreiſe, und da der Punkt D auf jedem derſelben liegt; ſo liegt er auf ihrem Durchſchnittspunkte, und iſt folglich gegeben.

Die Kompoſition ergiebt ſich von ſelbſt.

2) Es liege Fig. 1573. 1574 der Punkt D mit 2 der gegebenen Punkte, z. B. mit A und B, auf einer geraden Linie. Weil nun aus dem gegebenen Punkte C an die der Lage nach gegebene gerade Linie AB eine gerade Linie CD, unter einem gegebenen Winkel CDA gezogen iſt; ſo iſt die Lage von CD, mithin der Punkt D, gegeben. Nur der einzige Fall iſt hier ausgenommen, wenn C ebenfalls auf der geraden Linie AB läge.

Auch hier iſt wieder die Kompoſition für ſich klar.

Berechnung. Fig 1567 - 1570. Für den erſten Fall. Es ſey E der Mittelpunkt des über AB, und F der Mittelpunkt des über BC beſchriebenen Kreiſes und es ſey $AB = a$, $BC = b$, $ABC = B$, $ADB = \alpha$, $BDC = \beta$; ſo iſt $ABE = \pm (90° - \alpha)$, $FBC = \pm(90° - \beta)$, $EBF = ABC \mp ABE \mp FBC = B + \alpha + \beta - 180°$ Kürze halber heiße EBF d. h. $B + \alpha + \beta - 180° = d$. Nun iſt $BE = \frac{a}{2.\sin\alpha}$, $BF = \frac{b}{2.\sin\beta}$. Und weil folglich in dem Dreyecke BEF die zwey Seiten BE, BF nebſt dem eingeſchloſſnen Winkel bekannt ſind; ſo findet man jeden der übrigen Winkel, z. B. den Winkel BEF durch die Formel $\text{ctg } BEF = \frac{EB}{BF.\sin EBF} - \text{ctg } EBF$

d. h. $\text{ctg } BEF = \frac{a.\sin\beta}{b.\sin\alpha\ \sin d} - \text{ctg } d.$

Und eben ſo

$$\text{ctg } BFE = \frac{b.\sin\alpha}{a.\sin\beta.\ \sin d} - \text{ctg } d.$$

Es iſt aber, weil EF die Linie BD halbirt, $BEF = BAD$, und $BFE = BCD$. Da man alſo die Winkel BAD, BDA nebſt der Seite AB in dem Dreyecke ABD, und die Winkel BCD, BDC nebſt der Seite BC in dem Dreyecke BCD kennet, ſo iſt es leicht die übrigen Seiten und Winkel zu berechnen. In dem zweyten Falle Fig. 1573. 1574 ſind in dem Dreyecke BCD die Winkel bey B, D nebſt der Seite BC gegeben, woraus das übrige leicht gefunden wird.

VIII. Nach Herrn von Tempelhof Analyſis endl. Größen. S. 482. Fig. 1585.

Vorbereitung. Weil die Lage der 3 Punkte A, B, C gegeben wird, ſo verſteht man darunter, daß die Winkel des Triangels ABC gegeben werden. Die Lage des Punkts D wird aber beſtimmt, wenn von den Winkeln DBC, DAC, DCB, BDA, CDA die beyden letztern gegeben werden, denn aus ihnen findet man die andern, und daraus in den Triangeln DCA, DBA ſogleich auch den dritten Winkel. Durch dieſe Winkel wird aber die Lage des Punkts D in Abſicht auf die drey gegebene Punkte beſtimmt.

Man beſchreibe durch die drey Punkte A, B, C einen Cirkel, welcher die Linien AD, BD, CD in a, b, c durchſchneidet. Ferner ziehe man die Linien bc, ac, ba, ſo ſind die Triangel DaC, DCA; ferner Dbc DCB, und Dba, DAB einander ähnlich, und es iſt in dem Triangel abc der Winkel abc = cbB

— abB

— abB. Ferner iſt, cbB = bcD + bDc, und abB = baD + bDa, folglich wird abc = bcD + bDc — baD — bDA. Weil aber die Triangel Dcb, DBC einander ähnlich ſind, ſo iſt Dcb = DBC, folglich abc = DBC — baD + bDC — bDa. Da aber auch die Triangel Dab, DBA einander ähnlich ſind, ſo iſt der Winkel Dab dem Winkel DBA gleich, folglich wird abc = DBC — DBA — (bDa — bDc) abc = ABC — CDA. Auf eben die Art findet man:

$$acb = BCA + BDC + CDA, \text{ und}$$
$$bac = BAC - BDC.$$

Setzt man nun BCA = a, ABC = b, BAC = c, BDC = f, CDA = g, ſo wird

$$abc = b - g$$
$$acb = a + f + g$$
$$bac = c - f.$$

Nunmehro iſt

$$Da : ac = DC : CA$$
$$Da : ab = DB : BA$$

folglich $\frac{DC}{DB} = \frac{ab.\ AC}{ac.\ AB}$.

Ferner iſt $Db : bc = DC : CB$
$Db : ba = DA : AB$

und hieraus $\frac{DC}{DA} = \frac{ab.\ CB}{bc.\ AB}$.

Es iſt aber auch ac : ab = ſin abc : ſin acb und ab : bc = ſin acb : ſin bac, folglich

$$\frac{ab}{bc} = \frac{\text{ſin}\,(a + f + g)}{\text{ſin}\,(c - f)}$$
$$\frac{ab}{ac} = \frac{\text{ſin}\,(a + f + g)}{\text{ſin}\,(b - g)}.$$

Hieraus wird

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC.\ \text{ſin}\,(a + f + g)}{AB.\ \text{ſin}\,(b - g)}$$
$$\frac{DC}{DA} = \frac{BC.\ \text{ſin}\,(a + f + g)}{AB.\ \text{ſin}\,(c - f)}.$$

Es iſt aber AC : AB = ſin b : ſin a
BC : AB = ſin c : ſin a.

Folglich wird

$$\frac{DC}{DB} = \frac{\text{ſin}\ b.\ \text{ſin}\,(a + g + f)}{\text{ſin}\ a.\ \text{ſin}\,(b - g)}$$
$$\frac{DC}{DA} = \frac{\text{ſin}\ c.\ \text{ſin}\,(a + g + f)}{\text{ſin}\ a.\ \text{ſin}\,(c - f)}.$$

Nach dieſer Vorbereitung wird es leicht ſeyn, den Winkel DCB zu beſtimmen.

Auflö-

Auflöſung. Es ſey der Winkel DCB $= \varphi$, ſo wird DC : DB $= \sin$ DBC : $\sin \varphi$. Nun iſt aber $\sin DCB = \sin(f + \varphi)$, folglich iſt $\frac{DC}{DB} = \frac{\sin(f + \varphi)}{\sin \varphi}$, und dahero auch $\frac{\sin(f + \Phi)}{\sin \varphi} = \frac{\sin b. \sin(a + g + f)}{\sin a. \sin(b - g)}$.

Da nun $\sin(f + \Phi) = \sin f. \cos \varphi + \sin \varphi. \cos f$, ſo wird

$$\frac{\sin f. \cos \varphi + \sin \varphi. \cos f}{\sin \Phi} = \frac{\sin b. \sin(a + g + f)}{\sin a. \sin(b - g)}$$ oder

$$\sin f \cdot \cot \varphi + \cos f = \frac{\sin b. \sin(a + g + f)}{\sin a. \sin(b - g)}.$$

Es iſt aber $\sin(a + g + f) = \sin(a + g). \cos f + \sin f. \cos(a + g)$, folglich wird $\sin f. \cot \varphi + \cos f$

$$= \frac{\sin b[\sin(a + g). \cos f + \sin f \cos(a + g)]}{\sin a. \sin(b - g)},$$

und wenn man durch ſin f dividirt,

$$\cot \varphi + \cot f = \frac{\sin b. \sin(a + g) \cot f + \sin b. (\cos(a + g)}{\sin a. \sin(b - g)}.$$

Da nun auch $\sin(b - g) = \sin b. \cos g - \sin g. \cos a$, ſo wird

$$\cot \Phi + \cot f = \frac{\sin(a + g). \cot f + \cos(a + g)}{\sin a. \cos g - \sin a. \sin g. \cot b}.$$

Setzt man nun auch $\sin a. \sin g + \sin g. \cos a.$ für $\sin(a + g)$ und $\cos a \cos g - \sin a. \sin g$ für $\cos(a + g)$, ſo wird $\cot \varphi + \cot f$

$$= \frac{(\sin a. \cos g + \sin g. \cos a) \cot f + \cos a. \cos g - \sin a. \sin g}{\sin a. \cos g - \sin a. \sin g. \cot b}$$

dividirt man nun mit ſin a ſin g, ſo wird

$$\cot \varphi + \cot f = \frac{(\cot g + \cot a) \cot f + \cot a \cot g - 1}{\cot g - \cot b}$$

folglich

$$\cot \varphi = \frac{(\cot a + \cot b) \cot f + \cot a. \cot g - 1}{\cot g - \cot b}.$$

Anmerkung. Es ſey z. E. der Winkel BCA $= a = 75°$; ABC $= 60° = b$; BDC $= f = 15°$; CDA $= g = 30$: ſo wird

$\cot 75° = 0{,}26794$
$\cot 60° = 0{,}57735$

$\cot 60° + \cot 75° = 0{,}84529$

$\cot a \times \cot g = \cot 75° \times \cot 30° = 0{,}26794 \times 0{,}57735 = 0{,}15469$; folglich $(\cot 75° + \cot 60°) \cot 15° = 0{,}84529 \times 3{,}73205 = 3{,}15466$, folglich wenn man addirt, ſo wird $(\cot 75° + \cot 60°) \cot 15° + \cot 75° \times \cot 30° - 1 = 2{,}30935$. Da nun $\cot 30° - \cot 60° = 1{,}73205 - 0{,}57735 = 1{,}15470$, folglich hieraus $\cot \Phi = \frac{2{,}30935}{1{,}15470} = 1{,}9999$, ſo iſt $\Phi = 26° 34'$ beynahe.

Weiß man nun dieſen Winkel; ſo iſt der Winkel DBC leicht gefunden, denn derſelbe iſt $180° - BDC - \Phi = 180° - 15° - 26°34' = 138°26'$. Hieraus findet man ferner den Winkel DCA, indem man Φ von BCA abzieht, und alsdann iſt $DCA = 75° - 38°,26' = 36°34'$, und $DAC = 180° - DCA - CDA = 180° - 36°34' - 30°, = 113°26'$. Da alſo alle Winkel in der Figur DBCA beſtimmt worden, ſo iſt die Lage des Punkts D nicht mehr unbeſtimmt, ſondern man hat dieſelbe. Wenn man nun noch eine Seite in dem Triangel ABC weiß, ſo findet man die Entfernung des Punkts D, von den dreyen Punkten A, B, C nach den bekannten Regeln der Trigonometrie.

Auflöſung nach Herrn Burja: ſiehe Aufgaben vermittelſt der Kegelſchnitte aufzulöſen 1. B. S. 189.

Aufl. nach Herrn Langsdorf und Herrn Hofrath Käſtner ſiehe geometriſcher Ort.

Aufl. bey mikrometriſchen Meſſungen ſiehe Mikrometer Beſchr. und Gebrauch (12).

Entfernung kürzſte zwiſchen 3 Oertern zu finden.

Herrn Baron Palmquiſt's Art, den kürzeſten Weg zwiſchen drey Oertern zu finden. (Schwed Abh 7 B. S. 149).

Wenn man zwiſchen verſchiedenen Orten eine Communication haben will, ſo hält man es für einen großen Vortheil dabey, daß der Weg von einem zum andern kurz iſt. Z. E. bey einer Belagerung iſt es oft nöthig die Minen der Feſtung zu verderben. Liegt den da nicht viel daran, daß die Minirer von einer gewiſſen Stelle den kürzeſten Weg an den Ort gehen, wo ſie wiſſen, oder vermuthen, daß die Minen der Feſtung gelegen ſind? Wer bey ſolchen Belagerungen geweſen iſt, kann die Wahrheit dieſes am beſten bezeugen. Außerdem kann jeder leicht finden, daß ein Minirer, der an zwey angegebenen Stellen Minenkammern machen ſoll, ſowohl in Kriegs- als Friedenszeiten, die Minengänge ſo einrichten muß, daß der Weg von einem gewiſſen Orte zu ihnen beyden, ſo kurz als möglich iſt. Denn ſolchergeſtalt werden die Koſten gemeiniglich geringer, und der Zeitverluſt kleiner.

Bey Bergwerken hat dieſes ebenfalls großen Nutzen. Denn wenn ein Bergmann einen Schacht in die Grube von einem ſolchen Orte abſenken will, von dem er nachgehends bequemlich an drey andere Plätze unten im Berge kommen kann; ſo iſt es öfters nützlich, die rechte Stelle zu wiſſen, wo man abſenken ſoll, damit man zu allen drey andern Stellen den kürzeſten Weg hat. Wer damit umgeht, kann uns davon am beſten überzeugen.

Dieſen kürzeſten Weg zwiſchen drey gegebenen Punkten A. B. F. Fig 1086 findet man alſo.

Man ſetze, das Dreyeck, das von den Linien AF, AB, BF, gemacht wird, ſey gleichſchenklich, ſo daß AB = BF. Nun findet ſich beym erſten Anblicke, daß weder der Weg, welcher gerade von B nach A und F geht, noch der, welcher von B zuerſt nach der Linie AF, und nachgehends zu den Punkten A und F geht, der kürzeſte iſt, ſondern daß der kürzeſte von B in einer geraden Linie AF, und nachgehends von da zu dem Punkte A und F gehen muß. Und weil das Dreyeck A, B, F, gleichſchenklich iſt, muß dieſer Punkt in der Linie ſeyn, die von B ſenkrecht auf AF gefället wird. Alſo braucht man nur noch auf der Linie BD den Ort zu finden, wo dieſe Linien oder Wege zuſammen laufen. Solches zu erhalten ſey C der geſuchte Punkt, und c unendlich nahe dabey. Mit den Halbmeſſern Ac, Fc, beſchreibe man die Bogen gc, ec,

aus den Mittelpunkten A, F, ſo können ſolche Bogen für gerade Linien, und die Winkel g und e für rechte gehalten werden. Weil nun AC = CF und Ac = cF, muß gC = Ce, weil BC ſo viel länger wird, ſo viel die Summe von AC und CF abnimmt, alſo iſt Cc = 2. gC = 2. Ce. Und da die Dreyecke Cce, FCD ähnlich ſind, wie auch die Dreyecke Ccg, ACD, ſo iſt CF oder AC = 2. CD, woraus folget, daß der Winkel DCF = ACD = 60 Gr. und alſo ACF = FCB = ACB = 120 Gr. Der geſuchte Punkt C befindet ſich alſo auf dem Orte der Linie BD wo die Linien, die von ſolchem Punkte nach den gegebenen Punkten gehen, alle Winkel gleich groß, nämlich jeden 120 Gr. machen.

(1087 Fig.) Wenn CF nach K verlängert wird, ſo iſt AC + CK + CB noch der kürzeſte Weg, der zwiſchen A, B und K zu finden iſt. Denn man ſetze, die Linien träfen in einem Punkte b unter C zuſammen, und beſchreibe mit den Halbmeſſern AC, KC, KF, die Bogen Ca, Cd, FH, ſo iſt Aa + ab + bd + dH + HK + bB < AC + CF + FK + Cb + bB, d. i. ab + bd < Cb, alſo ſtoßen die Linien nicht unter C zuſammen. Eben ſo, wenn ſie über C (1088 Fig) zuſammen treffen ſollten, beſchreibe man mit den Halbmeſſern Ab, Kb, KF, die Bogen ba, bd, FH, ſo iſt Ab + bH + HK + bC + CB < Aa + aC + Cd + dF + FK + CB, d. i. bC < aC + CD, aber nach geometriſchen Gründen iſt bC > aC + Cd, alſo ſtoßen die Linien auch nicht über C zuſammen, und folglich muß ſolches in C geſchehen. Weil nun eben dieſes auch von der andern Linie kann bewieſen werden, ſo folget, daß auch, wenn die gegebenen Punkte eine ganz unordentliche Lage haben, doch allemahl die drey Richtungen, welche zuſammen den kürzeſten Weg machen, an dem Orte zuſammen treffen, da alle drey Winkel, welche von dieſen Richtungen gemacht werden, unter einander gleich ſind.

Daraus folget endlich nachgehende Verzeichnung: man beſchreibe über zwey Linien des Dreyecks ABF Bogen, welche Winkel von 120 Gr. in ſich enthalten, ſo ſchneiden dieſe Bogen einander in dem geſuchten Punkte. Welches 1088 Fig. w.

Aus dem angeführten erhellet, daß in dem Falle, wenn die Linien, welche gerade von B nach A und F gehen, einen Winkel von 120 und mehr Graden machen, ſo iſt ſchon AB + BF der kürzeſte Weg, und man hat nichts mehr zu ſuchen. Daß die Linien in demjenigen Orte zuſammen ſtoßen müſſen, wo alle Winkel von einerley Größe ſind, läßt ſich auf andere Art beweiſen. Und damit ſich auch diejenigen von dieſer Wahrheit überzeugen mögen, welche an vorerwähnte Betrachtungen nicht gewöhnt ſind, wollen wir dieſen Beweis anführen. Aus mechaniſchen Gründen iſt bekannt, daß bey drey Kräften, die in verſchiedenen Richtungen an einem Punkte ſtehen, die Sinus der Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit einander einſchließen, ſich wie die Kräfte verhalten. Man ſetze alſo, in den Punkten A, B, F, wären Rollen, über welche man drey in einem Punkte zuſammen geknüpfte Schnuren gezogen hätte, und an deren Ende hiengen gleich große Gewichte. Wenn nun dieſe Gewichte für ſich ins Gleichgewicht ſetzen, ſo folget aus dem nur angeführten, daß der Knoten C an dem Orte ſtehen bleibt, da alle Winkel um ihn gleich groß ſind. Denn weil die Kräfte gleich groß ſind, müſſen auch beym Gleichgewichte die Sinus der Winkel der Richtungen von gleicher Größe ſeyn, und folglich die Winkel ſelbſt *).

*) Wer auch gar nichts von der Zuſammenſetzung der Kräfte weiß, ſieht doch gleich ein, daß wenn nach CA, CB, CF, (Fig 1089) gleich groſe Kräfte ziehen, welches hier die Gewichte, vermittelſt der Rollen thun, kein Grund vorhanden iſt, warum der Winkel zwiſchen einem Paare Richtungen gröſſer oder kleiner ſeyn ſoll, als zwiſchen einem andern Paare, und alſo alle drey Winkel von einer Gröſe ſind. (A. d. H. R. Käſtner).

Aber es iſt eine bekannte Eigenſchaft von Gewichten, daß ſie der Erde ſo nahe zu kommen ſtreben, als möglich iſt. Daraus folgt im gegenwärtigen Falle, daß die Gewichte die Schnuren ſo weit niederziehen werden, als ſie können, d. i. daß die Summe von den Stücken Schnuren, die unter die Rollen kommen, ſo groß, als möglich iſt, alſo iſt klar, daß die Summe der über bleibenden Stücke, AC + BC + FC, welche über den Rollen bleiben, ſo klein, als möglich iſt. Folglich iſt es der kürzeſte Weg zwiſchen Punkten, A, B, F.

Anmerk. des Hrn. Hofrath Käſtners. Es ſey Fig 1086 ABF was für ein Dreyeck man will und AC + BC + CF ein Kleinſtes. Man laſſe ſich C in BC bis in e bewegen, ſo wird oben bewieſen, daß Cg + Ce = Cc, welches ſich darauf, daß BA = BF, nicht gründet. Folglich halbirt BC den Winkel ACF und alſo iſt ACD = 2 R — ACB = DCF = 2 R — BCF und ACB = BCF. Wenn man ſich nun C in AC um eine unendlich kleine Entfernung fort bewegen läßt und eben die vorigen Schlüſſe wiederholt, ſo wird man heraus bringen, daß ACB = ACF und ſo ſind alle drey Winkel einander gleich.

Anwendung dieſer Angabe auf den Bergbau.

I. In der Grube ſeyn 3 vorzüglich bauwürdige Stellen, wovon A ein Punkt in der erſten, B einer in der zweyten, und C einer in der dritten, alle dieſe Punkte aber liegen in einer und derſelben ſöhligen Ebene.

Nun will man zwiſchen dieſen Punkten einen ſeigern Förderſchacht haben, dergeſtalt, daß bis zu ihm, von genannten Punkten weg, der kürzſte Weg ſey.

Die Frage iſt, wo man ſich damit auf einer vorgegebenen ſöhligen Ebene z. E. am Tage zu lagern habe. Fig 1117.

Aufl. 1. Der Schacht muß die ſöhlige Ebene durch A, B, C in einem Punkte D ſo treffen, daß die Summen der Längen der von A, B, C nach D getriebenen Oerter AD, BD, CD kleiner ſey, als die Summen der Längen jeder andern von A, B, C aus, nach einem beliebigen Punkt gebrachten Oerter.

2. Dieſer Punkt D hat die richtige Lage, wenn ADB = BDC = CDA = 120°.

Er muß ſeiger unter dem Lagerungspunkte des ſeigern Förderſchachts liegen.

3. Dieſen Lagerungspunkt aber zu finden, verrichte man von A durch B bis C, und zur Prüfung von C bis wieder in A einen Zug;

4. Schreibe ſelbigen ein, rechne ihn aus.

5. Und bringe die Oertung eines der drey Punkte, z. E. A, auf die durch den Lagerungspunkt gehende vorgegebene ſöhlige Ebne.

6. Dann läßt ſich das verlangte folgendermaßen finden.

Durch Zeichnung. 7. Nachdem man die Punkte A, B C in Grundriß verzeichnet hat, beſchreibe man über AC ſowohl als AC gleichſeitige Dreyecke BGA, und AHC.

Halbire AB in a, GB in b; AC in c und AH in d;

Ziehe durch a, b, c, d auf BA, BG, AC, AH die Lothe aG, bA, cH, dC;

Beſchreibe aus dem Durchſchnittspunkte p der Lothe aG, und bA mit dem Halbmeſſer pB = pA den Kreisbogen BDA.

Jngleichen aus q, dem Durchſchnittspunkte der Lothe Cd, Hc, mit qA = qC den Kreisbogen CDA.

Der Durchſchnittspunkt beyder Kreiſe D iſt der, wo der Förderſchacht, in der ſöhligen Ebene ABC eintrifft.

Man ziehe alſo die ſöhlige Linie AD;

Und ſuche derſelben Streichen, und deſſen Beſchaffenheit; auch die Größe der AD.

Und gebe eine ſolche ſöhlige Linie von der nach den 5ten Abſatze beſtimmten Oertung aus, ab.

Durch Rechnung. 8. Aus dem berechneten Zuge (4), weiß man (M. ſ. Zug zu verrichten 10) die ſöhlige Linie AB und AC, auch den ſöhligen Winkel BAC.

AB ſey = M; AC = N; BAC = η.

Man trage tang QPA = tang F = $\frac{N.\,\text{ſin}\,(120^\circ - \eta)}{M + N.\,\text{coſ}\,(120 - \eta)}$

dann tang $\frac{1}{2}$ QPD = tang ω

$$= \sqrt{\frac{[N\,(1 + \frac{(\text{ſin}\;120^\circ - \eta)}{\text{ſin}\,F}) - M].\;[N\,(1 - \frac{\text{ſin}\,(120^\circ - \eta)}{\text{ſin}\,F}) + M]}{[N\,(1 + \frac{(\text{ſin}\;120^\circ - \eta)}{\text{ſin}\,F}) + M].\;[N\,(\frac{\text{ſin}\,(120^\circ - \eta)}{\text{ſin}\,F} - 1) + M)}}$$

$$= \sqrt{\frac{M - N\,(1 + \frac{\text{ſin}\,C\,120^\circ - \eta)}{\text{ſin}\,F}}{M + N\,(1 + \frac{\text{ſin}\,(120^\circ - \eta)}{\text{ſin}\,F})}}.$$

Letztere Formel iſt nur brauchbar, wenn N $(1 + \frac{\text{ſin}\,(120^\circ - \eta)}{\text{ſi}\,F})$ kleiner iſt als M.

Hat man auf die Art die Winkel F und ω gefunden: ſo erhält man den APD = F + 2ω.

Hierauf ſuche man den Winkel, BAD = 60° — $\frac{1}{2}$ F — ω;

Aus dieſen aber, und der AB Streichen und deſſen Beſchaffenheit das Streichen der AD und deſſen Beſchaffenheit.

Und endlich die ſöhlige Länge von AD = 2. 0,5773. M. ſin ($\frac{1}{2}$ F + ω).

Giebt man dieſe nach ihrer ebenfalls gefundenen Lage und Größe von der nach dem 5ten Abſatze beſtimmten Oertung aus ab: ſo hat man den verlangten Lagerungspunkt.

2. 1) AD = 2. 0,5773. M. ſin ($\frac{1}{2}$ F + ω) giebt auch die ſöhlige Länge, der von A bis D zu treibenden Förderſtrecke.

2) Die

2) Die ſöhlige Länge der Förderſtrecke von B bis D findet ſich

$= (1 + 2 . 0{,}5773 . \sin (\tfrac{1}{2} F + \omega) . M . \cos E$

wo E ein Winkel, deſſen Sinus:

$$= \frac{2 . \sin (30^\circ - \tfrac{1}{4} F - \tfrac{1}{2} \omega)}{1 + 2 . 0{,}5773 . \sin (\tfrac{1}{2} F + \omega)} . \sqrt{(2 . 0{,}5773 . \sin \tfrac{1}{2} (F + \omega))}.$$

3) Die ſöhlige Länge der von C bis D zu treibenden Förderſtrecke erhält man

$= (N + 2 . 0{,}5773 . \sin (\tfrac{1}{2} F + \omega) . M) \cos G$;

wo G ein Winkel, deſſen Sinus

$$= \frac{2 . \sin (\tfrac{1}{2} \eta + \tfrac{1}{4} F + \tfrac{1}{2} \omega - 30^\circ)}{(N + 2 . 0{,}5773 . M) \sin (\tfrac{1}{2} F + \omega)} . \sqrt{(2 . 0{,}5773 . M . N . \sin C \tfrac{1}{2} F + \omega))}.$$

Entfernung kürzeſte zwiſchen vier Oertern zu finden.

Aufgabe. Für vier in einer ſöhligen Ebene liegende Punkte A, B, C, I, einen ſeigern Förderſchacht darzwiſchen zu legen, dergeſtalt, daß bis zu ihm, von genannten Punkten weg, der kürzeſte Weg ſey. Fig 1118.

Auflöſung. A) Durch Zeichnung. 1) Man verrichte durch I, A, B, C einen Zug.

2) Verzeichne dieſe Punkte im Grundriß.

3) Ziehe AB, BC, CI, und IA; dann die Diagonalen BI und AC.

4) Wo ſich dieſe in D ſchneiden, da muß der verlangte Förderſchacht, die ſöhlige Ebene ſo treffen, daß die Summe der ſöhligen Längen, der von A, B, C, I nach D zu treibenden Förderſtrecken AD, BD, CD und ID ein Kleinſtes iſt.

5) Man bringe nun die Oertung eines dieſer Punkte z. E. A auf die Ebene, wo der Lagerpunkt angegeben werden ſoll.

6) Und gebe von dieſer eine ſöhlige Linie ab, deren Lage und Größe mit der AD einerley iſt.

B Durch Rechnung. 7) Aus dem Zuge kann man der Linien AB, BC, CI und IA, Größen und Streichen berechnen; wie auch letzteres von IB und AC:

8) Auch läßt ſich der Winkel ADB und ABD finden.

9) Dann hat man $AD = \frac{\sin ABD . AB}{\sin ADB}$.

10) Nun thue man was der 5te und 6te Abſatz verlanget, wobey man ſich erinnern muß daß der AD Lage einerley iſt mit der, der AC:

Auf die Art erhält man den verlangten Lagerungspunkt.

2. Die ſöhlige Länge der Förderſtrecke von A bis D iſt in (1. 9)) gefunden worden, aber die ſöhligen Längen der Förderſchachte

$$BD = \frac{AB . \sin BAD}{\sin ADB}$$

$$BD = \frac{BC . \sin DBC}{\sin ADB} \text{ und}$$

$$ID = \frac{IC . \sin DCI}{\sin ADB}.$$

Entgegengeſetzte Größen, ſiehe Größen.

Entgegengeſetzte Hyperbeln, ſiehe Hyperbeln.

Entgegengeſetzte Kegelſchnitte, ſiehe Kegelſchnitte.

Entgegengeſetzte Winkel, ſiehe Winkel entgegengeſetzte.

Entwerfen, heißt ein Land nach dem gemachten Bemerkungen (Feldbemerkungen) beym Meſſen in Grund zu legen, oder eine Zeichnung davon zu verfertigen. Man ſehe hievon dem Artickel: Riß zu verfertigen.

Epicycloides, ſind krumme Linien, welche erzeugt werden, wenn ein Cirkel ſich auf der Peripherie eines andern Cirkels herum bewegt. Der Herr Römer hat gefunden, daß dieſes die beſte Figur ſey, welche die Kammen in den Rädern haben müſſen, wenn ſie die geringſte Reibung verurſachen ſollen, ſiehe Radlinie.

Epicyklometrie, dieſes iſt eine Wiſſenſchaft allerley Arten von Radlinien aufzureißen, auszumeſſen, und ihre Eigenſchaften zu unterſuchen. Man ſehe Radlinien zu ziehen.

Epicyklus, heißt ein Inſtrument, vermittelſt deſſen man die Radlinien ziehen kann, ſiehe Radlinienzieher.

Epiſemia, ſind im griechiſchen gewiſſe Charaktere, deren man ſich zur Bezeichnung einiger Zahlen bedient. Die Griechen haben zwar keine beſonderen Zahlzeichen, ſondern bedienen ſich, wie andre morgenländiſche Völker der Buchſtaben des Alphabets, ſo daß α, 1; β, 2; γ, 3; ι, 10; κ, 20; ρ, 100; σ, 200; α, 1000; β, 2000; u. ſ. w. bedeutet. Sie laſſen aber die Buchſtaben nicht in ihrer Ordnung fortlaufen, ſondern ſetzen gewiſſe Charaktere dazwiſchen, die einige beſtimmte Zahlen anzeigen, und dieſe nennen ſie επισημα. Dieſer Zeichen ſind drey; das erſte iſt ϛ, und bedeutet ſechs, es wird zwiſchen ε welches fünf, und zwiſchen ζ, welches ſieben bedeutet hinein geſetzt. Das andere Epiſemon iſt ϟ, und bedeutet neunzig, es wird ſolches zwiſchen π, achtzig, und ρ hundert geſetzt; es wird wohl, weil es vor dem ρ ſteht, μαντιρρω, genannt: das dritte iſt endlich ϡ und bedeutet neunhundert, es heißt Σαμπι. Unter dieſen wird das erſte im vorzüglichen Verſtande Epiſemon genannt, es heißt auch ſti, auch ſtigma, weil dieſe Figur zu Anfang der Wörter, anſtatt στ, gebraucht wird. Von allen dieſen ſind die Figuren auf den alten Denkmälern verſchieden (ſ. Montfaucon Palaeographia graeca p. 124 ſeqq.)

Erbbereiten, Erbliches Vermeſſen, heißt eine Vermeſſung, die mit gewiſſen Feyerlichkeiten geſchiehet. Es wird dabey das Feld gehörig verlochſteinet, auch werden jedem Lochſteine gewöhnliche Zeichen beygelegt.

Beobachtungen vor dem Erbvermeſſen.

Wenn eine Zeche auf einem Gange einmal Ausbeute gegeben, und Erzt vor Ort ſowohl als über und unter ſich anſtehen hat: ſo ſind die Gewerken dieſer Zeche verbunden, ihr Feld durch Erbvermeſſen zu ſich zu nehmen, und daher Erbbereiten zu laſſen.

Dieſes aber muß jedermann bekannt gemacht werden. Nach den Bergordnungen ſoll dieß 14 Tage zuvor durch Ausrufung auf öffentlichen Kirchwegen und durch Anſchlagung an ſolchen Orten geſchehen, wo man öffentliche Befehle und dergleichen anſchlagen läßt. In Freyberg iſt es gewöhnlich, das Erbvermeſſen 3 aufeinanderfolgende Sonnabende zuvor auf öffentlichem Markte zu verkündigen, und ſo zu Jedermanns Wiſſen zu bringen.

Nächſt dieſer öffentlichen Bekanntmachung ſoll das Bergamt die Entſchlieſſung eines zu haltenden Erbbereitens den Gewerken der vermeßwürdigen Zeche beſonders zu wiſſen thun, indem man dem Schichtmeiſter dieſer Zeche den Tag des Vermeſſens bekannt macht, und dieſer ſelbigen ſeinen Gewerken durch einen Umlauf, damit ſie ſelbſt erſcheinen oder Deputirte ſenden. Den

ſchnü-

ſchnürenden oder angränzenden Gewerken muß der Vermeßtag ebenfalls gemeldet werden, obgleich durch das öffentliche Ausrufen dieſe vornehmlich citiret werden.

Bey allen dieſen Verrichtungen iſt es nothwendig, daß der Markſcheider des Reviers, worinne die vermeßwürdige Zeche liegt, das Hauptſtreichen des Ganges, worauf vermeſſen werden ſoll, nach dem tiefen Stolln, oder doch nach einer Hauptſtrecke, die am längſten im baulichen Weſen erhalten wird, und wo alſo die Erbſtufen am längſten bleiben, abgiebt: den Fund, wenn er nicht am Tage angewieſen iſt, zu Tage ausbringt, durch dieſen eine Linie in dem gefundenen Hauptſtreichen abſteckt, und das Feld, was vermeſſen werden ſoll, gehörig abpfählt. Dabey muß der Markſcheider alles das beobachten, und bey ſeinem Zuge darauf Rückſicht nehmen, was ihm etwa auſſer dem noch vom Bergamte angeordnet wird.

Beobachtungen bey Erbvermeſſen.

Was nach Maßgebung der Verleihung und Verträge vermeſſen werden ſoll, und was ſonſt wegen der Markſcheide oder Maßen rechtskräftig abgehandelt worden iſt, muß aus den Bergbüchern an den Vermeſſer auf glaubwürdige ſchriftliche Art ausgeſtellt werden. Dieſes wird nur in Freyberg nöthig ſeyn, wo der Ebvermeſſer der regierende Bürgermeiſter iſt, in andern ſächſiſchen Bergwerken aber der Bergmeiſter des Reviers, wozu die Zeche gehört. Der Bergſchreiber, in Freyberg der Stadtſchreiber, muß öffentlich verleſen, was vermeſſen werden ſoll, und etwa ſonſt deshalb durch Vertrag errichtet worden iſt.

Nach einigen Bergordnungen, (als der Braunſchweigiſchen, Hohnſteinſchen ꝛc.), ſoll der Lehnträger oder Schichtmeiſter ſchwören, das der Gang, worauf er vermeſſen laſſen will, ſein gemutheter Gang iſt. Dieſer Eyd iſt jetzt nicht nöthig, und auch nicht in der Churſächſiſchen Bergverordnung anbefohlen, (Churfürſt Chriſtian Bergordnung, XXIX Art.; Churfürſt Moriz Bergordnung, P. I. tit. 35.), zumal die Richtigkeit der Beſtätigung ſich aus dem Verlegbuche ergeben muß.

Bevor noch die Vermeſſung ſelbſt wirklich vorgenommen wird, müſſen diejenigen aufgerufen werden, die vielleicht etwas dawider einzuwenden haben; und alsdann wird bey Strafe 20 Mark Silber in die Schnur zu greifen verboten.

Hiernächſt wird nun die Vermeſſung nach Inhalt der Belehrung vorgenommen. In Freyberg hält der regierende Bürgermeiſter die Schnur da an, wo der Markſcheider des Erbvermeſſens wegen, den Anhaltepunkt der Fundgrube angegeben hat, der Stadtſchreiber aber ziehet ſelbige auf dem abgeſteckten Hauptſtreichen bis zu Ende der ganzen oder halben Fundgrube fort, dann hält da der Bürgermeiſter wieder an, und der Stadtſchreiber zieht die Schnur bis zu Ende der nächſten Maße; u. ſ. w. w. v. Wo ſich die Fundgrube oder jede Maße endet, da iſt dem Schichtmeiſter erlaubt, im Freyem einen Sprung rückwärts zu thun; ſo viel Feld er nun erſpringt, ſo viel wird der Fundgrube und jedem Maße zugeſetzt, und wo er in der Linie des Hauptſtreichens hingeſprungen iſt, da wird von dem Geſchwornen ein Lochſtein geſetzt, und unter ſelbigem die dazu gehörigen Zeichen, als Glas, Kieſel, Ziegel, Kohlen, gelegt. Der Lochſtein hat zwey breite und zwey ſchmale Seiten. Auf der einen breiten Seite wird das Jahr und Quartal des Erbvermeſſens, wie auch des Ganges Nahme, und ob ſich da eine Fundgrube, ganze oder halbe, oder ein Maß und welche endet, gehauen; auf der

andern

andern breiten Seite aber, welche Maße ſich anfängt. Auf der einen ſchmalen Seite wird der Berghauptleute, und auf der andern des Bergmeiſters Name eingegraben.

Nachdem die Meſſung, wie jetzt erzählt, geſchehen iſt, hat der Stadtſchreiber darüber eine Regiſtratur zu fertigen, worinne er den Ort des Anhaltens, die Stunde des Ganges Hauptſtreichens, die Benennung des Ganges, wenn, wie und wer vermeſſen hat, und wie die Lochſteine geſetzet worden ſind ꝛc. genau angeben ſoll; darauf muß er dieſe Regiſtratur den Anweſenden vorleſen, und ſodann in das Vermeßbuch eintragen.

Endlich iſt es nöthig von dem Markſcheider die am Tage geſetzten Lochſteine in die Grube, auf die Strecke oder den Stolln bringen zu laſſen, nach der oder dem des Ganges Hauptſtreichen beſtimmt worden iſt.

Beyers Bergmänniſche Nebenſtunden 2. Th. S. 231.
Lehmanns kurze Nachricht vom Erbbereiten. Dresden 1750. 4.

Erbliches Vermeſſen, ſiehe Erbbereiten.

Erbſchnur, eine grüne ſeidene Schnur, womit bey Erbvermeſſungen gemeſſen wird.

Erbſtufe iſt ein von dem Markſcheider in den Geſtein eingehauenes Zeichen, wenn er die Ortung in der Grube gefället, woraus man ſehen kann, bey welchem Punkte die über Tage vermeſſene und mit Lochſtein bemerkte Fundgrube ausgehet oder ſich endiget. Es iſt alſo ein Grenzzeichen.

Erbſtufe fortbringen, den Punkt der eingehauenen Erbſtufe in mehrerer Teufe durch ein Zeichen anmerken. Man ſagt auch: die Stufe in die Grube fällen.

Erbteufe, das Maß, welches zwiſchen dem Raſen der Grube und der Waſſerſeige des Stollens, ingleichen einem höhern und tiefern Stolln erfordert wird. In Anſehung einer Grube muß es wenigſtens 10 Lachter und einen Gräpel oder eine Spanne mit der Waſſerſeige des Stollns unter dem Raſen einkommen. In Anſehung eines höhern Stollns muß der tiefere, wenn er jenem die Erbſtollnsgerechtigkeit benehmen will, in ſtücklichen oder jäh anſteigenden Gebirgen ſieben Lachter, und in ſänftigen drey und eine halbe Lachter mit ſeiner Waſſerſeige unter der Waſſerſeige des obern Stollns einbringen.

Erbtheilungs-Rechnung. Es finden ſich oft bey Vertheilungen der Erbſchaften Bedingungen, welche die Beſtimmung des Theils eines jeden Erben einem ungeübten ſchwer machen. Die wichtigſten dieſer Fälle ſollen jetzt kürzlich betrachtet werden. Fälle wie folgende:

Die ganze Verlaſſenſchaft ſoll in 12 gleiche Theile getheilt werden, und A 5 B 4 und C 3 ſolcher Theile erhalten; oder A ſoll von der Verlaſſenſchaft ſelbſt $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$ und C $\frac{1}{6}$ bekommen; gehören hieher nicht, ein jeder ſieht da von ſelbſt, wie die Rechnung einzurichten ſey.

Es ſollen ſich 3 Perſonen A, B und C in eine Erbſchaft von 10000 Rthl. ſo theilen, daß A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{2}$ und C $\frac{3}{4}$ bekommt. Wenn eine ſolche Beſtimmung da iſt, ſo ſieht man bald, daß der Sinn derſelben nicht ſeyn könne, daß

A — $\frac{1}{3}$ × 10000 Rthl. = 3333 Rthl. 8 gl.
B — $\frac{1}{2}$ × 10000 Rthl. = 5000 Rthl. und
C — $\frac{3}{4}$ × 10000 Rthl. = 7500 Rthl. erhalten ſolle. Denn ſonſt müßte 15833 Rthl. 8 gl. zu vertheilen gegeben ſeyn. Hierdurch wird weiter nichts als das Verhältniß der Theile von A, B und C gegen einander angezeigt, und

Sinn

Sinn der Aufgabe iſt: es ſollen ſich A, B und C in 10000 Rthl. ſo theilen, daß ſich ihre Theile gegen einander, wie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ verhalten. Bringt man nun dieſe Brüche auf einerley Benennungen, ſo erhält man anſtatt derſelben $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{12}$ und anſtatt des gedachten Verhältniſſes die Zahlen 4, 6, 9. Man muß alſo die 10000 Rthl. in 19 Theile theilen, und davon A 4, B 6, C 9 geben, ſo daß alſo

A $\frac{4}{19} \times$ 10000 Rthl. = 2105 Rthl. 6 gl. $3\frac{15}{19}$ Pf.
B $\frac{6}{19} \times$ 10000 Rthl. = 3157 Rthl. 21 gl. $5\frac{13}{19}$ Pf.
C $\frac{9}{19} \times$ 10000 Rthl. = 4736 Rthl. 20 gl. $2\frac{10}{19}$ Pf.
und alle in allem 10000 Rthl. erhalten.

Wenn alſo eine Summe in Theile getheilet werden ſoll, und die Größe dieſer Theile durch Brüche bezeichnet iſt, welche zuſammen genommen nicht ein Ganzes ausmachen: ſo muß man die Vertheilung ſo machen, daß der Antheil eines jeden in der ganzen zu vertheilenden Summe ſo enthalten iſt, als der für den Antheil eines Jeden gegebene Bruch in der Summe der Brüche. Das Exempel des vorhergehenden kann zur Erläuterung dienen.

Geſetzt daß folgender Fall vorkäme: Es ſollen ſich 4 Brüder in eine Erbſchaft von 1000 Rthl. dergeſtalt theilen, daß der 2te 100 Rthl. weniger bekommt als der Aelteſte, der 3te 75 Rthl. mehr als der 2te, und der 4te 60 Rthl. mehr als der 3te; ſo ſieht man nach einigen Nachdenken bald, daß man nur irgend einen Theil zu wiſſen brauche, um darauf alle übrige mit leichter Mühe beſtimmen zu können. Man vergleiche daher alle zu ſuchenden Theile gegen irgend einen derſelben, z. E. gegen den erſten: ſo iſt der Theil des

1ten = 1
2ten = 1 — 100 Rthl.
3ten = 1 — 100 Rthl. + 75 Rthl. = 1 — 25 Rthl.
4ten = 1 — 100 Rthl. + 75 Rthl. + 60 Rthl. = 1 + 35 Rthl.

und alle 4 Theile zuſammen = 4 — 90 Rthl. d. h. der Theil des älteſten viermal genommen iſt um 90 Rthl. größer als 1000 Rthl. Iſt nun dieß, ſo ſind 1000 Rthl. + 90 Rthl. oder 1090 Rthl. das Vierfache des Theils des Aelteſten, und ſein Theil alſo ſelbſt $\frac{1090}{4} = 272\frac{1}{2}$ Rthl. Es erhält alſo

der Aelteſte — $272\frac{1}{2}$ Rthl.
— 2te — $172\frac{1}{2}$ —
— 3te — $247\frac{1}{2}$ —
— 4te — $307\frac{1}{2}$ — und alle
alſo 1000 Rthl.

Auf eine ähnliche Art kann man ſich in ähnlichen, auch noch verwickeltern Fällen helfen. Da übrigens dergleichen Fälle ſo häufig eben nicht vorkommen, ſo iſt es ohnſtreitig genug, die Verfahrungsart dabey an einem Exempel gezeigt zu haben.

Es ſoll eine Erbſchaft von 20000 Rthl. unter 3 Söhne und 2 Töchter dergeſtalt vertheilt werden, daß ein Sohn ſo viel als der andere, und eine Tochter auch ſo viel als die andere erhalten ſoll; der Theil eines Sohnes ſoll aber 4mal ſo groß ſeyn, als der Theil einer Tochter. Es wird gefragt, wie viel

ſowohl ein jeder der Söhne als eine jede der Töchter erhalten müſſe? Weiß man hier z. E. wie viel eine Tochter erhält, ſo iſt alles übrige bekannt. Setzt man nun den Antheil einer Tochter 1, ſo erhält von den zu vertheilenden 20000 Rthl.

die älteſte Tochter 1
— 2te — 1
der älteſte Sohn 4
— 2te — 4
— 3te — 4, alle alſo zuſammen einer Tochter 14mal, das heißt das ganze Erbtheil der 20000 Rthl. iſt 14mal ſo groß, als der Antheil einer Tochter. Es erhält alſo eine Tochter

$$\frac{20000}{14} = \frac{10000}{7} = 1428 \text{ Rthl. } 13 \text{ gl. } 8\tfrac{4}{7} \text{ Pf.}$$

und ein Sohn 5714 Rthl. 6 gl. $10\frac{2}{7}$ Pf.
als das Vierfache davon. Da alſo bekommen ſoll

die älteſte Tochter 1428 Rthl. 13 gl. $8\frac{4}{7}$ Pf.
— 2te — 1428 — 13 — $8\frac{4}{7}$ Pf.
der älteſte Sohn 5714 — 6 — $10\frac{2}{7}$ Pf.
— 2te — 5714 — 6 — $10\frac{2}{7}$ Pf.
— 3te — 5714 — 6 — $10\frac{2}{7}$ Pf.

ſo erhalten ſie 20000 Rthl., und die herausgebrachte Beſtimmung iſt die wahre.

Ein Vater ſtirbt und hinterläßt am Vermögen 22000 Rthl. Nach dem Teſtamente ſoll ſeine Frau welche ſchwanger iſt, wenn ſie einen Sohn zur Welt bringt, von dem ganzen Vermögen $\frac{1}{3}$ und der Sohn $\frac{2}{3}$; wenn ſie aber mit einer Tochter niederkömmt $\frac{3}{5}$ und die Tochter $\frac{2}{5}$ erhalten. Es fügt ſich aber, daß die Mutter mit einem Sohne und einer Tochter zugleich niederkommt. Es iſt die Frage, wie viel ein jeder von dem hinterlaſſenen Vermögen bekommen muß, wenn des Vaters Willen erfüllt werden ſoll. Betrachtet man dieſe Aufgabe genau, ſo findet man bald, daß der Sohn noch einmal ſo viel als die Mutter und die Tochter nur $\frac{2}{3}$ des Antheils der Mutter bekommen ſoll. So oft daher die Mutter 1 erhält bekommt der Sohn 2, und die Tochter $\frac{2}{3}$ oder ſo oft die Mutter 3 erhält, bekommt der Sohn 6 und die Tochter 2. Man hat alſo nur nöthig das ganze Vermögen in 11 Theile zu theilen, und der Mutter 3, dem Sohne 6 und der Tochter 2 ſolcher Theile zugeben. Es erhält alſo die Mutter 6000 Rthl., der Sohn 12000 Rthl. und die Tochter endlich 4000.

Wenn das ſämmtliche hinterlaſſene Vermögen in dem Falle, daß die erbenden Kinder noch minderjährig ſind, ſo lange ungetheilt bleibt, bis das älteſte großjährig geworden, und unterdeß von den Intereſſen die Erziehungskoſten beſtritten und das übrige zum Kapitale geſchlagen wird; ferner das älteſte Kind nur ſein en Theil erhalten, und mit dem übrigen eben ſo als vorher mit dem ganzen Vermögen bis zur Großjährigkeit des 2ten Kindes u. ſ. f. verfahren werden ſoll; ſo iſt das ein Fall, deſſen Berechnung zwar weitläuftig aber nicht ſchwer iſt, und daher auch nur berührt werden darf.

Alle dieſe Aufgaben laſſen ſich leicht vermittelſt der Buchſtabenrechnung auflöſen, ſiehe Aufgabe beſtimmte, von welchen beſonders die S. 158 u. 165 hierher gehören.

Fol-

Folgender beſonderer Fall, verdient wohl hier eine Stelle.

Das Teſtament des *Peter Vague*.

Peter Vague vermachte in ſeinem Teſtamente unter andern 2000 Pfund auf folgende Weiſe zu vertheilen. Es ſollte nähmlich ſeine Frau Blanch, die damals ſchwanger war, wenn ſie einen Sohn gebähren würde ein Drittel von dieſer Summe, nähmlich 666 L. 13 S. 4 D. der Sohn aber die Hälfte, nähmlich 1000 L, und den übrigen 6ten Theil, nähmlich 333 L, 6 S. 8 D. ſein Vetter Abel Briſk, den er auch zugleich als Executor eingeſetzt hatte, empfangen. Der Erblaſſer erklärte ferner in ſeinem letzten Willen und befiehlt, daß, wenn ſeine Frau eine Tochter gebähren würde, dann ſollte ſie, ſeine Frau, die Hälfte von 2000 L. haben, und die Tochter nur den dritten Theil, und die übrigen 333 L. 6 S. 8 D. ſein Vetter Abel wie oben gemeldet. Nachdem dieſes Teſtament ausgefertigt und überliefert worden, ſtirbt Peter der Teſtator, und nach ſeinem Tode kommt ſeine Frau Blanch mit Zwillingen nieder, nähmlich mit einem Sohne und einer Tochter.

Es iſt nun die Frage, was bey dieſer Begebenheit Blanch ſeine Frau, Abel ſein Vetter, und jeder der Zwillinge an dem Vermächtniſſe von 2000 L. für Anforderung machen können. Oder wie und in welcher Proportion und an wem die Vormünder dieſe Summe geſetzmäßig zertheilen und bezahlen müſſen.

I. Beantwortung.

von Iohn Chapman Schulmeiſter zu St. Mary Cray in Kent.

Es iſt aus dem Inhalte des letzten Willens deutlich zu erſehen, die Tochter ſollte einen Sechstel mehr haben als der Vetter, die Frau einen Sechstel mehr, als die Tochter, und der Sohn $\frac{1}{6}$ mehr als die Frau. Aus dieſen Umſtänden ſind die proportionalen Theile eines jeden Antheils in dem Vermächtniſſe wie folget:

Der Vetter $\frac{1}{6}$, die Tochter $\frac{2}{6}$, die Frau $\frac{3}{6}$, der Sohn $\frac{4}{6}$, alſo zuſammen $\frac{10}{6}$, ſo iſt von 2000 L. $\frac{1}{10}$ = 200 L. der Antheil des Vetters; hieraus erhellet daß die Tochter 400, die Frau 600 und der Sohn 800 L. bekommen müſſe.

II. Beantwortung.

Von T. Cunningham. Stud. in Midille-Tempſe.

Die Begebenheit, die in dieſem Verfalle ſich zugetragen, hat man nicht vorher ſehen können, folglich hat auch der Erblaſſer deshalb nichts verordnet. Es ſollte ſcheinen, daß der letzte Wille den Geſetzen nach zu verwerfen wäre. In dieſem Falle ſollte der Vetter keinen Antheil haben, indem man dafür halten müſſe; der Erblaſſer ſterbe ohne ein Teſtament gemacht zu haben. Wenn dem alſo, ſo iſt das perſönliche Vermögen, nach dem Edikt der Vertheilung, auf Frau und Kinder gegründet, daß nähmlich der Frau ein drittel, und die übrigen $\frac{2}{3}$ den letztern zufallen. Weil aber aus dieſem Vorfalle klärlich erhellet, die Abſicht des verſtorbenen ſey; ſeinem Sohn $\frac{1}{3}$ mehr als ſeiner Frau zu geben, und der Frau $\frac{1}{3}$ mehr als der Tochter, ſo redet die Billigkeit *) (welche die Strenge des Geſetzes verbeſſert und mäßiget, auch den letzten Willen nach der Abſicht des Erblaſſers einrichtet und förmlich macht) die ganze Erbſchaft ſollte in 4 Theile getheilet werden. Der Sohn ſollte haben 900 L. die Tochter 400 L. und der Vetter 100. Die Frau 600 L. Solchergeſtalt iſt der Frauen Antheil $\frac{2}{3}$ des Sohns und der Tochter Theil $\frac{2}{3}$ von der Frauen Theil nach der Abſicht des Teſtators.

*) In omnibus quidem, maxime tamen in jure, aequitas ſpectanda eſt. Digeſt. 50. 17. 19. Quoties aequitatem deſiderii naturalis ratio aut dubitatio juris moratur, juſtis decretis res temperanda eſt Digeſt 50 17. 85. die Entſcheidung in einem mit dieſem beynahe ähnlichen Falle des Julians ſiehe Digeſt. 28. 2. 13.

III. Beantwortung von P. P. datirt den 16. Aug. 1758.

Ich habe die vorhergehenden Beantwortungen, welche des Peter Vague Vermächtniß betrifft, überleget, und kann nicht anders als von ihren Beſtimmungen abgehen. Denn wie ich meine, ſo haben ſie beyde die Abſicht die Erblaſſers nicht auf eine annehmliche Art entſchieden.

Herr Chapmann hat ſeine Geſchicklichkeit als ein Schulmeiſter durch Exempel erklärt, und Herr Cunningham hat ſeine Wiſſenſchaft in den Geſetzen dargethan: allein keiner von beyden hat, meiner Meinung nach, die Streitfrage recht in Ordnung gebracht. Ich glaube die wahre Meinung des Erblaſſers gehet dahin, daß die Frau $\frac{2}{3}$ von des Sohns Vermächtniß, die Tochter $\frac{2}{3}$ von der Mutter ihren Antheil, und der Vetter die Hälfte von der Tochter Erbſchaft empfangen ſolle. Wenn dem alſo, ſo müſſen wir die Brüche zu einem allgemeinen Nenner bringen, und alsdann einer jeden Person Antheil nach den Regeln der Billigkeit beſtimmen. Nach dieſem Verhältniſſen wird man bald entdecken, daß der Theil

des Sohns ſey	L. 857. 6(42
der Mutter	L. 571. 18
der Tochter	L. 380. 40
des Vetters	L. 190. 20

IV. Beantwortung.

Von I. Hooley von Tollerton bey Nottingham.

Ein jeder Leſer wird leicht begreifen, daß die Mutter ein Recht 2 zu nehmen habe, ſo oft der Sohn 3 nimmt; die Tochter 2 ſo oft die Mutter 3 bekommt; und da der Vetter $\frac{1}{6}$ des ganzen Vermächtniſſes haben ſoll, ſo hat er nur auf den dritten Theil des Sohns Anrecht.

Da es ſich nun zuträgt, daß die 4te Perſon, woran man vorhero nicht gedacht, hinzukommt, die unſtreitig eine Anforderung auf einen Theil des Vermächtniſſes mit hat; ſo nehme ich mir die Freyheit, eine ſolche Zahl zu meinen Theiler (Diviſor) anzunehmen, daß jeder Antheil ſeine gefügte Proportion habe.

Z. E. Geſetzt, des Sohnes Zahl ſey 18; der Mutter 12; der Tochter 8; des Vetters 6 als des Drittels des Sohns: ſo machen dieſe Zahlen zuſammen genommen 44 als den Theiler aus. Darauf ſaget man 44: 2000 = 18: 818 L. 3 S. 7 D. $\frac{1}{2}$. $\frac{24}{44}$ — des Sohns Theil. So muß

die Mutter haben	545. L.	9 S.	1 D. $\frac{16}{44}$
die Tochter	363.	12.	8. $\frac{1}{2}$. $\frac{40}{44}$
der Vetter	272.	14.	6. $\frac{1}{2}$. $\frac{8}{44}$.

Solchergeſtalt iſt der Frauen ihr Antheil $\frac{2}{3}$ von des Sohnes; der Tochter $\frac{2}{3}$ von der Mutter und des Vetters $\frac{1}{3}$ von des Sohns Theil. und zwar wie es im Teſtamente verordnet iſt.

V. Beantwortung.

Vom A. . dies.

In den vorhergehenden Beantwortungen, auſſer in der zweyten, ſind zwar ſolche Eintheilungen zum Grunde gelegt, die dem Willen des Erblaſſers nahe

nahe zu kommen ſcheinen, die aber wirklich demſelben entgegen ſind, ſobald man ſie von einer andern Seite betrachtet. Ich finde z. E. in der Aufgabe deutlich daß die Tochter noch einmahl ſo viel als der Vetter und der Sohn 3mal ſo viel als der Vetter haben ſollen. Da der Erblaſſer bey dieſen dreyen Perſonen gar keine Ausnahme macht, ſo muß meines Erachtens, auch das vorgeſchriebene Verhältniß in Anſehung ihrer Theile beobachtet werden. Hiervon ſind aber alle 4 Verfaſſer der vorhergehenden Beantwortungen abgewichen.

Die Mutter iſt die einzige, bey welcher der Vater eine Ausnahme macht, dieſe ſoll in einem Falle 2 in den andern aber 3 haben, ſo oft der Vetter eins bekommt. Da nun beyde Fälle zugleich eintreten, ſo wiederfährt ihr Recht, wenn ſie ſtatt 2 oder 3, $2\frac{1}{2}$ bekommt. Die Verhältniße werden demnach folgende ſeyn.

Des Sohns 3 oder in ganzen Zahlen	6
der Mutter $2\frac{1}{2}$	5
die Tochter	2
der Vetter	1
Summa	17

Alſo giebt 2000 was 6?	Facit	$705\frac{15}{17}$
5?	—	$588\frac{4}{17}$
4?	—	$470\frac{10}{17}$
2?	—	$235\frac{5}{17}$
	Summa	2000.

Dieſes Reſultat ſcheint dem Herausgeber das alleinige richtige zu ſeyn; er fand eben dieſes, als er dieſe Aufgabe berechnete, ehe er eine von den verſchiedenen Auflöſungen laß. Nur Vorſtellungs Art des Falles, und die Berechnung ſelbſt war anders.

Es ſtehet nirgend in der Verordnung daß das, was der Vetter erhalten ſolle, ein Theil von dem, was der Sohn oder die Tochter bekommen ſolte, ſey, ſondern in einem Falle ſtehet $\frac{1}{6}$ der Erbſchaft, und in zweyten Falle iſt dieſes $\frac{1}{6}$ ſelbſt ausgeworfen.

		(12
Iſt nun das Ganze	$= x$	
ſo bekommt der Vetter	$\frac{x}{6}$	$2x$
der Sohn $\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$6x$
die Tochter $\frac{x}{3}$	$\frac{x}{3}$	$4x$
die Frau $\frac{x}{3}$ oder $\frac{x}{2}$;	$= \frac{5x}{12}$	$5x$

$$\frac{17x}{12} = 2000$$

$$17x = 24000$$

$$x = \frac{24000}{17} = 1411,77$$

alſo

Alſo der Vetter $\frac{1411,77}{6} = 235,29..$

der Sohn $\frac{1411,77}{2} = 705,88..$

die Tochter $\frac{1411,77}{3} = 470,57..$

die Mutter $\frac{5 \cdot 1411,77}{12} = 588,23..$

Ob nun gleich dem Herausgeber dieſe Auflöſung die richtigſte zu ſeyn ſcheint, ſo iſt doch noch ein Fall möglich, wie der Erblaſſer gedacht haben kann. Wenn meine Frau einen Sohn bringt, ſo ſoll ſie den 3ten Theil von 2000 erhalten, bringt ſolche aber eine Tochter, ſo ſoll ſie die Hälfte von 2000 Thaler haben. Nun hat ſolche beyden Forderungen ein Genüge gethan, folglich muß ſolche auch beyde Prämien haben. Hiernach kommen.

(6

Mutter $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5x}{6}$ | $5x$

der Sohn $\frac{x}{2}$ | $3x$

die Tochter $\frac{x}{3}$ | $2x$

der Vetter $\frac{x}{6}$ | x

$$\frac{11x}{6} = 2000$$

$$11 . x = 12000$$

$$x = 1090,9$$

Alſo die Mutter $\frac{5 \cdot 1090,9}{6} = 909,08$

der Sohn $\frac{1090,9}{2} = 545,45$

die Tochter $\frac{1090,9}{3} = 363,63$

der Vetter $\frac{1090,9}{6} = 186,84$

Summe 2000,00

VI. Beantwortung.

von P. L. Gröte.

— Ich entſcheide, weil kein Geſetz vorhanden iſt, welches vorſchreibet wie es in einem ſolchen Falle ſoll gehalten werden, nach der Billigkeit, und dieſe heißt mir bey der Vertheilung aus den in beyden Fällen, auf welche der Erbleſſer ſein Augenmerk gerichtet, vorgeſchriebenen Verhältniſſen für eine jede Perſon dasjenige heraus zu nehmen, nach welchem dieſelbige das mehreſte von der zutheilenden Summe zu empfangen hat. Ich halte dieſen Satz um deſ-

deswillen für billig, weil eines Theils die vortheilhafteſten Proportionen, nicht etwa für einen oder den andern, ſondern für einen jeden Theilnehmenden zum Grunde gelegt wird; andern Theils aber dieſe aus der Urſache ſolches fordern zu können berechtiget zu ſeyn ſcheinet, weil ein jeder zur Unterſtützung ſeines Verlangens vorbringen kann, daß die Bedingung unter welcher der Erblaſſer gewollt, daß er z. E. die Hälfte des Vermögens haben ſollte, erfüllet ſey. Es iſt aber ferner billig daß ein jeder ſeinen Antheil in der Maße empfangen, wie es anjetzo, da 4 Perſonen vorhanden ſind, der Erblaſſer nur jederzeit auf drey Perſonen geſehn, möglich iſt, damit dieſe 4te Perſon ebenfalls ihren Theil bekommen möge. Ich gebe alſo nach dieſem Grundſatze der Frau $\frac{1}{2}$ dem Sohne $\frac{1}{2}$, der Tochter $\frac{1}{3}$ und dem Vetter $\frac{1}{6}$, mithin muß

die Frau haben	$666\frac{2}{3}$
der Sohn	$666\frac{2}{3}$
die Tochter	$444\frac{4}{9}$
der Vetter	$222\frac{2}{9}$.

Weil dieſe Vertheilung nach dem von Erblaſſer ſelbſt beſtimmten Verhältniſſen auf eine ſolche Art, wie es die Billigkeit in einem von dem Teſtator nicht vorher geſehenen Falle erforderte, geſchehen iſt, ſo iſt auch dem Willen deſſelben ſo viel möglich, gemäß gehandelt, und kann ſelbiger mithin von dieſer Seite nicht widerſprochen werden.

VII. Beantwortung.

Die Hauptſache des Erblaſſers iſt auf die Mutter und den Vetter gerichtet, welche beyde in ſeinem Leben da waren. Die Kinder waren noch nicht vorhanden, und hätte ſich ereignen können, daß die Mutter kein lebendig Kind geboren, folglich muß die wahre Proportion der Theile nach der Mutter gemacht werden.

Demnach ſetzt die Mutter bekomme	30
ſo wird der Sohn bekommen	45
nach der Proportion $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$	
die Tochter wird alsdenn bekommen	20
nach der Proportion $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$	
und der Vetter wird bekommen	19
nach der Proportion $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$ folglich	

wie 114 : 2000 = 45 : 789 94 (114tel
30 : 526 36
20 : 350 100
19 : 332 38

2000

Erbtiefſtes, das Haupttiefſte oder der tiefſte Ort, das tiefſte Geſenke einer Grube unter der Stollnteufe.

Erdhauſen (einen großen) dergeſtalt durchzugraben, daß man zu einen gegebenen Punkte hinein, und zu einem andern gegebenen Punkte herauskomme. Es ſey Fig 1119 dieſſeit des Berges ein Stab A, und jenſeits ein anderer Stab B geſetzt, von deren einem man zum andern graben ſoll. Stecket dieſſeit in beliebiger Entfernung von A eine Linie EF, und jenſeit in wiederum beliebiger Entfernung von B eine andere mit obiger parallele Linie CD aus. Ziehet von A auf EF eine Perpendikular-Linie AG und von B eine Perpendikularlinie BK auf CD und meſſet, ſowohl AG als BK. Meſſet ſo weit euch belie-

belliebet, von G nach H und eben ſo weit von K nach L. Richtet in H eine Perpendikularlinie HI und in L eine Perpendikularlinie LM auf, und machet HI = GA und LM = KB; ſo könnt ihr mit den Stäben I und M zwey andere in gerader Linie nach N und D ſtecken, alſo daß N zugleich in EF und D in CL ſtehe. Traget ihr alsdann das bereits gemeſſene HG von N nach O, wie auch von D nach P, ſo wird OABP eine gerade und mit ND parallel laufende, folglich die verlangte Linie ſeyn. Ihr könnet alſo an den Stäben OA viſiren, und nach derſelbigen Linie bey A eingraben laſſen, desgleichen nach der Linie PB bey B: ſo wird der Graben wie verlangt, durch den Berg hindurch gehen.

Erdmeßkunſt, ſiehe Geometrie.

Erdmikrometer des Herrn Rheinholds.

Fig 1120 a iſt der Radius auf welchem gewiſſe Theile nach arithmetiſcher Ordnung gemacht ſind, wornach die übrigen ſich alle richten; b iſt das Transverſal, auf welchem die nähmlichen Abtheilungen ſtehen, und c iſt ein Läufer, den man auf und niederſchieben, auch wegnehmen kann, um ihn rechts oder links zu ſtellen; bey d iſt ein Loch, um durch das Transverſal ſehen zu können; ef ſind Schrauben, womit man die Hölzer feſte ſchraubt; g iſt eine Schraube, wodurch die Meſſung geſchiehet; i iſt die Diopter, und k iſt das Loch in derſelben; l iſt ein Perpendikel das Inſtrument zu ſtellen; m iſt das Stativ, worinnen die Zunge n, ſich horizontal drehet, und durch Hülfe der Stellſchraube in o befeſtiget werden kann. Die Größe dieſes Inſtruments iſt faſt williführlich. Um jedoch etwas anzugeben, ſo kann man den Radius etwa von $1\frac{1}{2}$ Fuß machen; wornach ſich denn das übrige richtet.

Wenn nun Fig 1121 die Weite ab bekannt iſt, z. E. 100 Fuß: ſo ziehet man den Radius a Fig 1120 auf 100 heraus, und ſchiebet den Laufer ſo hoch, daß derſelbe mit dem Ort gc Fig 1121 und dem Auge in gerader Linie ſtehet, man ſchraubt die Schraube g Fig 1120 ſo weit zuſammen, daß man durch die Oeffnung h nichts weiter mehr ſehen kann, als die Dicke des Objekts. Auf dieſe Weiſe wird nicht nur der Laufer c auf dem Transverſal die Höhe des Objekts anzeigen, ſondern die Schraube g wird auch in h andeuten, wie dicke daſſelbige ſey. Jedoch iſt noch anzumerken, daß man zu der Höhe fc Fig 1121 die Höhe fb addiren müſſe. Dieſe aber wird gefunden, indem man durch das Loch d Fig 1120 ſiehet und ſich den Punkt f. Fig 1121 merket, nachmals bf miſſet.

2. Verbeſſerung des Inſtruments Fig 1122. Es iſt AB der Radius; das Transverſal CD; und der Laufer EF. In GH, IK und LM ſind Schrauben von einerley Art angebracht: welche die Dienſte der Abtheilung des vorigen Inſtruments verrichten.

In GLN ſind Scheiben, deren Beſchaffenheit Fig 1123 zu ſehen iſt. Die Schraube LM iſt in der 1124. Figur mit den Dioptern A, B vorgeſtellt. Der Diopter A lauft mit einen Zapfen in einer Krinne des Laufers EF; in deſſen Loche aber muß eine Mutter ſeyn, daß dieſer Abſeher durch das Umdrehen der Schraube vor oder rückwärts gehen könne.

Der Radius 6, das Transverſal 7 und der Laufer 3 Zoll groß, und von Meſſing gemacht.

Die Abtheilung der Scheiben kann man bey einerley Umſtänden annehmen wie man will: nimmt man z. E. einen Grad oder eine Abtheilung für einen Fuß an: ſo hält die ganze Scheibe 10 Ruthen; nimmt man ſie für 1 Zoll an,

ſo

ſo bezeichnet die ganze Kreislinie der Scheibe einen Decimalfuß, wählet man endlich ein Spatium zu einer Linie, ſo iſt das ganze ein Decimalzoll. Da dieſe Scheiben nun in dem genauen Verhältniſſe mit den Schrauben ſtehen, ſo zeigen ſie auch deren Bewegung deutlich.

Gebrauch. Die Dicke eines erhabenen Dinges zu meſſen, z. E. die Dicke eines Baums. Fig 1121.

1. Man ſtelle das Inſtrument in a.

2. Man laſſe ab meſſen, und ſchraube das Transverſal ſo weit von der Okulardiopter weg, ſo viel die Weite ab ausmacht.

3. Man ſchraube den Laufer ſo hoch, bis man durch die Okulardiopter die Höhe erreicht hat, wo man den Baum u. ſ. w. meſſen will z. E. cg.

4. Man öffne die Schrauben des Laufers ſo weit, bis man die Dicke des Objekts an beyden Seiten getaſtert hat.

5. Man zähle an der Scheibe des Laufers, wie vielmal man die Schraube herum gedrehet hat, und ſehe wo der Index ſtehet: ſo giebt dieſer die verlangte Dicke.

Beweis. Wenn man das Auge als den Mittelpunkt eines Cirkels betrachtet: ſo ſind abde Fig 1126 und AB, DE concentriſche Cirkel, und abde verhält ſich zu ABDE: wie cb zu CB; ferner ziehet man Fig 1126 durch die Oeffnung des Laufers f und den Punkt des Objekts einen Cirkel, ſo ſind fh und gi die halben Sehnen ihrer Bogen. Da ſich nun die Sehnen ähnlicher Bogen verhalten wie ihre Radii, ſo verhält ſich auch fh zu gi wie io zu ho.

2te Aufgabe: die Abweichung eines Objekts von der Perpendikularlinie zu finden, z. E. ab Fig 1127.

1. Man ſtelle ſich gegen das Objekt ab, wo man die größte Abweichung wahrnimmt, und rücke das Transverſal nach dem Abſtande des Objekts von der Okular Diopter.

2. Man richte das Inſtrument nach b perpendikular.

3. Man öffne die Schrauben des Laufers bis man das Objekt durch dies Okulardiopter in C ſiehet.

4. Man bemerke die Schraubengänge, und was der Index auf der Scheibe des Laufers zeigt: ſo hat man die Abweichung des Objekts von der Perpendikularlinie.

Iſt man nicht verſichert, daß man der größeſten Abweichung des Objekts gerade gegen über geſtanden hat, ſo verrichte man die Aufgabe aus verſchiedenen Standpunkten.

Kann man die Weiten des Standpunkts nicht mit der Kette meſſen, ſo geſchiehet dieſes mit einem andern Inſtrumente zuvor.

Alſo kann man auch die Dicke eines Thurms, eines Berges u. ſ. w. meſſen.

Man ſiehet auch leicht, daß man bey ſenkrechten Gegenſtänden, auch zugleich die Höhe des Objekts erhält.

Denn wie ſich Fig 1125 cb verhält zu bf, ſo verhält ſich auch CB zu BF; wenn daher cb der Radius, a der Transverſal, cB der Abſtand des Objekts und BF das Objekt, ſo zeiget die Entfernung des Laufers vom Radius die Höhe des Objekts an.

Fig 1128 iſt eine gedoppelte Stellſchraube, welche unten an den einen Backen des Transverſals nach der Angabe des Hrn. von Burgsdorf angebracht iſt.

C. L. Rheinholds Beſchreibung eines Erdmikrometers für Mathematiker und Forſtbediente 2. Aufl. Osnabrück 1783.

Erf., ſiehe Tetraktiſche Rechnung.

Erf. Schock, ſiehe Tetraktiſche Rechnung.

Erhabener Winkel, ſiehe Winkel.

Erhöhung der Größen zu Dignitäten, *Involutio quantitatum*, iſt die Erfindung eines Produkts, welches herauskommet, wenn man eine Zahl etlichemal in ſich ſelbſt multiplliciret. Z. E. 2 wird zu Dignitäten erhoben, wenn man das Produkt aus 2 in 2 das iſt 4, findet; oder auch ferner 8 das Produkt aus 4 in 2; wiederum 16 das Produkt aus 8 in 2 u. ſ. w. Man nennet es auch *geneſin poteſtatum*.

Erhöhungswinkel, ſiehe Elevationswinkel.

Ermeßliche Größen, ſiehe Größen.

Ermeßlich vielfache Größen, ſiehe *Polynomia commenſurabilia*.

Ermeßliche Zahlen unter ſich, ſiehe Zahlen.

Erſte magnetiſche Scheitelebene, ſo heißt eine Ebene, die die Magnetebene und den Horizont zugleich rechtwinklicht ſchneidet.

Erſte Potenz, *Potentia prima* (Allg. R. K.) heißt jede Größe z. B. a, in ſo fern ſie als einfach und nicht aus Faktoren zuſammen geſetzt angeſehen wird. Man nennt ſie auch *Dignitas prima, primi ordinis*.

Erſte Zahl für ſich, ſiehe Primzahl.

Erſte Zahlen gegen einander ſiehe Primzahlen unter ſich.

Erſter Anhaltungspunkt, (Markſcheider) der erſte Punkt, wovon man anfängt, den erſten Zug zu meſſen, im Gegenſatz der Anfangspunkte der übrigen Züge.

Erwachſene (das), ſiehe Faktum.

Erzeugender Cirkel, ſiehe Radlinie 2.

Erzeugung der Dignitäten, *geneſis dignitatum*, bedeutet die Art und Weiſe, wie die Dignität der Größen aus gewiſſen Produkten von den Theilen ihrer Wurzeln zuſammen geſetzt werden. So wird z. B. das Quadrat, wenn man die Theile der Wurzel a und b nennet, aus $a^2 + 2ab + b^2$ zuſammengeſetzt. Man ſehe Binomiſcher Lehrſatz.

Escait, die Benennung eines franzöſiſchen Feldmaßes, welches hauptſächlich in der Generalität von Bourdeaux gebräuchlich iſt, es hat aber ſolches nicht aller Orten einerley Länge.

Etlichemal großer Theil, *Pars aliquanta*, iſt, der etlichemal genommen, entweder größer oder kleiner wird, als das Ganze. 2 iſt ein etlichemal großer Theil von 5.

Etlichemal vieler Theil, *Pars aliquota*, iſt der einigemal genommen dem Ganzen gleich wird. 2 iſt ein etlichemal vieler Theil von 6.

Eugonius, heißet bey den alten Geometris eine Figur, die einen oder mehrere rechte Winkel hat, oder ſoviel wirklich rechte Winkel als möglich iſt.

Eugrammus, Euthigrammus, heißt bey den alten Geometris eine Figur, die in lauter gerade Linien eingeſchloſſen iſt.

Euthigrammus, ſiehe Eugrammus.

Evolute (ſ. Käſtners Analyſis des Unendlichen, §. 563 flgd).

1. Ein vollkommner biegſamer Faden ſey um die erhabene Seite der krummen Linie ACQ Fig 1141 gewunden, wobey wir annehmen, daß dieſer Bogen der krummen Linie beſtändig nach einer Seite zu hohl, nach der andern erhaben iſt, und keinen Wendungs- oder Rückkehrpunkt hat. Nun winde

man

man den Faden dergeſtalt ab, daß der Theil von ihm, der nicht mehr um die krumme Linie liegt, wie CE, in eine gerade Linie ausgeſpannet iſt. So beſchreibt der Endpunkt des Fadens eine krumme Linie AEM; welche man aus der Abwickelung der Linie ACQ erzeugt (ex evolutione genitam), wie ACQ die abgewickelte oder Evolute (evolutam) nennet.

2. Der Faden berührt in jeder Lage CE die Evolute ACQ; und die gerade Linie CE iſt dem Bogen AC der Evolute gleich.

3. Der Linie AEM Tangente an E, ſtehet auf EC (2) ſenkrecht.

Beweiß. E; M; ſollen zwey Stellen der Linie AEM ſeyn, welche die Lage des Fades CE; QM zu gehören, die einander in N ſchneiden. Weil der Faden in beyden Lagen die Evolute berührt (2) und die Evolute beſtändig auf einer Seite hohl iſt, (1) ſo iſt der Bogen CQ gegen die geraden Linien CN; QN; erhoben, und fällt zwiſchen ſie und ſeine Sehne. Man ziehe des Bogens EM Sehne, und ſuche den Winkel NEM; dieſer Winkel für den Fall, da ſich E und M, folglich auch C und Q einander unendlich nähern, iſt der Winkel der Tangente bey E; mit CE.

Alſo ſey der Bogen AC oder die gerade Linie EC $= u$; der Bogen AQ oder die gerade Linie QM $= u + e$; ferner CN $= f$; QN $= g$; und die Sehne EM $= k$; ſo iſt EN $= u + f$; MN $= u + e - g$ und coſ NEM

$$= \frac{(u + f)^2 + kk - (u + e - g)^2}{2(u + f)k}$$

der Zähler hiervon wird $2u(f + g - e) - (e - g)^2 + f^2 + k^2$. Wenn ſich nun Q und C einander unendlich nähern, ſo nähert ſich die Summe $f + g$ unendlich der Sehne CQ, das iſt, dem Bogen CQ oder e, alſo f unendlich dem Werthe $e - g$; und der Zähler unendlich dem Werthe kk und $2(u + f).k$ unendlich dem Werthe $2uk$ und der Coſinus unendlich dem Werthe $\frac{k}{2u}$; das iſt einem verſchwindenden Werthe, alſo CEM einem rechten Winkel.

4. Wenn man aus jedem gegebenen Punkte E der Linie AEM eine Tangente ihrer Evolute EC ziehen kann, ſo darf man nur auf CE in E ein Perpendikel ſetzen, um die Tangente der Linie AEM in E zu haben.

5. Wenn E und M ſich einander unendlich nähern, ſo wird N der Mittelpunkt der Krümmung für EM; aber N fällt in den Bogen CQ (3) alſo iſt die Evolute der geometriſche Ort aller Mittelpunkte der Krümmung für AEM.

6. Wenn ME, CQ auch endliche Bogen, und CK, QK, Perpendikel auf die Lagen des Fadens ſind, ſo iſt K $= 2R -$ CNQ $=$ ENM, oder zwey Normallinien an zwey willkührlichen Stellen E, M, der Linie AEM, machen eben den Winkel, den zwey Normallinien an den beyden jenen zugehörigen Stellen C, Q, der Evolute ACQ machen. Das heißt, die zuſammen gehörigen Bogen der Evolute und der Linie AEM, haben einerley Weite (amplitudinem).

7. Wenn die Punkte M, E, und folglich auch Q, C, unendlich nahe zuſammen rücken, ſo verwandelt ſich, EM in ds; EN oder EC in den Halbmeſſer der Krümmung für E $= Z$; CQ oder MQ $-$ EC in dz; (5); CK in den Halbmeſſer der Krümmung der Evolute bey C $= w$. Alſo iſt $\frac{ds}{z} = \frac{dz}{w}$ (6) oder $\frac{w}{z}$

 =

$= \frac{dz}{ds}$ = dem Maße der Veränderung der Krümmung. Die Veränderung der Krümmung jeder Linie AME bey E verhält ſich alſo wie die Tangente des Winkels CEK, wenn C der zu E gehörige Punkt ihrer Evolute, und K der Mittelpunkt der Krümmung der Evolute bey C iſt.

7. Der Faden kann beym Anfange der Abwickelung, in A ſchon eine beſtimmte Länge haben, wie AF Fig 1142, wo er doch AC berühren muß; alsdenn iſt CE = dem Bogen AC + AF. In der 1141 Figur iſt AF = o.

8. Aufg. Aus der Gleichung für die Linie FE 1142 Figur die für die Evolute zu finden.

Aufl Man ziehe beyder gemeinſchaftliche Abſciſſen Linie DL, und nehme rechtwinklichte Coordinaten der Linie FE; DB = x; BE = y; zwiſchen denen die Gleichung gegeben iſt; der Evolute AC; DL = v; LC = t, zwiſchen denen die Gleichung geſucht wird. Ferner ſey EC = z; EO = w. Nun iſt EO : EB = EC : EB + LC, alſo $y + t = \frac{z \cdot y}{w}$, und $t = \frac{z - w}{w} \cdot y$(A). Ferner EO : OB = EC : BL, oder $v - x = \frac{z \cdot py}{w}$ (B). Aus der Gleichung für αE nun ſind w; p; z; durch x und y gegeben; alſo läßt ſich (B) auf eine Geſtalt (C) bringen, wo ſie nichts veränderliches als x; y; v und t enthält. Aus (C) mit der Gleichung α E verglichen, läßt ſich y wegſchaffen, und eine Gleichuug (D) machen, die nichts veränderliches als x; v, t, enthält. Eben ſo läßt ſich aus (A), mit der Gleichung αE verglichen, y wegſchaffen, und eine Gleichung (E) finden, die nur v; t; x enthält; aus E mit D verglichen läßt ſich endlich x wegſchaffen, und eine Gleichung F zwiſchen v und t finden.

9. Zuſatz. Jeder algebraiſchen Linie Evolute iſt algebraiſch.

10. Zuſatz. Weil die Länge des Bogens der Evolute AC = z + C iſt, und z ſich bey jeder algebraiſchen Linie algebraiſch finden läßt; ſo läßt ſich die Evolute jeder algebraiſchen Linie unbeſtimmt rektificiren; und man kann alſo unzählig viel algebraiſche Linien finden, die ſich rektificiren laſſen.

11. Zuſatz. Aber umgekehrt wird FE nicht algebraiſch ſeyn, wenn ſich die Evolute nicht algebraiſch rektificiren läßt, ob ſie gleich algebraiſch iſt, denn jeder algebraiſcher Linie Tangente iſt der Lage nach algebraiſch gegeben. Iſt alſo CE eine ſolche Tangente, und gebe es eine algebraiſche Gleichung zwiſchen DB und DE, ſo iſt der Punkt E, folglich die Länge CE, folglich der ihr gleiche Bogen AC; algebraiſch gegeben.

Exempel zu 9; 10.

12. Die Evolute der Parabel zu finden, D ſey der Scheitel der Parabel oder F 1141 Fig ſo iſt $z = \frac{(4x + b)^{3:2}}{2\sqrt{b}}$; $py = \frac{1}{2}b$; $w = \frac{1}{2}\sqrt{b} \cdot \sqrt{(b + 4x)}$; alſo (D) $v - x = \frac{4x + b}{2}$, oder $v - \frac{1}{2}b = 3x$; (E) $t = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{b}}$, alſo $16x^3$ oder $btt = \frac{16\,(v - \frac{1}{2}b)^3}{27}$, und fur FA = $\frac{1}{2}$ b iſt t = o; nennt man alſo die Abſciſſen AL = r, ſo iſt $r = v - \frac{1}{2}b$, und

und $\frac{27}{16}$ b tt = r³; oder die Evolute der apolloniſchen Parabel iſt eine neilſche rektificirte, deren Parameter $\frac{27}{16}$ des Parameters der apolloniſchen iſt. Wegen t = + $\frac{2}{3}$ r √ (r : 3b) hat ſie ähnliche Hälften eine unter die andere über der Axe AL; deren jede abgewickelt eine Hälfte der Parabel über und unter der Axe giebt. Daß FA = ½ b rührt daher, weil der apolloniſchen Parabel Krümmungshalbmeſſer am Scheitel ſo groß iſt.

13. Sucht man die Evolute eines Kreiſes vom Halbmeſſer r, ſo wäre z = r = w; alſo (9) t = 0; und py = r — x; alſo v — x = r — x oder v = r; die Evolute verwandelt ſich nähmlich hier in des Kreiſes Mittelpunkt.

14. Aufg. Wenn die Evolute AC 142. Fig gegeben wird, und die Länge des Fadens CE allemal CA + AF (7) iſt, die krumme Linie FE zu finden.

Aufl. Es ſey AF = c; AL = r, LC = t; FB = x; BE = y; CE = s + c; ſo iſt $OL = \frac{t.\,dr}{dt}$ (2) und $OC = \sqrt{(OL^2 + OC^2)} = \frac{t.\,ds}{dt}$; und $\frac{CE.\,LC}{OC}$ oder $EH = \frac{(s+c)\,dt}{ds}$. Folglich EB oder (M) $y = \frac{(s+c).\,dt}{ds} - t$, und BL oder $CH = \frac{EC.\,OL}{OC} = \frac{(s+c).\,dr}{ds}$; folglich FA + AL — BL, oder FL — BL oder (N) $x = c + r - \frac{(s+c)\,dr}{ds}$. Iſt nun die Gleichung für die Evolute gegeben, ſo iſt $\frac{dr}{ds}$ durch r und t gegeben; und läßt ſich die Evolute rectificiren, ſo iſt s auch durch r und t gegeben: in jeder der beyden Gleichungen (M), (N) bleiben alſo vier veränderliche endliche Größen x; y; r; t; aus (M) mit der Gleichung für die Evolute verbunden läßt ſich t wegſchaffen und eine Gleichung (O) machen, die nur y; x; r; enthält: eben eine ſolche Gleichung (P) läßt ſich aus (N) mit der Gleichung für die Evolute verbunden machen; und aus (O) und (P) verbunden, läßt ſich r wegſchaffen, und eine Gleichung zwiſchen x und y finden. Dieſes aber geht nicht an, wenn nicht s ſich durch r; t; ausdrücken läßt (11).

15. Ex. Die Linie FE zu finden, die aus Abwickelung der neiliſchen Parabel entſtehet, wo f tt = r³.

Hier iſt $t = \frac{r^{3:2}}{f^{1:2}}$, alſo $\frac{dt}{dr} = \frac{3\,r^{1:2}}{2f^{1:2}}$, und $ds = dr.\sqrt{(1 + \frac{9r}{4f})}$, alſo $s = \frac{1}{27}.(4f + 9r).\sqrt{(4 + \frac{9r}{f})} - \frac{8}{27}f$, und (M) $y = (s+c).\,3\sqrt{\frac{r}{4f+9r}} - t$; (N); $x = c + r. \frac{-(s+c).\,2\sqrt{f}}{\sqrt{(4f+9r)}}$, wo man noch den Werth von s an ſeine Stelle ſetzen muß. Es erhellet alſo, daß verſchiedene krumme Linien herauskommen, nachdem c von anderer und anderer Größe angenommen wird. Iſt $c = \frac{8}{27}f$ ſo kömmt $y = \frac{1}{27}.\frac{(4f + 9r)^{3:2}}{\sqrt{f}}.\frac{3\sqrt{r}}{\sqrt{(4f+9r)}} - t = \frac{1}{9}.(4f+9r).\sqrt{\frac{r}{f}} - t = \frac{4}{9}\sqrt{}$ fr'

fr, und $x = \frac{1}{3}r$, woraus man die Gleichung für die apolloniſche Parabel (12) erhält, daß $b = \frac{16}{27}f$. In andern Fällen kommen mehr zuſammengeſetzte Linien heraus.

16. I. AC ſey ein Kreis, deſſen Halbmeſſer = e; und $2er - rr = tt$. Die Linie, welche durch Abwickelung des Kreiſes entſtehet, läßt ſich folgendergeſtalt leicht verzeichnen: an den Punkt C des Kreiſes, deſſen Bogen AC iſt, ziehe man eine Tangente CE, und nehme CE = c + dem Bogen AC; ſo iſt E in dieſer Linie. Weil nun $\frac{e - r}{t} dr = dt$; und $\frac{edr}{t} = ds$, ſo iſt (M) $y = \frac{(s + c).(e - r)}{e} - \sqrt{(2er - rr)}$; (N) $x = c + r - (s + c).\frac{\sqrt{(2er - rr)}}{e}$. Gäbe es nun eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y; ſo ließe ſich aus derſelben mit (M) vereinigt zwiſchen x; s; r; und aus dieſer letztern mit (N) vereinigt eine zwiſchen s und r machen.

II. ACQ 1.141 Fig ſey ein Kreisbogen um den Mittelpunkt K, aus deſſen Abwickelung AEM entſtehe, wo c = 0; der Bogen AC ſey = w; und CQ = dw; ſo kann man nach (5) EM als einen Kreisbogen anſehen, der C zum Mittelpunkte hätte, und das Maß des Winkels N = CKQ (6) wäre. Alſo iſt $\frac{EM}{w} = \frac{dw}{e}$. Daraus folgt $AM = \frac{w.w}{2e}$; auch iſt das unendlich kleine Dreyeck $MNE = \frac{1}{2} w. \frac{wdw}{e}$ folglich die Fläche zwiſchen der geraden Linie QM und dem Bogen AM der abgewickelten Linie, und AQ des Kreiſes, $= \frac{w^3}{6e}$.

Für $w = 2e\pi$, wo $1 : \pi$ das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange iſt, giebt ſich die Länge der durch die Abwickelung des ganzen Kreiſes entſtandenen krummen Linie $= \frac{4ee\pi\pi}{2e} = 2e\pi\pi$, oder ſie iſt die dritte Proportionallinie zum Durchmeſſer und zum Umfange des Kreiſes, von dem ſie entſtehet, oder auch, ſie iſt $2e\pi.\pi$ dem halben Umfange eines Kreiſes gleich, deſſen Halbmeſſer $2e\pi$ der Umfang des vorigen Kreiſes, als der letzte Krümmungshalbmeſſer der Linie AEM wäre. Dieſes neuen Kreiſes Fläche wäre $2e\pi. 2e\pi\pi = 4ee\pi^3$, dreymal ſo groß als $\frac{8e^3.\pi^3}{6e}$ die Fläche zwiſchen der ganzen aus der Abwickelung entſtandenen Linie, ihren letzten Krümmungshalbmeſſer, und dem abgewickelten Kreiſe.

III. Weil ein unendlicher Faden unzählich vielmahl um den Kreis könnte ſeyn gewickelt geweſen, ſo läßt ſich dieſe Abwickelung unzählich vielmahl wiederholen, daß jedesmal ein neues Stück der abgewickelten Linie herauskömmt. Sie windet ſich alſo nach Art einer Spirallinie unzählich vielmahl um den Kreis herum, woraus ebenfalls erhellet, daß ſie tranſcendentiſch iſt.

IV. Wir haben dieſes Exempel angeführt, zu zeigen, wie leicht ſich oftmals Quadraturen und Rektificationen durch die Abwickelung finden laſſen, die

die ſonſt viel ſchwerer zu entdecken wären. Ein anderes hieher gehöriges Exempel nächſt dieſem giebt Ioh Bernoulli Lect. Hoſp. 20.

Methode die krummen Linien zu finden, die ihren Evoluten ähnlich ſind.

17. Erkl. Wenn F; A; und E; C; 1142 Fig zwey Paare zuſammengehöriger Punkte ſind, daß nähmlich F; E; die Endpunkte der Tangenten AF; und CE = FA + AC ſind; und wenn ſich alsdann die Halbmeſſer der Krümmung bey F; A beſtändig wie bey E; C; oder allemal wie 1 : n verhalten, ſo heißt die krumme Linie FE; ihrer Evolute AC ordentlich ähnlich. (directe ſimilis) und 1 : n das Verhältniß der Aehnlichkeit.

18. Zuſ. Der Halbmeſſer der Krümmung bey E ſey = r; ſo iſt der bey C = nr; des Bogens FE Element ſey = ds; alſo der Winkel am Mittelpunkte des Krümmungskreiſes $= \frac{ds}{r} =$ dem Winkel am Mittelpunkte des Krümmungskreiſes bey C (6), alſo iſt der Kreisbogen, welcher dieſen letzten Winkel mißt, oder des Bogens AC Element $= \frac{ds}{r} . nr = n . ds$ und der Bogen AC = ns + conſt.

19. Lehnſatz. Alle ähnliche krumme Linien laſſen ſich als ähnliche Vielecke von unzählich viel Seiten anſehen, weil ſich ihre Bogen Elementen, die proportionirt ſeyn, und gleiche Winkel machen müſſen, unendlich nähern. Alſo ſind bey allen ähnlichen krummen Linien, gerade Linien proportionirt, die auf ähnliche Art beſtimmt oder nach ähnlich liegenden Punkten gezogen werden; und ähnlich beſtimmte Paare von Linien machen gleiche Winkel.

20. Erkl. Der Linie AMB 1143 Fig Evolute ſey bma; ſo daß A; M; B; und b; m; a; zuſammen gehörige Punkte ſind. Verhalten ſich nun die Halbmeſſer der Krümmung bey A und B, wie die bey a und b; das iſt, verkehrt wie die Halbmeſſer der Krümmung an den zugehörigen Punkten der Evolute, ſo heißt AB ihrer Evolute verkehrt ähnlich. Die Theile nähmlich, die einander ähnlich ſind, liegen in der Linie, die aus der Abwickelung entſtanden iſt, von A nach B; und in der Evolute von a nach b, das iſt von dem Punkte, der A zugehört, nach demjenigen, welcher B zugehört.

21. Zuſ. Wenn AC; BC; bc; ac; die Normallinien an den zuſammengehörigen Punkten ſind, ſo iſt ACB = bca (6) und AC : BC = ac : bc : (19).

22. Zuſ. Wenn M; m; ein Paar andere zuſammengehörige Punkte ſind, und die Normallinie bey m; ac in n ſchneidet, ſo wird ſie verlängert, bc unter einem Winkel = ANM ſchneiden (6). Aber an dem Dreyecke, das ſie ſolchergeſtalt mit nc und der Verlängerung von bc macht, iſt bcn ein äußerer Winkel, und der Winkel dieſes Dreyecks bey n iſt ſeinem Scheitelwinkel anm gleich: folglich iſt der Winkel; unter dem ſie bc ſchneidet, = bca — anm, welches alſo = ANM ſeyn muß. Da nun bca = BCA (21) ſo iſt ANM + anm = BCA.

23. Zuſ. Mit dem Punkte M in AMB, habe μ in $a\mu b$ eine ähnliche Lage, oder es verhalten ſich die Bogen AM : AB = $a\mu$: ab : $\mu\nu$ ſey die Normallinie bey μ; ſo iſt, weil die beyden Normallinien $\mu\nu$; $a\nu$; auf ähnliche Art mit den beyden MN; AN; beſtimmt werden, wegen der Aehnlichkeit der Bogen $a\mu$; AM; $a\nu\mu$ = ANM (19) alſo $a\nu\mu$ + anm = ACB (21).

24. Zuſ. Weil ab beſtändig nach einer Seite hohl iſt (1) ſo machen die Normallinien anfangs nahe bey a ganz kleine Winkel mit ac; die nachgehends bis an die Größe acb wachſen. Da ſich nun dieſe Winkel wie alles übrige nach dem Geſetze der Stetigkeit ändern, ſo giebt es einen efa = $\frac{1}{2}$ acb, wo E; e; zuſammen gehörige Punkte ſind. Wenn man ſich alſo vorſtellet, daß die Normallinie mn in dieſe Lage ef komme, ſo wird mna = $\frac{1}{2}$ acb = $\mu\nu a$ (23) alſo muß $\mu\nu$ entweder ihr parallel, oder mit ihr einerley ſeyn: das erſte findet nicht ſtatt; denn weil die Normallinien bey a und b in c zuſammen ſtoßen, ſo ſind die Tangenten bey a und b nicht parallel, und weil der Bogen ab ſtets nach einer Seite hohl iſt, ſo können zwiſchen a und b keine parallelen Tangenten, alſo auch keine parallelen Normallinien vorkommen; alſo fallen μ nnd m zuſammen, oder die Punkte E; e welcher beyder Abwickelung zuſammen gehören, haben in ihren Bogen auch ähnliche Lagen, und es iſt AE: AB = ae: ab. Alle andere Punkte aber als die beyden E; e; werden ſo beſchaffen ſeyn, daß ſie nicht zugleich zuſammengehörig und ähnlich liegend ſind. So ſind M und m zuſammengehörig, aber M und μ ähnlich liegend.

25. Zuſ. Wenn ef von den Normallinien an m und μ, in r und ϱ geſchnitten wird, ſo iſt frn = efa — mna = $\frac{1}{2}$ acb — mna; $\nu\varrho f = \mu\nu a$ — efa = $\mu\nu a - \frac{1}{2}$ acb; alſo frn — $\nu\varrho f$ = acb — ($\mu\nu a$ — mna) = 0 oder erm = $e\varrho\mu$; oder die Bogen $e\mu$; em haben gleiche Weite.

26. Zuſatz. AFE + afe = ACB (22), afe = $\frac{1}{2}$ acb (24) = $\frac{1}{2}$ ACB (21), alſo AFE = $\frac{1}{2}$ ACB = afe.

27. Lehnſatz. Aufg. Wenn ein Bogen, deſſen Halbmeſſer = 1; die Länge $\int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha + \beta ss}}$ iſt; zum Sinus z; zum Coſinus ζ hat, die Integrale von zds und ζds zu finden.

Aufl. I. Weil $\frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}}$, ſo iſt zds = — $\sqrt{(\alpha + \beta s^2)}$. d $\sqrt{(1 - zz)}$. Man ſetze $\int$zds = — $\sqrt{(\alpha + \beta s^2)}. \sqrt{(1 - zz)}$ + q: ſo kömmt, wenn man auf beyden Seiten differentiirt, und was ſich aufhebet wegläßt;

$$dq = \frac{\beta sds. \sqrt{(1 - zz)}}{\sqrt{(\alpha + \beta s^2)}} = \beta s dz,$$

folglich q = βsz + r, wo nach einem ähnlichen Verfahren dr = — βzds herauskömmt. Alſo iſt $\int$zds = — $\zeta. \sqrt{(\alpha + \beta s^2)} + \beta sz = \int \beta zds$, oder $\int zds = \frac{\beta sz - \zeta \sqrt{(\alpha \beta s^2)}}{1 + \beta}$.

II. $\zeta ds = dz \sqrt{(\alpha + \beta s^2)}$, alſo $\int \zeta ds = z \sqrt{(\alpha + \beta s^2)} + q$, und dq $= - \frac{\beta sds.\ z}{\sqrt{(\alpha + \beta ss)}} - \frac{\beta zsdz}{\zeta} = + \beta sd\zeta$, alſo q = $\beta s\zeta$ + r,

und dr = — $\beta\zeta$ds, alſo $\int \zeta ds = z \sqrt{} \frac{(\alpha + \beta s^2) + \beta s\zeta}{1 + \beta}$.

III. Dieſe Formeln ſind in dem einzigen Falle nicht brauchbar, wenn β = — 1. Alsdann aber iſt $\frac{ds : \sqrt{\alpha}}{\sqrt{(1 - ss : \alpha)}}$ das Element eines Kreis-

bogens,

Bogens, deſſen Sinus $z = s : \sqrt{\alpha}$; alſo $\zeta = \sqrt{(1 - ss : \alpha)}$, und $zds = \frac{sds}{\sqrt{\alpha}}$, davon das Integral $= \frac{ss}{2\sqrt{\alpha}}$.

Ferner ſey $= s : \sqrt{\alpha}$ für $ep = 1$; ſo iſt $gh = ds : \sqrt{\alpha}$; $gn = \zeta$ und des Kreisſtückes epmh Differential $= \frac{\zeta ds}{\sqrt{\alpha}}$, alſo

$$\int \zeta ds = \sqrt{\alpha} \,.\, epmh = \sqrt{\alpha} \,.\, (\tfrac{1}{2}\,\text{Bog cos}\, hm + \tfrac{1}{2}\, eh.\, hm) = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}.\ \text{B.cos}\ \frac{s}{\sqrt{\alpha}} + \frac{s\sqrt{(1 - ss : \alpha)}}{2}.$$

28. Auf. Die krumme Linie FE zu finden, die ihrer Evolute AC ordentlich ähnlich iſt.

Aufl. I. Der Bogen FE, 1143 Fig heiße σ, und ſein Krümmungshalbmeſſer bey E ſey $= r$; welcher von F nach E wachſe; dieſes ſchränkt die Aufgabe nicht ein, weil man den Bogen σ von jedem willkürlich angenommenen Punkte nach der Seite nehmen kann, nach welcher der Krümmungshalbmeſſer wächſt. Der Krümmungshalbmeſſer in F; oder FA ſey $= a$; ſo iſt der Bogen $AC = n.\,\sigma$, und $a + n.\,\sigma = r$, oder $n.\, r = \frac{rdr}{d\sigma}$; weil $\sigma = \frac{r - a}{n}$.

Man ſetze $\sigma + \frac{a}{n} = s$; ſo iſt $= \frac{r}{n} = GE$, 1143 Fig. Wenn $FG = \frac{a}{n}$. So iſt FE ihrer Evolute dergeſtalt ähnlich, daß ſich ähnlich beſtimmte Linien in beyden wie $1 : n$ verhalten.

II. Man ſuche hieraus für FE eine Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten. Wenn $dx = qds$, alſo $dy = ds.\sqrt{(1 - qq)}$: ſo iſt $\sqrt{(1 + pp)} = \frac{1}{q}$, und $p = \frac{\sqrt{(1 - qq)}}{q}$, und $dp = -\frac{dq}{qq\sqrt{(1 - qq)}}$ alſo $r = \frac{ds\sqrt{(1 - qq)}}{dq} = n.\, s$ (I), oder $\frac{ds}{s} = \frac{ndq}{\sqrt{(1 - qq)}}$, alſo $n.\ \text{Bog sin}\ q = l\,\frac{s}{a}$, oder q iſt der Sinus eines Bogens, deſſen Länge $\frac{1}{n}\, l\,\frac{s}{a}$ iſt, alſo $\sqrt{(1 - qq)} = \text{cos Bog}\ \frac{1}{n}\, l\,\frac{s}{a}$; alſo $dx = ds.\ \text{ſin Bog}\ \frac{1}{n}\, l\,\frac{s}{a}$; $dy = ds.\ \text{cos Bog}\ \frac{1}{n}\, l\,\frac{s}{a}$.

III. Weil $\frac{1}{n}\, l\,\frac{s}{a} = \int \frac{ds}{ns}$, ſo iſt in (27)

$x = \int zds$: $y = \int \zeta ds$; $a = 0$;

$\beta = nn$; $z = \text{ſin Bog}\ \frac{1}{n}\, l\,(s : a)$;

$\zeta = \cos$ Bog $\frac{1}{n}$ l (s : a), alſo

$$x = \frac{nn.\,s.\,z - n.\,s.\,\zeta}{1 + nn}$$

$$y = \frac{n.\,s.\,z + nn.\,s.\,\zeta}{1 + nn}$$

wo x und y für s = 0 verſchwinden. Alſo in 1142 Fig GM = x; ME = y (I).

IV. Daraus wird $\frac{(1 + nn).\,x}{ns} = nz - \zeta$, und $\frac{(1 + nn)\,y}{ns} = z + n\zeta$; folglich $\frac{(1 + nn)^2\,xx}{nnss} = nnzz - 2nz\zeta + 1 - z^2$; $\frac{(1 + nn)^2\,yy}{nnss} = z^2 + 2nz\zeta + nn - nnzz$ alſo $\frac{(1 + nn)^2.\,(xx + yy)}{nnss} = 1 + nn$; oder $xx + yy = \frac{nn}{1 + nn}.\,ss$.

V. Eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten allein erhält man ſo: $z = \frac{dx}{ds}$, und $\zeta = \frac{dy}{ds}$, (II) alſo kömmt in (III); $\frac{(1 + nn).\,x}{ns} = ndx - dy$
$\frac{(1 + nn).\,y}{ns} = ndy + dx$.

Das obere mit dem unteren divirt, giebt $\frac{x}{y} = \frac{ndx - dy}{ndy + dx}$; daraus findet man $n.\,(ydx - xdy) = ydy + xdx$; weil, was rechter Hand ſteht, das halbe Differential von $xx + yy$ iſt, ſo dividire man damit auf beyden Seiten. Dieſes giebt $\frac{n.\,(ydx - xdy)}{xx + yy} = \frac{ydy + xdx}{xx + yy}$. Nun iſt $ydx - xdy = yy.\,d\,(x : y)$ alſo was linker Hand ſteht $= \frac{n.\,d\,(x : y)}{\frac{xx}{yy} + 1}$ $= nd$ Bog tang $\frac{x}{y}$; folglich n. Bog tang $(x : y) = l\,(\sqrt{(xx + yy)} : a)$.

VII. Es ſey $\sqrt{(1 + nn)} = m$; die Sehne GEH 1142 Fig = u; ſo iſt (IV) $u = \frac{n}{m}\,s$, folglich $\frac{n}{m} = \frac{du}{ds} = \frac{EI}{Ee}$ 31 Fig wenn e dem Punkte E unendlich nahe iſt; = ſin EeI; alſo iſt cof EeI oder ſin eEI $= \frac{1}{m}$, und tang eEI $= \frac{1}{n}$; das Element, oder die Tangente der krummen Linie GE macht alſo mit der geraden Linie GE einen unveränderlichen Winkel, deſſen Tangente $\frac{1}{n}$ iſt. Folglich iſt GE eine logarithmiſche Spirallinie.

VIII.

VIII. Der Bogen der Evolute AC von A rechter Hand in 1142 Fig gerechnet iſt $= r - a$ (I); folglich $= - a$ für $r = 0$, d. i. für den Punkt G der Linie GE wo $s = 0$; (I) und die Evolute geht auch durch G; weil ſich EC oder r; für den Punkt G der krummen Linie GE in o verwandelt. Alſo iſt der Bogen AG der Evolute $= a =$ AF; daß ſein Werth verneint wird, zeigt nur an, er werde von A linker Hand genommen. Und ſo iſt der Bogen GAC der Evolute $= a + u\sigma = ns$ (I). Folglich verhalten ſich die veränderlichen Bogen CE; GC; von einem Punkte G an gerechnet, beſtändig wie $1 : n$; daher denn auch die Sehnen GE; GC; als ähnlich beſtimmte Linien in dieſem Verhältniſſe ſtehen werden. (I). Alſo iſt die Sehne GC $= nu = \frac{n}{m} . ns = \frac{nw}{m}$, wenn der Bogen GC der Evolute, w heißt, der Winkel alſo, welchen die Evolute bey C mit GC macht, hat zur Tangente $\sqrt{}$ $(dw^2 - \frac{nndw^2}{mm})$: $\frac{n}{m} dw$ oder $\frac{1}{n}$ wie der Winkel GEe (VII).

IX. Wenn $n = 1$ oder wenn die Winkel (VIII; VII) 45 Grad ſind, ſo verwandelt ſich die Aehnlichkeit (I) in die völlige Gleichheit, oder aus Abwickelung einer ſolchen logarithmiſchen Spirale GAC welche mit GC allemal einen Winkel von 45 Gr. macht, entſteht völlig eben dieſe Spirale GrE.

29. Aufg. Die krumme Linie AMB zu finden, die ihrer Evolute amb verkehrt ähnlich iſt 1143 Fig.

Aufl. I. Von dem Punkte E (24) wo der Halbmeſſer der Krümmung Ee $= a$ iſt, rechne man den Bogen EM $= \sigma$; der Halbmeſſer der Krümmung bey M ſey Mm $= r$; ſo iſt der Bogen em $= r - a$. Nun nehme man μ (23), und das Verhältniß der Aehnlichkeit (17) ſey $= 1 : n$; ſo iſt der Bogen $e\mu = n . \sigma$, und bey μ der Halbmeſſer der Krümmung $= n . r$. Die Tangente an μ begegne der krummen Linie AMB in R, daß μ; R, zuſammen gehörige Punkte ſind; der Bogen ER heiße S; und R ſey $= R\mu$; ſo iſt $e\mu = a - R$.

II. Der ſpitzige Winkel, unter dem $R\mu$ und Ee einander ſchneiden, iſt $= \varrho$ (6) $=$ erm.

Der ſpitzige Winkel, unter dem $R\mu$ und AC einander ſchneiden, ſey φ; ſo iſt, wegen des Dreyecks, das die Verlängerungen von $R\varphi$; EF; unter AC; mit φF machen, 180 Gr. $- \Phi = 180 -$ EFA $+$ erm oder $\varphi =$ EFA $-$ erm $=$ efa $-$ erm (26) $=$ fnr $=$ mna.

III. An dem Punkte in ab, der mit R eine ähnliche Lage hat, muß die Normallinie mit ac einen Winkel $= \Phi$ machen; weil nähmlich die beyden Normallinien, die an dieſem Punkte und die bey R, imgleichen die beyden andern, die bey A; auf ähnliche Art beſtimmt werden, und alſo gleiche Winkel machen müſſen (19) alſo muß dieſe Normallinie mit mn (II) parallel oder einerley ſeyn; und nur das letzte findet ſtatt (24), alſo iſt m der mit R ähnlich liegende Punkt.

IV. Folglich em $= n . S$, und der Krümmungshalbmeſſer bey m; $= n . R$ (I).

V. Alſo $r - a =$ em (I) $= n . S$. (IV), oder $S = \frac{r - a}{n}$ und auch aus (I) ($a - e\mu$ oder $R = a - n . \sigma$. Die Weite des Bogens EM iſt $=$ erm (6) $= \varrho$ (II) $=$ der Weite des Bogens ER (6). Soll dieſes in allen Punkten bey-

 der

der Bogen ſtatt finden, ſo ſind die Differentiale der Winkel gleich, welche EF mit MN und Rϕ macht, oder es iſt $\frac{d\sigma}{r} = \frac{dS}{R}$; aber $\frac{dS}{R} = \frac{dr}{n(a - n\sigma)}$, welches alſo $nad\sigma - nnsd\sigma = rdr$ giebt, woraus man durch die Integration $rr = 2na\sigma - nn\sigma\sigma + aa$ erhält, wenn $r = a$ für $\sigma = 0$ werden ſoll (I).

VI. Aus der Gleichung $\sigma\sigma - \frac{2a}{n}\sigma + \frac{rr - aa}{nn} = 0$ (V) das zweyte Glied wegzuſchaffen ſetze man $s = \sigma - \frac{a}{n}$, dieſes giebt $r\ \sqrt{(2aa - nnss)}$, und wenn der Bogen $AE = \frac{a}{n}$, ſo iſt $AM = s$.

VII. Hat man vermittelſt dieſer Gleichung die krumme Linie beſtimmt; ſo findet man den Punkt E, um den gleich weite Bogen müſſen abgeſchnitten werden, damit die krumme Linie ihrer Evolute verkehrt ähnlich wird, wenn man $s = \frac{a}{n}$ nimmt, da denn $r = a$ wird.

VIII. Eine Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$; $PM = y$ zu finden, iſt wie in (28 II) $r = \frac{ds.\sqrt{(1 - qq)}}{dq}$, alſo $\frac{ds}{r}$, oder

$$\frac{dq}{\sqrt{(1 - qq)}} = \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}} \text{ (V)} = \frac{1}{n}.\frac{a\frac{n}{\sqrt{2}}ds}{\sqrt{\left(1 - \frac{nns}{2aa}\right)}}$$

davon die Integrale Bog ſin q = Bog ſin $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$, wo, wenn die beſtändige Größe, die man addiren ſollte, $= 0$ geſetzt wird, q oder $\frac{dx}{ds}$ für $s = 0$ auch $= 0$, folglich die krumme Linie in A auf die Axe ſenkrecht ſeyn muß.

IX. Man ſetze zuerſt $n = 1$, da die geſuchte Linie ihrer Evolute nicht nur verkehrt ähnlich, ſondern auch gleich iſt. So kömmt Bog ſin q = Bog ſin $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ oder $q = \frac{s}{a\sqrt{2}}$ und $\sqrt{(1 - qq)} = \frac{\sqrt{(2aa - ss)}}{a\sqrt{2}}$, alſo qds oder $dx = \frac{sds}{a\sqrt{2}}$ und $2ax\sqrt{2} = ss$ weil x und s zugleich veeſchwinden. Folglich iſt die geſuchte krumme Linie eine Cycloide, die in A den größten Krümmungshalbmeſſer $a\sqrt{2}$ (VI) oder die kleinſte Krümmung hat. Für den Punkt E iſt $s = AE$ = (VI) a alſo $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

L. Euler Evolutio generalior formularum comparationi curvarum inſervientium; in nouis Comment. acad. ſc. Petrop. 1766. 1767. Tom. XII. pag. 42.

L. Euler. Demonſtratio Theorematis Bernoulliani, quod ex evolutione curvae cujusque rectangulae in infinitum continuata tandem cycloides naſcantur; in novis Comm. acad. ſc. Petrop. 1764. Vol. X. pag. 179.

Evolutio quantitatum wird von einigen die Auſziehung der Wurzeln genennet.

Evolutiones combinatoriae, ſiehe Involutiones.

Eylinie, ſiehe Ovallinie.

Exegetice, *Rhetice* heißt die Kunſt, aus einer gegebenen Gleichung die Wurzel in Zahlen oder in Linien zu finden.

Exhauſtions-Methode.

1. Nach Saverin.

Es giebt eine Methode, durch die man die Gleichheit zweyer Größen ſo beweiſt, daß man diejenigen, die ſie leugnen, ad abſurdum führt. Man nimmt zu dieſem Endzwecke an, daß eine Abſurdität entſtehen würde, wenn die eine größer oder kleiner als die andere wäre. Dieſe Methode iſt man dem Euklid ſchuldig; wenigſtens haben wir ſie von ihm. Sie gründet ſich auf die erſte Propoſition des 10ten Buches ſeiner Elemente, und iſt von Archimedes und vielen alten Geometern gebraucht worden. Herr Mac-Laurin hat ſich derſelben bedient, um die Theorie der Flüſſigkeiten mit aller Schärfe darzuthun.

2. Vom Abbe *de la Chapelle*.

Die Exhauſtionsmethode iſt ein Verfahren, die Gleichheit zweyer Größen zu beweiſen, indem man zeigt, daß ihre Differenz kleiner als jede merkliche Größe iſt; und indem man, um ſie zu demonſtriren, ſich der Reductio ad abſurdum bedient. Aber man hat dieſe Methode nicht deswegen Exhauſtionsmethode genannt, weil man darinnen ad abſurdum führt: ſondern weil man ſich derſelben bedient um zu zeigen daß ein Gleichheitsverhältniß unter zwey Größen vorhanden iſt, und wenn man dieſes nicht geradezu beweiſen kann, man ſich zu zeigen begnügt, daß man in eine Abſurdität verfällt, wenn man eine größer oder kleiner als die andere annimmt; um nun dahin zu gelangen, erlaubt man denen, die die angenommene Gleichheit leugnen, eine Differenz nach Willkür zu beſtimmen; man demonſtrirt ihnen, daß die Differenz, die ſich zwiſchen dieſen Größen befände (im Fall daß eine da wäre) kleiner als die beſtimmte Differenz wäre; und wenn alſo dieſe Differenz ſo klein angenommen würde, daß ſie jede angebliche Größe erſchöpfte, ſo iſt es Nothwendigkeit einzuräumen, daß der Unterſchied unter dieſen Größen wirklich verſchwindet. Dieſe untheilbare unzubeſtimmende Kleinheit, die jede Größe erſchöpft, iſt es nun, welche der gegenwärtigen Methode den Nahmen Exhauſtionsmethode gegeben hat, welcher von dem lateiniſchen Worte exhauſtio Erſchöpfung herkommt.

Von der Exhauſtions-Methode Michelſens Beyträge zum Studium der Math. 3. St. S. 1.

Exponent der Dignität oder Potenz, iſt die Zahl, welche anzeigt, von wie viel gleichen Faktoren eine gewiſſe Zahl das Produkt, oder die wie vielte Dignität eine Zahl von einer andern ſeyn, die ihre Wurzel genannt wird. Er pflegt durch eine kleine Ziffer, die der Wurzel zur rechten aber etwas in die Höhe geſetzet wird, ausgedrückt zu werden. Wenn man z. B. ſchreiben will, 125 ſey die dritte Dignität von 5, ſo ſchreibet man $5^3 = 125$, und ſo heißt $243 = 3^5$ ſo viel als, 243 ſey die 5te Dignität von 3. Was hievon zu wiſſen nöthig iſt, wird im Artickel Potenz vorgetragen.

Von der Weiſe, den Grad der Dignität durch die in die Höhe gerückte Ziffer als den Exponenten auszudrücken iſt Carteſius der Erfinder, da man z. B.

B. a^5 vor ihm aaaaa, in vielerley Betracht weit unbequemer, ſchrieb. Doch gieng er nicht weiter als auf beſtimmte Exponenten, die mit Zahlen ausgedrückt werden. Leibnitz und Newton haben ſich zuerſt unbeſtimmter Exponenten bedient, die man mit Buchſtaben ausdrückt, z. E. α^n, und die man ſich vorher gedenken mußte, ehe man auf veränderliche Exponenten z. E. α^y verfallen konnte. Die Dignitäten der Nenner der Brüche z. B. $\frac{1}{a^3}$, $\frac{b}{a^n}$, ſahe zuerſt Wallis als Dignitäten mit negativen Exponenten an wie a^{-3}, ba^{-n}. Das bisher erzählte gehört vornehmlich zur Geſchichte dieſer Sache; was ſonſt noch davon merkwürdig und am angeführten Orte vorgetragen und erwieſen wird, beſtehet in folgendem. Die Dignität 0 von allen Zahlen und Größen, alſo a, x, 3, 1000, iſt immer gleich 1. Ein durch die Addition zuſammen geſetzter Exponent, bedeutet, daß die Dignitäten mit den einfachen Exponenten in einander multiplicirt ſind, nähmlich $a^{m+n} = a^m . a^n$ und a^{4+5} oder $a^9 = a^4 . a^5$. Ein durch die Subtraktion zuſammengeſetzter Exponent bedeutet, daß die Dignitäten mit den einfachen Exponenten durcheinander dividiret ſind, und $a^{m-n} = a^m : a^n$, desgleichen $a^{5-4} = a^5 : a^4 = a^1 = a$. Durch die Multiplication zuſammen geſetzte Exponenten bedeuten, daß die Dignität des einen Exponenten zu der Dignität des andern erhoben worden, z. B. $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$; und $a^{3.4}$ oder die dritte Dignität von a^4 oder die 4te Dignität von a^3 iſt $= a^{12}$. Endlich ein durch die Diviſion zuſammengeſetzter oder gebrochener Exponent bedeutet, daß aus der Dignität, die den Zähler zum Exponenten hat, die Wurzel die den Nenner zum Exponenten hat, gezogen werden ſolle, z. E. $a^{m:n}$ oder $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ und $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$. Was alle dieſe Exponenten ſagen wollen, wenn ſie zugleich negativ ſind, iſt aus dem geſagten leicht abzunehmen, z. E. $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{m:n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$. Ein Exponent der ſelbſt eine Dignität iſt, wie in a^{b^c} oder a^{3^2} verſtehet ſich ohne weitere Erklärung; denn es fället in die Augen, daß $a^{3^2} = a^9$. Sollte daher auch $a^{\sqrt[m]{n}}$ z. E. $a^{\sqrt[3]{64}}$ vorkommen, ſo würde man leicht ermeſſen, daß es ſo viel als a^4 ſey.

Exponent der Ordnung oder Stelle, Anzeiger, Index, in allgemeineren Verſtande iſt die Zahl, welche andeutet, die wievielte eine andere Zahl in einer gewiſſen gegebenen Reihe ſey, z. E. 7 iſt der Exponent von 13 in der

Rei-

Reihe der ungeraden Zahlen, weil 13 die ſiebente ungrade Zahl iſt. Iſt die Reihe eine arithmetiſche Progreſſion, deren erſtes Glied = a, und der Unterſchied der Glieder = d, die Zahl der Glieder oder der Exponent der Ordnung = n, das letzte Glied = b; ſo ſind die Glieder ſelbſt

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ a + 4d \ldots a + (a + n - 1)\, d$$
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots n.$$

Weil alſo $b = a + (n - 1)\, d$, ſo iſt.

$$b - a = nd - d$$
$$b - a + d = nd$$
$$\frac{b - a}{d} + 1 = n$$

Z. B. Wenn $a = 1$, $d = 2$, $b = 13$, wie in dem kaum angegebenen Exempel, ſo iſt der Exponent $n = \frac{13 - 1}{2} + 1 = 7$. Iſt aber die Reihe eine geometriſche Progreſſion, deren erſtes Glied = a, der Exponent des Verhältniſſes = e, die Zahl der Glieder oder der Exponent der Ordnung = n, das letzte Glied = b; ſo ſind die Glieder ſelbſt

$$a,\ ea,\ e^2a,\ e^3a,\ e^4a, \ldots e^{n-1}a$$
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots n$$

Weil alſo $b = e^{n-1}a$, ſo iſt

$$\frac{b}{a} = e^{n-1}$$

$$\log \frac{b}{a} = (n - 1) \log e = n \log e - \log e$$

$$\log \frac{b}{a} + \log e = \log \frac{eb}{a} = n.\ \log e$$

$$\log \frac{eb}{a} : \log e = n.$$

Z. B. Wenn $a = 4$, $e = 5$, $b = 12500$; alſo die Progreſſion

4, 20, 100, 500, 2500, 12500,
1. 2. 3. 4. 5. 6.

ſo iſt $\log b = 4,0969100$
$\log e = 0,6989700$
$\log eb = 4,7958800$
$\log a = 0,6020600$

$$\log \frac{eb}{a} = 4,1938200$$

$$\log \frac{eb}{a} : le = \frac{4,1938200}{0,6989700} = 6.$$

Exponent des Verhältniſſes, Nahme des Verhältniſſes (exponens, ſ. nomen, ſ. denominator rationis) bedeutet nicht bey allen Schriftſtellern einerley

ſey. Die Alten verſtanden den Quotienten darunter, der heraus kömmt, wenn man das vorhergehende Glied eines geometriſchen Verhältniſſes durch das folgende dividirt, alſo wäre 5 der Exponent des Verhältniſſes 20 : 4. Viele Neuere drehen es herum, und verſtehen den Quotienten darunter der heraus kömmt, wenn man das folgende Glied durch das vorhergehende dividirt, ſo daß $\frac{1}{5}$ der Exponent des Verhältniſſes 20 : 4 iſt. Noch andere fragen nicht nach, welches das vorhergehende oder welches das folgende iſt, ſondern dividiren das größere, welches es ſey, durch das kleinere und nennen den Quotienten Exponent. Der Freyherr von Wolf unterſcheidet, die ſonſt als gleichgültig gebrauchte Benennungen Exponent und Nahme des Verhältniſſes, und verſtehet unter Exponent des Verhältniſſes z. E. $20 : 4 = \frac{20}{4} = 5$, und unter Nahme des Verhältniſſes den Quotienten $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

Wenn zwey Verhältniſſe gleich oder ähnlich ſeyn, und eine Proportion mit einander ausmachen ſollen, ſo muß in ihnen der Exponent einerley ſeyn, wie in $20 : 4 = 100 : 20$.

Exponent der Wurzel iſt die Zahl, die den Grad der Wurzel anzeigt, welche aus einer Größe gezogen werden ſoll, und beſtehet in einer Ziffer, oder, wenn er unbeſtimmt iſt, in einem Buchſtaben, den man in das Wurzelzeichen ſetzet. So heißt $\sqrt[3]{a^4}$ oder $\sqrt[m]{a^n}$ ſo viel als die Wurzel der 3ten Dignität aus a^4, oder die Wurzel der mten Dignität aus a^n.

Man ſchreibt ſie auch als gebrochene Exponenten der Dignität, $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$; ſiehe Expon. der Dignität.

Exponent der Ziffer heißet die Zahl, welche anzeiget, in der wievielten Stelle von der Einheit ſie ſtehe. Der Zehner ſtehet in der erſten, der Hunderter in der zweyten, der Tauſender in der dritten Stelle von der Einheit, u. ſ. w. Daher iſt des Zehners Exponent 1, des Hunderters 2, des Tauſenders 3, u. ſ. w. Betrachtet man eine ſolche mit Exponenten bezeichnete Reihe von Ziffern, z. E.

$$\overset{3}{6}\quad \overset{2}{4}\quad \overset{1}{9}\quad \overset{0}{7}$$

ſo begreift man leicht, daß man durch dieſes Mittel die Nullen erſparen könne. Denn wenn man

$$\overset{3}{6}\quad \overset{1}{9}\quad \overset{0}{7}$$

geſchrieben fände, ſo ſähe man bald, daß die Ziffer mit dem Exponenten 2, alſo der Hunderter, fehlt, und könnte alſo leicht die daſtehende Ziffern ausſprechen. Bey Zahlen die ſehr viel Nullen zur rechten ſtehen haben, ſparet man durch dieſes Mittel wirklich einige Mühe im Schreiben; denn z. B. 49^{24} iſt kürzer und bedeutet doch eben ſo viel als

4900000000000000000000000000

oder 49 Quadrillionen. Dieſe Exponenten der Ziffern können angeſehen werden als Exponenten der Dignität der Zehne, worein jede Ziffer multiplicirt iſt. Nämlich $6497 = 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$.

Die zwey letzten Poſten verſtehen ſich aus dem, was ſo eben von den Exponenten der Dignität vorgetragen worden. Daher weil

$10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{100}$, 10^{-3} $\frac{1}{1000}$ u. ſ. w. ſo ſind die Decimalbrü-

che

che z. E. 0,6 oder 0,05 oder 0,002, ſo viel als 6.10^{-1} oder 5.10^{-2} oder 2.10^{-3}, und wenn man die Exponenten der Zehne, worein jede Ziffer multipliciret iſt, wieder in den Exponenten der Ziffer verwandelt, ſo bekommen die Ziffern eine aus Ganzen und Decimalbrüchen beſtehende Zahl, z. E. 497, 652 folgende Exponenten

+2	+1	0	−1	−2	−3
4	9	7	6	5	2

Durch dieſe Exponenten laſſen ſich die Stellen leicht beſtimmen für die Produkte jeder zweyer Faktoren von gegebenen Stellen. Denn die Summe der Exponenten der Faktoren iſt der Exponente des Produktes, nähmlich ſeiner niedrigſten Ziffer z. B.

$$\overset{+2}{4}.\ \overset{-3}{2} = \overset{-1}{8};\quad \overset{+2}{3}.\ \overset{+3}{4} = \overset{+5}{12};\quad \overset{-2}{3}.\ \overset{-3}{4} = \overset{-5}{12}$$

Hieraus erhellet, daß der Exponent des Quotienten die Differenz der Exponenten der gegebenen Zahlen iſt. In den Rechnungen mit Decimalbrüchen haben dieſe Betrachtungen ihren Nutzen.

Exponenten der Aenderung krummer Linien, ſiehe Index variationis curvaturae.

Exponential-Funktion, ſiehe Funktion.

Exponential-Funktionen zu differenziiren, ſiehe logarithmiſche Linien 5.

Exponential-Gleichung, ſiehe Gleichung.

Eulers Analyſis des Unendlichen. 1. Buch. S. 102.

Exponential-Größen heißen diejenigen Poteſtäten, deren Exponent eine veränderliche Größe iſt. Es giebt verſchiedene Arten derſelben, je nachdem entweder bloß der Exponent, oder außerdem auch die zu einer Poteſtät erhobene Größe veränderlich iſt. Zu jenen gehöret a^z, zu dieſen hingegen y^z. Ja es kann auch der Exponent eine Exponential-Größe ſeyn, wie in a^{a^z}; a^{y^z}; y^{a^z}, x^{y^z}. Wir ſetzen indeß jetzt dieſe Eintheilung bey Seite, weil man die Natur der Exponential-Größen durch die Betrachtung der Form a^z hinlänglich zu erkennen im Stande iſt.

2 Werth der Exponential-Größe a^z. Es ſey die Exponential-Größe a^z gegeben, welche eine Poteſtät der beſtändigen Größe a, mit einem veränderlichen Exponenten iſt. Da nun der Exponent z alle beſtimmte Zahlen unter ſich begreift, ſo iſt zuvörderſt klar, daß man, wenn man dafür nach und nach alle ganze poſitive Zahlen ſetzt, für a^z die beſtimmten Werthe, a^1; a^2; a^3; a^4; a^5; a^6; u. ſ. w. erhält. Setzt man hingegen für z nach und nach die negativen Zahlen − 1; − 2; − 3; u. ſ. f. ſo bekommt man $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a^2}$; $\frac{1}{a^3}$; $\frac{1}{a^4}$; u. ſ. f., und wenn $z = 0$ iſt, ſo iſt allemal $a^0 = 1$. ſetzt man für z gebrochene Zahlen, wie $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; u. ſ. f. ſo entſtehen dadurch die Werthe $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[3]{aa}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[4]{a^3}$; u. ſ. f. Dieſe Werthe ſind an

an ſich betrachtet vielfach, weil die Extraktion der Wurzel allezeit auf vielförmige Werthe führt; allein man pflegt dafür nur immer die Hauptwerthe, d. h. die reellen und poſitiven zu nehmen, weil man die Größe a^z als eine einförmige Funktion von z betrachtet. So hat $a^{\frac{5}{2}}$ einen gewiſſen Werth, der zwiſchen a^2 und a^3 fällt, und iſt daher eine Größe von eben der Art; und obgleich der Werth von $a^{\frac{5}{2}}$ eben ſowohl $= - aa\sqrt{a}$, als $= + aa\sqrt{a}$ iſt, ſo wird doch bloß der letzte in Betrachtung gezogen. Eben ſo verhält es ſich, wenn der Werth von dem Exponenten z irrational wird. Denn da es in dieſem Falle ſchwer ſeyn würde, ſich die Anzahl der a^z alsdann zukommenden Werthe zu gedenken, ſo betrachtet man bloß den einen reellen davon. Auf dieſe Art iſt $a^{\sqrt{7}}$ ein beſtimmter Werth, der zwiſchen a^2 und a^3 fällt.

Vorzüglich aber hängen die Werthe der Exponentialgröße a^z von der Größe der beſtändigen Zahl a ab. Denn iſt $a = 1$ ſo iſt ſtets $a^z = 1$, z mag einen Werth bekommen, was für einen es will: iſt aber a größer als 1, ſo wird der Werth von a^z deſto größer, je größer die Zahl iſt, die man für z ſetzt, und wächſt ſelbſt ins unendliche, wenn $z = \infty$ wird; wird $z = 0$, ſo wird $a^z = 1$, und iſt z kleiner als 0, ſo werden die Werthe von a^z kleiner als die Einheit, bis, für $z = -\infty$, $a^z = 0$ wird. Das Gegentheil findet ſtatt, wenn a kleiner als 1, aber doch eine poſitive Größe iſt: Denn alsdann nimmt a^z ab, wenn z über 0 hinauf wächſt, und wächſt, wenn man für z negative Zahlen ſetzt. Wenn nähmlich a kleiner als 1 iſt, ſo iſt $\frac{1}{a}$ größer als 1; ſetzt man alſo $\frac{1}{a} = b$, ſo wird $a^z = b^{-z}$, wonach man den zweyten Fall aus dem erſten beurtheilen kann.

Iſt $a = 0$, ſo findet ſich zwiſchen den Werthen von a^z ein ſehr großer Sprung. Denn ſo lange z eine poſitive Zahl, oder größer als nichts iſt, ſo iſt ſtets $a^z = 0$; iſt $z = 0$, ſo wird $a^0 = 1$; iſt aber z eine negative Zahl, ſo erhält a^z einen unendlich großen Werth. So iſt, wenn $z = -3$ geſetzt wird, $a^z = 0 - 3 = \frac{1}{3} = \frac{1}{0}$, und alſo unendlich. Noch viel größere Sprünge kommen vor, wenn die beſtändige Größe a einen negativen Werth, z. B. $-$ z bekommt. Denn ſetzt man alsdann anſtatt z die ganzen Zahlen, ſo werden die Werthe von z wechſelsweiſe poſitiv und negativ, wie aus dieſer Reihe erhellet:

$a - 4$; $a - 3$; $a - 2$; $a - 1$; a^0; a^1; a^2; a^3; a^4; ect. $+ \frac{1}{16}$; $- \frac{1}{8}$; $+ \frac{1}{4}$; $- \frac{1}{2}$; 1; -2; $+4$; -8; $+16$; ect. Setzt man ferner Brüche für z, ſo bekommt $a^z = (-2)$ z bald reelle bald imaginäre Werthe; indem z. B. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ imaginär, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$ hingegen reell iſt. Ob aber, wenn z irrational genommen wird, a^z reelle oder imaginäre Werthe gebe, läßt ſich nicht einmal beſtimmen.

3. Betrachtung der Gleichung $y = a^z$ für den Fall, wenn a eine poſitive Zahl bedeutet, die größer als 1 iſt. Wegen dieſer Unbequemlichkeit bey den negativen Werthen von a, wollen wir a poſitiv und größer als die Einheit annehmen, weil man die Fälle, wo a eine poſitive und kleinere Zahl als die Einheit iſt, leicht hierauf zurückführen kann. Nimmt man alſo $a^z = y$, ſo erhält y, wenn man für z alle reelle poſitive Zahlen, die zwiſchen $+\infty$ und $-\infty$ fallen, ſetzt, alle reelle poſitive Werthe, die zwiſchen $+\infty$ und 0 liegen. Denn iſt $z = \infty$, ſo wird $y = \infty$; iſt $z = 0$, ſo wird $y = 1$; und wird $z = -\infty$, ſo wird y 0. Umgekehrt wird daher auch jeder poſitive Werth, den man für y annimmt, einen reellen Werth für z geben, ſo daß $a^z = y$ iſt; wenn aber y ein negativer Werth beygelegt wird, ſo kann z keinen reellen Werth haben.

Wenn alſo $y = a^z$ iſt, ſo iſt y eine Funktion von z; und wie y von z abhange, das läßt ſich aus der Natur der Poteſtäten erkennen, denn dadurch wird, wenn man z einen gewiſſen Werth beylegt, der Werth von y beſtimmt. Es iſt aber $yy = a^{2z}$; $y^3 = a^{3z}$; und überhaupt $y^n = a^{nz}$; woraus folgt daß $\sqrt{y} = a^{\frac{1}{2}z}$; $\sqrt[3]{y} = a^{\frac{1}{3}z}$; $\frac{1}{y} = a^{-z}$; $\frac{1}{yy} = a^{-2z}$; $\frac{1}{\sqrt{y}} = a^{-\frac{1}{2}z}$ u. ſ. f. ſeyn werde. Ferner iſt, wenn $v = a^x$ geſetzt wird, $vy = a^{x+z}$; und $\frac{v}{y} = a^{x-z}$. Vermittelſt dieſer Formeln kann man den Werth von y aus dem gegebenen Werthe von z leicht finden.

Exempel. Wenn $a = 10$ iſt, ſo laſſen ſich die Werthe von y wenn man für z ganze Zahlen ſetzt, ohne alle Rechnung finden. Es iſt nähmlich $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$; und $10^0 = 1$; ferner $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$; $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$; $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$. Wenn aber für z Brüche geſetzt werden, ſo kann man die Werthe von y vermittelſt der Extraktion der Wurzeln erhalten. So iſt $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,162277\ldots$ u. ſ. f.

So wie man aber, wenn die Zahl a gegeben iſt, aus jedem Werthe von z den Werth von y finden kann: ſo läßt ſich auch umgekehrt aus jedem poſitiven Werthe von y der dazu gehörige Werth von z beſtimmen, ſo daß $a^z = y$ wird; und dieſer Werth von z pflegt, in ſofern er als eine Funktion von y betrachtet wird, der Logarithme von y genannt zu werden.

Der große Leibnitz hat in den Actis eruditorum des Jahres 1682 im Februar bey Gelegenheit ſeiner Quadratur des Kreiſes dieſe Art von Größen, denen er auch den Nahmen Exponentialgrößen gegeben, den Geometern zuerſt zur Betrachtung vorgelegt, und eben daſelbſt im Jahrgang 1695 S. 312 u. f. die Anwendung ſeiner Differenzialberechnung auf dieſelbe gegen Nieuwentyt vertheidigt. Johann Bernoulli, der vor ſich ſelbſt auf eben dieſe Betrachtungen verfallen, nannte anfänglich dieſe Größen und die auf ihnen beruhenden Gleichungen und Linien durchlaufende Größen, Gleichungen und Linien in den Actis erud. 1697. p. 126. (quantitates percurrentes), weil ſie gleich-

ſam alle mögliche Dimenſionen durchlaufen. Weil aber der andre Nahme ihnen von Leibnitz gegeben worden, ſo zog er denſelben ſeiner eigenen Benennung vor.

Außer den Exponentialgrößen, deren Exponenten reell ſind, giebt es auch andere, deren Exponenten imaginär ſind, z. B. $c^{z\sqrt{-1}}$, und die in der Theorie der Sinus und der Coſinus ihren Nutzen haben.

Magnitudinum exponentialium, Logarithmorum et trigonometriae ſublimis Theoria nova methodo pertractata Auct. Petro Ferronio Florent. 1782. gr. 4.

Exponential-Größen durch Reihen zu entwickeln, ſiehe Logarithmen durch Reihen zu entwickeln.

Exponential-Größen zu differenziiren.

Differenziation der Exponential-Größen oder derjenigen Poteſtäten, deren Exponent eine veränderliche Größe iſt.

1. Von dergleichen Funktionen von x laſſen ſich die Differenzalien durch die Differenziation der Logarithmen auf folgende Art finden. Soll das Differenzial von a^x gefunden werden, ſo ſetze man $y = a^x$, wodurch denn, wenn man die Logarithmen nimmt, $ly = xla$ wird. Differenzirt man nun, ſo wird $\frac{dy}{y} = dxla$, und alſo $dy = ydxla$; und da $y = a^x$ iſt, ſo wird ferner $dy = a^x dxla$, und dieſes iſt das geſuchte Differenzial von a^x. Auf eine ähnliche Art findet man, wenn p eine Funktion von x iſt, daß das Differenzial der Exponential-Größe $a^p = a^p dpla$ iſt.

Eben dieſes Differenzial kann aber auch alſo abgeleitet werden. Es ſey der Ausdruck a^p gegeben, worin p eine Funktion von x bedeute, ſo daß, wenn man x + dx ſtatt x ſetzt, p in p + dp übergehe. Setzt man daher $y = a^p$, ſo wird, wenn x in x + dx übergeht, $y + dy = a^{p+dp}$, und alſo $dy = a^{p+dp} - a^p = a^p(a^dp - 1)$. Nun kann man aber jede Exponential-Größe a^z durch folgende Reihe,

$$1 + z\,la + \frac{z^2\,(la)^2}{2} + \frac{z^3\,(la)^3}{6} + \text{ect.}$$

ausdrücken. Es wird demnach $a^dp\ 1 + dpla + \frac{dp^2\,(la)^2}{2} + \text{ect.}$ und $a^dp - 1 = dpla$, weil die folgenden Glieder insgeſamt gegen dpla verſchwinden; und es iſt folglich, $dy = d.a^p = a^p\,dpla$. Es iſt alſo das Differenzial einer Exponential-Größe ein Produkt aus der Exponential-Größe, aus dem Differenziale des Exponenten, dp, und aus dem Logarithmen der beſtändigen Größe a, in der veränderlichen Poteſtät des gedachten Exponenten.

Iſt alſo e die Zahl, deren hyperboliſche Logarithme = 1 iſt, ſo iſt das Differenzial von $e^x = e^x dx$. Betrachtet man daher dx als eine beſtändige Größe,

Größe, ſo wird das Differenzial von $e^x dx = e^x dx^2$, und dieſes iſt das zweyte Differenzial von e^x. Eben ſo wird das dritte Differenzial $= e^x dx^3$. Iſt daher $y = e^{nx}$, ſo wird $\frac{dy}{dx} = ne^{nx}$; $\frac{ddy}{dx^2} = n^2 e^{nx}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = n^3 e^{nx}$; $\frac{d^4y}{dx^4} = n^4 e^{nx}$ u. ſ. f. Man ſieht hieraus, daß das erſte, das zweyte und die folgenden Differenzialien von e^{nx} in einer geometriſchen Progreſſion ſtehen, und daß $\frac{d^m y}{dx^m} = n^m e^{nx}$, und folglich $\frac{d^m y}{ydx^m}$ eine beſtändige Größe $= n^m$ iſt.

Wenn die zu einer veränderlichen Poteſtät erhobene Größe ſelbſt eine veränderliche Größe iſt, ſo findet man das Differenzial derſelben auf eine ähnliche Art. Es ſeyen p und q Funktionen von x, und $y = p^q$. Nimmt man nun die Logarithmen, ſo wird $ly = qlp$, und $y = p^q$, und differenziirt man, ſo wird $\frac{dy}{y} = dqlp + \frac{qdp}{p}$, woraus ſich denn $dy = ydqlp + \frac{yqdp}{p}$ $= p^q dqlp + qp^{q-1} dp$ ergiebt, weil $y = p^q$ iſt. Es beſteht alſo dieſes Differenzial aus zwey Theilen, wovon der erſte $p^q dqlp$ gefunden wird, wenn man die gegebene Größe p^q auf die Art differenziirt, als wenn p eine beſtändige und bloß der Exponent q eine veränderliche Größe wäre; der andere hingegen, nähmlich $qp^{q-1} dp$, wenn man in der gegebenen Größe p^q den Exponenten q als eine beſtändige, und bloß p als eine veränderliche Größe behandelt.

Es läßt ſich aber auch das Differenzial von p^q, alſo herleiten. Iſt nähmlich $y = p^q$, ſo wird wenn man $x + dx$ anſtatt x ſetzt, $y + dy = (p + dp)^{q + dq}$, und löſet man dieſen Ausdruck auf die gewöhnliche Art in eine Reihe auf, ſo wird

$$y + dy = p^{q + dq} + (q + dq) p^{q + dq - 1} dp + \frac{(q + dq)(q + dq - 1)}{1 \cdot 2} p^{q + dq - 2} dp^2 + \text{ect. und alſo}$$

$$dy = p^{q + dq} - p^q + (q + dq) p^{q + dq - 1} dp,$$

weil alle folgende Glieder, die eine höhere Poteſtät von dp enthalten, gegen $(q + dq) p^{q + dq - 1} dp$ verſchwinden. Nun iſt aber $p^{q + dq} - p^q$ $= p^q (p^{dq} - 1) = p^q \left(1 + dqlp + \frac{dq^2 (lp)^2}{2} + \text{ect.} - 1\right) = p^q dqlp$, und ſetzt man in dem andern Gliede q für $q + dq$, ſo wird daraus $qp^{q-1} dp$. Folglich iſt das geſuchte Differenzial wieder das vorige, oder es iſt $dy = p^q dqlp + qp^{q-1} dp$.

Noch leichter leitet man dieſes Differenzial auf folgende Art her. Da, wenn e die Zahl bedeutet, deren hyperboliſche Logarithme $= 1$ iſt, $p^q = e^{qlp}$ wird, indem beyder Größen Logarithmen $= qlp$ ſind; ſo wird $y = e^{qlp}$. Da nun hier die zur veränderlichen Poteſtät erhobene Größe eine beſtändige Größe iſt: ſo wird $dy = e^{qlp}\,(dqlp + \frac{qdp}{p})$ wie oben gelehret worden iſt.

Setzt man aber nun wieder p^q anſtatt e^{qlp}, ſo wird
$dy = p^q dqlp + p^q qdp : p = p^q dqlp + qp^{q-1} dp.$

Wenn alſo $y = x^x$ iſt, ſo wird $dy = x^x dxlx + x^x dx$; und daraus laſſen ſich denn auch die fernern Differenzialien leicht finden. Es wird nähmlich

$$\frac{ddy}{dx^2} = x^x\,(\frac{1}{x} + (1 + x)^2)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^x\,((1 + lx)^3 + \frac{3\,(1 + lx)}{x} - \frac{1}{xx}$$

ect.

Unter den Differenzialien derer Funktionen, die Exponential-Größen in ſich ſchließen, ſind vorzüglich folgende Beyſpiele zu merken, die aus der Differenziation der Formel e^x entſpeingen. Es iſt aber

$d.e^x p = e^x dp + e^x pdx = e^x\,(dp + pdx.)$

I. Iſt $y = e^x x^n$, ſo iſt $dy = e^x nx^{n-1} dx + e^x x^n dx$, oder $dy = e^x dx\ (nx^{n-1} + x^n)$.

II. Iſt $y = e^x\,(x - 1)$; ſo iſt $dy = e^x xdx$.

III. Iſt $y = e^x\,(x^2 - 2x + 2)$; ſo iſt $dy = e^x xxdx$.

IV. Iſt $y = e^x\,(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$; ſo iſt $dy = e^x x^3 dx$.

Wenn die Exponenten ebenfalls Exponential-Größen ſind, ſo wird die Dfferenziation nach eben den Regeln verrichtet. Soll z. B. das Differenzial von e^{e^x} geſucht werden, ſo ſetze man $e^x = p$, wodurch denn $e^{e^x} = e^p$, und $dy = e^p dp$ wird. Es iſt aber $dp = e^x dx$, und wenn alſo $y = e^{e^x}$ iſt, ſo wird $dy = e^{e^x}\ e^x\,dx$, und wenn $y = e^{e^{e^x}}$ iſt, ſo wird $dy = e^{e^{e^x}}\ e^{e^e}\ e^x d$. Iſt hingegen $y = p^{q^r}$, ſo ſetze man $q^r = z$, wodurch $dy = p^z dzlp + zp^{z-1} dp$ wird. Da nun aber $dz = q^r drlp + rq^{r-1} dp$ iſt, ſo wird $dy = p^z\,q^r drlp.\,lp + p^z rq^{r-1} dqlp + p^z q^r dp : p$. Wenn alſo $y = p^{q^r}$ iſt, ſo wird
$dy = p^{q^r}\,q^r\,(drlp.\,lq + \frac{rdqlp}{} + \frac{dp}{p}.$

Auf dieſe Weiſe laſſen ſich alſo die Differenzialien von allen Arten der Exponential-Größen finden.

Eulers Differenzialrechnung 1. B. S. 162. §. 186.

Exponential=Linie, *Linea exponentialis* heißt eine krumme Linie, welche durch eine Exponential=Gleichung erkläret wird, als wenn $x^x = y$.

Wenn man die Exponential=Gleichung differenzirt, und den Werth von dx in dem Differenzial=Werthe der Subtangente und der Subnormallinie ſubſtituirt; ſo findet man ihre Subtangente und Subnormallinie. E. ſey z. E.

$$x^x = y$$

$$ylxdx + ydx = dy$$

$$dx = dy : (ylx + y)$$

$$ydx : dy = ydy : (ylx + y) dy$$

$$= 1 : (1 + l.x).$$

Für die Subnormallinie iſt

$$ydy : dx = (y^2 lxdx + y^2 dx) : dx$$

$$= y^2 lx + y^2 = y^2 (lx + 1).$$

Man ſehe auch krumme Linien transcendentiſche (11).

Exponential=Rechnung, *Calculus exponentialis*, dieſes iſt der ſinnreichſte Theil der Differenzial=Rechnung, durch den man die Exponentialgrößen differenzirt, und ihre Differenzial=Größen ſummirt oder wenigſten zu geometriſchen Conſtruktionen bringt.

Exponention der Größen, ſiehe Logarithmen, Theorie des Hrn. Burja.

Exponentiiren eine Größe, nennet Hr. Burja erforſchen, die wievielte Potenz eine Größe von einer andern Größe iſt, oder zur wievielten Potenz eine Größe erhoben werden muß, daß ſie einer andern gegebenen Größe gleich werde.

Extractio radicis, ſiehe Wurzel.

Extremum majus einer Polygonale heißt bey den alten Mathematikern die größte Zahl der arithmetiſchen Progreſſen, aus welcher die Centralpolygonale ſummirt worden. Wie ſolche zu finden, ſiehe Polygonalzahlen centrale (6) und Polyg. Zahlen ſimple (16).

F, Zahlzeichen der Lateiner = 40; wenn es aber oben mit einem Punkte oder Striche gezeichnet war, ſo war es = 40000.

Facit iſt in der gemeinen Art zu reden, die Benennung deſſen, was man durch eine jede arithmetiſche Operation herausbringt, ſo daß die Summe, der Reſt, das Produkt, der Quotient, die vierte Proportionalzahl u. ſ. w. die man durch die Addition, Subtraktion, Multiplication, Diviſion, Regel de tri u. ſ. w. findet, ohne Unterſchied Facit genannt werden.

Factoren heißen die Zahlen, welche in einander multipliciret werden. Z. E. wenn ich 6 durch 3 multiplicire; ſo kommt 18 heraus: 6 und 3 heißen die Faktores von 18. Sie werden auch efficientes genannt. Siehe Theiler der Zahlen.

Factoren doppelte heißen diejenigen, derer allgemeiner Ausdruck $f + gZ + hZ^2$ iſt, und die alſo 2 einfache enthalten.

Factoren dreyfache heißen diejenigen, derer allgemeiner Ausdruck $f + gx + hZ^2 + iZ^3$ iſt, und alſo 3 einfache Faktoren enthalten, ſiehe trinomiſche Faktoren.

Factoren einfache, heißen diejenigen, worinnen bloß die erſte Poteſtät vorkömmt; ihre allgemeine Form iſt $f + gZ$.

Facto=

Factoren, einfache, einer Function zu finden, ſiehe Umformung der Functionen, 3.

Factoren imaginäre der Functionen zu finden, ſiehe trinomiſche Faktoren.

Factoren quadratiſche heißen diejenigen doppelten Factoren, welche 2 einander gleiche einfache enthalten, als aa + 2aZ + ZZ.

Factoren trinomiſche der Functionen zu erforſchen, ſiehe trinomiſche Factoren ꝛc.

Factoren zuſammengeſetzte heißen diejenigen, in welchen irgend eine höhere Poteſtät enthalten iſt. Ihr allgemeiner Ausdruck iſt $hxx + ix^3 \ldots + px^n$.

Factum heißt die Zahl, welche herauskommt, wenn man zwey oder mehrere Zahlen in einander multipliciret, als 18 iſt das Factum von 6 und 3. Es wird auch productum, das Erwachſene, genannt.

Faden iſt ein Maß, eine Klafter, Lachter, hat auch damit einerley Länge von 6 Fuß, die aber an verſchiedenen Orten verſchieden iſt; denn eigentlich hat man dreyerley Fäden; der Buiſenfaden iſt der eine und der kleinſte, nur von 5 Fuß; der Koopwardersfaden iſt der zweyte mittlere von 5½ Fuß; und der auf den Kriegsſchiffen übliche der größte von 6 Fuß. Weiten und Höhen auf und über der Erde pflegt man, wo man ſich nicht der Ruthen bedient, mit Klaftern, Weiten und Tiefen unter der Erde mit Lachtern, und Tiefen des Meers und der Ströme, mit Faden auszuſprechen. Die Schweden meſſen durchaus mit Fammen, ſiehe Famm.

Fahrte, ein Längenmaß beym Straßen- und Förſtenbau von 24 Fuß a 3⅔ Lachter zu Freyberg. Jedoch rechnet man auch 3 Fahrten = 10 Lachter.

Fahrweg, ſiehe Landſtraße.

Faldom, ein rußiſches Längenmaaß = 7 Fuß $\frac{1}{10}$ Zoll Engliſch.

Falcidia, ſiehe Qnarta Falcidia.

Fallen (das) l'abaiſſement, la pente die Neigung der Fläche eines Gebirges, der Sohle eines Stollns oder Strecke eines Ganges ꝛc. Eigentlich verſtehet der Markſcheider darunter eine ſenkrechte Linie, die von der höchſten Erhebung z. B. eines Gebirges bis zur horizontalen Linie hinab geſäuet wird, und man mißt den Winkel des Fallens nach Graden. Gedachte ſenkrechte Linie zeigt zugleich das Steigen und Fallen an. In Anſehung des Fallenden theilt man Gänge ein, in ſtehende, thonlegige, flache und ſchwebende. Der Gang ſtürzet ſich, wenn er ſein Fallen verändert.

2. Das Fallen wird eigentlich nach dem Winkel beſtimmt, den das eine Saalband, als Ebene betrachtet (wenigſten als eine und dieſelbe, ſo lange angeſehen, als ſich der Gang in ſeinem Fallen nicht merklich ändert) mit einer ſöhligen Ebene begränzt: folglich giebt man das Fallen nach dem Winkel an, unter welchem eine auf der Streichlinie ſenkrecht, und in der das eine Saalband vorſtellenden Ebene (Gangebne) gezogene gerade Linie (Fallinie) gegen eine Horizontallinie geneigt iſt. Daher das Fallen oder die Donlege ſelbſt oft auch der Fallwinkel, Neigungswinkel, Verflächungswinkel, die Neigung des Ganges genannt wird.

Fallen einer Ebene (Markſcheid) iſt ihre Ausdehnung in die Tiefe.

Fallen eines Ganges abnehmen, heißt das Meſſen ſeiner Neigung, ſiehe Gang abnehmen.

Fallen eines Ganges oder Flözes, oder Kluft durch geometriſche Zeichnung und durch Rechnung zu finden, ſiehe Streichen und Fallen ꝛc.

Fällen (Markſcheid.) in der Grube einen Punkt angeben, der mit einem über Tage angenommenen Punkte übereinkömmt, und ſenkrecht darunter fällt. So wird ein Lochſtein gefället, wenn man zu dieſem zu Tage ſich befindlichen Grenzzeichen in der Grube einen Punkt beſtimmt, der ſenkrecht oder winkelrecht unter dem Lochſteine iſt. Oft heißt aber fällen bey dem Bergmann auch ſo viel, als niederlaſſen, niedriger machen. Z. B. einen Schacht fällen oder ſenken. Waſſer fällen heißt, Waſſer gewältigen, aus der Grube weg ſchaffen.

Fallendes Theiliges Verhältniß, ſiehe Ratio ſub multiplex.

Fallendes übertheilendes Verhältniß, ſiehe Ratio ſub ſuper partiens.

Fallendes übertheiliges Verhältniß, ſiehe Ratio ſub ſuper particularis.

Fallendes Verhältniß, ſiehe Ratio minoris inaequalitatis.

Falllinie, ſiehe Fallen 2.

Fallwinkel, ſiehe Fallen 2.

Falſche Wurzel, ſiehe: Wurzel falſche.

Familiar Staff of Maſter Iohn Blagrave, ſiehe Jacobsſtab.

Familie der krummen Linien, ſiehe krumme Linien.

Fammen in Schweden ein Längenmaß beym Bergbau, ſo 72 Freyberger Lachter Zolle groß iſt.

Fardingdale, Fardingland, Farundalesland, iſt in England ein Feldmaß von 40 Quadrat Poles, 1210 Quadratjards, oder 10890 ungleiche Quadratfeet oder Fuße, betragen 9571 franzöſiſche Quadratfuße, 4 Fardingdales machen 1 Acker oder Acre.

Farundalesland, ſiehe Fardingdale.

Faß zu viſiren, ſiehe Viſirung der Fäſſer.

Fathom ein Maß in England, welches 7 engliſche Fuß und überdem ohngefähr den 10ten Theil eines Zolls enthält, ſo nach franzöſiſchem Maße 6 Fuß 7 Zoll beträgt, indem der engliſche Fuß nur 11 Zoll und $4\frac{1}{2}$ Linien nach dem franzöſiſchem königlichen Maße beträgt. Einige rechnen den Fathom nur 2 Yards oder 6 engliſche Fuß.

Fauſſe equerre, ſiehe Winkelmeſſer.

Feder geometriſche des Suardi's, ſiehe Radlinienzieher.

Feder immerwährende, Fig 831 Dieſes Inſtrument beſteht aus unterſchiedlichen Stücken von Kupfer, Meſſing, Silber oder einer andern Materie; die Stücke F. G. H. wenn ſie zuſammen geſchraubt ſind, machen ohngefähr 5 Zoll in der Länge aus, ſeine Dicke beträgt im Diameter beynahe drey Linien, der mittlere mit F bemerkte Theil hält die Feder in ſich welche recht geſpalten und gut geſchnitten ſeyn, auch wohl über ein Röhrchen, das mit einem Gewinde verſehen iſt, gerichtet werden muß, ſolches Röhrchen wird an ein ander Röhrchen mit einer Schraube gelöthet, die juſt ſo dick, als das Innere von dem Deckel G iſt, damit man den Deckel daran ſchrauben, und, indem ſolche in die Feder hinein gehet, ein kleines Loch, welches in der mit 1 bemerkten Gegend iſt zuſtopfen möge, um zu verhindern, daß die Tinte nicht herauslaufe. Am andern Ende des Rohrs F iſt ein kleines Röhrchen, das in und auswendig zuſammen geſchraubet werden kann. Das Zuſammenſchrauben von auſſen, dienet dazu, daß man den mit H bezeichneten Deckel aufſchrauben kann, in dieſem gehört eine kleine Feder zum Reißbley, die ſich inwendig in dem kleinen Rohre einſchrauben läſſet, und dazu nutzt, daß man die Oeffnung des Halſes zuſtopfen kann; dieß iſt der Ort, durch welchen man die Tinte durch ein Trichterchen in das Rohr F laufen läſſet.

Will man die Feder brauchen, ſo muß der Deckel G abgeſchraubet, und die Feder ein wenig geſchüttelt werden, damit die Tinte herauslaufe. Die andere Seite bey der Feder zum Reißbleye muß zugeſtopft ſeyn, ſonſt drückt die Schwere der Luft auf die Tinte, und würde verurſachen, daß die Tinte auf einmal heraus liefe. An beyden Enden ſind zwey Petſchaftplättchen angelöthet, um darauf einen verzogenen Nahmen und das Wappen ſtechen zu laſſen. Die Zubereitung dieſer Maſchine iſt beynahe eben die, wie bey der Feder zum Reißbley.

Feder zum Reißbley mit einem Zirkel Fig 832. Dieſes Inſtrument iſt auswendig ſeckigt gefeilt, und wird gewöhnlich 4, 5 und 6 Zoll lang gemacht, inwendig muß es ganz rund ſeyn, damit man eine Feder zum Reißbley hineinthun, und ſolche vermittelſt ſeiner Feder und ſeines Knöpfchens hin und wieder ſchieben könne. An dem einen Ende läſſet ſich ein Zirkel hinein ſchrauben, wie die Figur, nach welcher er gemacht iſt, zeigt. Seine Zubereitung iſt von den andern Zirkeln in weiter nichts unterſchieden, als daß er rund iſt, und unten am Halſe eine Schraube hat, um ihn in die Reißbleyfeder ſchrauben zu können. Die Schraube wird in einer Schneidkluppe vorgeſchnitten, womit man hernach in einem Loche eines Schneideiſens ſelbiges ganz ausſchneidet; damit man die Gewinde des Zirkels im Herumſchrauben nicht übernöte, darauf hat man wohl Acht zu haben Urſache.

Gemeiniglich ziehet man auf den Flächen dieſer Feder die Linien, die auf dem Proportionalzirkel ſtehen. Man nimmt immer einerley Größe an, wenn man z. E. verlangt, wie man auf einer gegebenen Linie einen Winkel von 40 Graden beſchreiben ſoll, ſo nimmt man mit dem gemeinen Zirkel die Weite von dem erſten Punkte der Theilung in der Linea chordarum bis zu dem 60ten bezeichneten Punkte; mit dieſer Oeffnung macht man auf der gegebenen Linie einen Bogen, und nimmt hernach mit eben dem Zirkel die Weite aus dem erſten Punkte der Theilung, bis zu dem Punkte 40, die man endlich auf den gezogenen Bogen trägt, und aus ſeinem Mittelpunkte eine Linie ziehet, welche mit der gegebenen Linie einen Winkel von 40 Graden geben wird, eben ſo iſt es auch mit den andern Linien beſchaffen.

Man machet auch von dieſen Arten der Federn zum Reißbley, Röthel ꝛc. mit Zirkeln, einige die rund ſind, und auf die man die Zolle ſetzet, davon man einen in 12 Linien eintheilet.

Feder zum Reißbley ſchiebende Fig 833. Dieſe Feder iſt inwendig rund und von auſſem gedrehet, man macht ſolche auch zuweilen mit Ecken, und bemerket darauf die Zolle und Linien mit ſubtilen Strichen, die mit dem Drehwerk geſchehen.

Man nimmt ein Blech von Meſſing oder von einer andern Materie, ſo lang und breit als man dieſe Feder machen will, leget es hernach um einen ſtählernen Dorn zuſammen ein, der ſchön rund, fein gerade, und durch und durch von gleicher Dicke iſt, löthet die Fuge des Bleches zuſammen, ſo hat man das Rohr der Feder zum Reißbley. Dieß muß man ziehen, und durch ein Eiſen mit einem runden Loche vermittelſt einer Ziehbank gehen laſſen; das Rohr muß ſo lange gezogen werden, bis es den ſtählernen Dorn überall gleich drücke, damit man das Innere recht rund und gleich werde. Nachdem es nun auch abgedrehet worden, wie die Fig 834 zeigt, ſo ſpaltet man ſolches ſo weit bis ohngefähr einen halben Zoll gegen beide Ende auf, und macht an den Enden des Spaltes und in der Mitte ein kleines rundes Loch, daß der Nagel hinein

kann.

kann. Die Figur D iſt der innere Theil von der Feder, an deren beyden Enden macht man die Feder, dieſe muß mit kleinen Zwingen geſchloſſen werden. Der mittlere Theil muß juſt ſo dick als der innere Theil des mit C bemerkten Rohrs ſeyn, damit daſſelbe darinnen leicht hin und wieder geſchoben werden könne. Man ſchneidet das Stück ein, damit man eine kleine Spannfeder aus Stahl, oder mit dem Hammer wohl gehärteten Kupfer daſelbſt anbringen könne. In der Mitte iſt die mit 1 bezeichnete Feder zum Nagel durchgebohrt, um das mit E bemerkte Knöpfchen einzuſchrauben, man macht ſolches von Stahl zu unterſt mit einer Schraube, oberhalb der Schrauben iſt ein kleiner runder Hals in der Dicke wie die Löcher, die in dem Rohre C ſind. Oberhalb des Halſes macht man auf einer jeden Seite des Nagels einen Einſchnitt, um einen Schieber, in der Dicke als der Spalt des Rohrs iſt, daran zu machen; der obere Theil muß in die Runde gefeilet oder gedrehet werden. Um die Feder gar ausmachen zu können, muß man dieſe hineinſchieben, ſo daß das Loch der Spannfeder gerade gegen einem Loche in dem Rohre ſtehe, worauf man das Knöpfchen ſo lang, bis es an dem runden Halſe anſtehet, anſchraubet, doch ſo, daß der Schieber längs dem Spalte gehe, ſo wird alsdann, wenn man auf das Knöpfchen drücket, der Hals innerhalb des Rohrs ſich von einer Seite zur andern ſchieben laſſen.

Federlinie, ſiehe elaſtiſche Linie.

Federzirkel Fig 835 dieſe Art Zirkel wird ganz von gehärtetem Stahle gemacht, ſo daß keine Feile denſelben angreifen kann. Sein Kopf iſt auf die Art gebogen, daß er ſich wegen ſeiner Feder ſelbſt öffnet. Die Schraube, welche bey dieſem in Bogen durchgehet, dienet dazu, daß man den Zirkel, vermittelſt einer kleinen Mutter, die hinten daran iſt, nach Belieben auf und zumachen könne. Dieſe Gattung Zirkel iſt ſehr bequem ganz kleine Maße zu nehmen, und kleine Theilungen zu machen: aber ſie müſſen etwas kurz, und alſo gehärtet ſeyn, daß ſie eine Feder abgeben, und nicht zerſpringen.

Fehler bey Beſtimmung der Linien oder Winkel im Dreyeck, ſiehe Dreyecke, Differenzial-Formeln für dieſelben.

Fehler bey dem Feldmeſſen, ſiehe Vermeſſungsfehler.

Fehler beym Markſcheiden, ſiehe Markſcheider, Meſſungs-Fehler.

Feld ein ebener Theil der Oberfläche der Erde; eine Strecke flachen Landes.

Feld Geviertes, ſ. d.

Feld ſtreichendes, heißt auf Gängen, wenn das verliehene Feld, nach einer ſöhligen Länge in des Ganges Hauptſtreichen geſtreckt iſt. Siehe Vermeſſen 2 u. ſ. w., wie ſolches vermeſſen wird 44 l. c.

Feld, verliehenes, heißt der ſöhlige Flächenraum, darinnen Gewerke Befugniß erhalten haben, Bergwerk zu bauen.

Feld, Berechnung deſſelben, ſiehe Flächen-Inhalt der Länderey zu finden.

Feld, Beſtimmung des ökonomiſchen Werthes, ſiehe Länderey Beſtimmung d. ꝛc.

Feld, geometriſche Eintheilung, ſiehe Länderey geometriſch einzutheilen.

Feld ſchnüren, verſchnüren, Fr. meſurer, ſein belehntes Feld abmeſſen zu laſſen, um gewiß zu ſeyn, wie weit es reiche.

Feldvertheilung, ſiehe Ländereyvertheilung.

Feld, vortheilhafteſte Geſtalt deſſelben, ſiehe Länderey ꝛc.

Feldbemerkungen nennet der Feldmeſſer dasjenige, was er bey ſeinen Vermeſſungen ins Brouillon eingetragen, und was er ſonſten zu ſeiner Nachricht auf-

zuſchreiben für nöthig erachtete. Dieſe Feldbemerkungen dienen ihm bey Verfertigung des Riſſes von ſeiner Vermeſſung.

Feldcirkel, Bogenruthe, Fig 1129. a ſind zwey Hülſen von Meſſing, die ſich in einander ſchrauben, und auf dem andern Ende zwey biegſame hölzerne Stäbe b faſſen, welche bey c mit eiſernen Spitzen dergeſtalt beſchlagen ſind, daß ſie ſenkrecht auf der Erde ſtehen. Durch dieſe Spitzen gehen 2 Haken, an welchen eine 5 Decimalfuß oder ½ Ruthe lange Kette, geſpannt wird.

Feldgemäße, ſiehe Acker.

Feldgeſchworne; heißen gewiſſe Perſonen, beſonders auf Dörfern, welche zur Aufſicht, und andern Beſorgungen bey Feldgütern, worunter auch Ausmeſſung, Ausſteinigung der Grundſtücken gehören, eydlich verpflichtet ſind. Beſonders werden an einigen Orten diejenigen alſo genannt, welche den Werth der Grundſtücke, ſo verhypothecirt werden ſollen, beſtimmen müſſen, damit der Glaubiger wiſſen könne, wie viel er unbeſchadet ſeiner Sicherheit, auf die Güter darleihen könne.

Feldmaß, ſiehe Acker.

Feldmark, Markſcheidung, Feldſcheidung, die Gränze eines Feldes, oder auch ein ganzes zu einem Ort gehöriges mit Gränzen verſehenes Feld, auch die Fluhr benannt.

Feldmark zu vermeſſen, ſiehe Vermeſſung einer Feldmark.

Feldmeſſen, ſiehe Feldmeßkunſt und Vermeſſung.

Feldmeſſen, vermittelſt des Aſtrolabiums, ſiehe Vermeſſungen 55.

Feldmeſſen, vermittelſt der Bouſſole, ſiehe Vermeſſungen mit ꝛc.

Feldmeſſen, vermittelſt der Brechnung des Lichtes, als mit Fernröhren und der Camera obſcura, ſiehe Licht, Brechung.

Feldmeſſen, vermittelſt entfernter Gegenſtände, ſiehe Gegenſtände ꝛc.

Feldmeſſen, vermittelſt des Kreuzmaßes, ſiehe Kreuzmaß.

Feldmeſſen, vermittelſt vertikaler Linien und Flächen, ſiehe Linien, vertikale, ihr Gebrauch in der praktiſchen Geometrie.

Feldmeſſen, vermittelſt des Meßtiſches, ſiehe Meßtiſch.

Feldmeſſen, vermittelſt der Mittagslinie, ſiehe Mittagslinie.

Feldmeſſen, vermittelſt eines beweglichen Objekts, ſiehe Entfernungen zu meſſen ꝛc.

Feldmeſſen, vermittelſt des reflectirten Lichtes, ſiehe Licht reflectirtes ꝛc.

Feldmeſſen, vermittelſt des Schattens der Sonne, ſiehe Sonnenſchatten.

Feldmeſſen, vermittelſt Stäben und der Kette, ſiehe Vermeſſungen mit Stäben und der Kette.

Feldmeſſen, vermittelſt der Zollmanniſchen Scheibe, ſiehe Scheibe des Zollmanns.

Feldmeſſer, Ackermeſſer, Landmeſſer, Agrimenſor, nennt man diejenigen, die ſich mit der Feldmeßkunſt beſchäftigen. Von Seiten ihres Willens pfleget man ſich dadurch zu verſichern, daß man ſie in Eydespflichten nimmt, und andere Meſſungen nicht gelten läſſet, als die von obrigkeitlich geſetzten und geſchwornen Feldmeſſern gemacht werden. Was ihre Kenntniß anbetrifft, ſo iſt ein großer Unterſchied unter ihnen. Manche haben die theoretiſche Geometrie wohl inne, und können daraus von ihren Operationen hinreichenden Grund angeben. Viele aber haben ihre Kunſt handwerksmäßig gelernt, und wiſſen zwar ihre Regeln auswendig, ſind aber die Richtigkeit derſelben zu erweiſen nicht im Stande. Die letztern ſind daher nicht fähige Regeln, die ſie ſelbſt befolgen oder von andern befolgen ſehen, zu beurtheilen, ob durch die-

dieſelbe das verlangte Maß ganz genau, oder ob es nur beyläufig und mit wie großer möglicher Abweichung von der Wahrheit, oder ob es wohl gar falſch gefunden wird. Desgleichen wiſſen ſie ſich nicht zu helfen, wenn Fälle vorkommen, wovon ihnen ihr Lehrmeiſter nichts geſagt, und ſind in Gefahr gar ſtark zu fehlen, wenn ſie ſich gleichwohl der Sache unterziehen. Man ſollte daher von rechtswegen niemand dieſe Verrichtung anvertrauen, als der ſo viel Theorie beſitzt, als hiezu nöthig iſt. Die übrigen Theorien, die hierein nicht einſchlagen, werden nicht von ihm gefordert. Uebrigens hilft auch hier die Uebung den Meiſter machen.

Feldmeſſer Inſtrumente. Die Verſchiedenheit der Inſtrumente, deren man ſich gegenwärtig beym praktiſchen Vermeſſen bedient, iſt ſo groß, und die Vervollkommungen, die ſeit einigen Jahren dieſerwegen geſchehen, ſind ſo zahlreich, daß eine beſondere Beſchreibung eines jeden erforderlich iſt, damit, wenn man eines jeden Vortheile und Fehler ſieht, der Käufer ſolchergeſtalt in Stand geſetzt werde, ſolche Inſtrumente ſich zu wählen, die ſeinen Abſichten am meiſten entſprechend ſind. Die Genauigkeit des geometriſchen und trigonometriſchen Vermeſſens hängt gröſtentheils von der Genauigkeit und Vollkommenheit derjenigen Inſtrumente ab, deren man ſich dazu bedient; ſind dieſe ihrer Bauart nach mangelhaft, oder finden ſich Schwierigkeiten in ihrer Anwendung: ſo wird theils der Vermeſſer leicht Fehler begehen können, oder er wird mit beſtändigen Hinderniſſen zu kämpfen haben. Iſt die Einrichtung, um ſie zur Beobachtung anwendbar zu machen, mühſam und unbequem, ſo wird man ſie auf Treu und Glauben annehmen, und man wird ſich des Inſtruments ohne fernere Prüfung bedienen, wo denn der Vermeſſer Fehler begehen kann, für welche er weder ſtehen, noch ſie verbeſſern kann.

Bey gegenwärtigem Zuſtande der Wiſſenſchaften kann man als einen Grundſatz annehmen, daß jedes Inſtrument ſo eingerichtet werden muß, daß der Beobachter die Haupttheile leicht unterſuchen und berichtigen könne; denn ſo ſorgfältig ein Inſtrument auch gemacht ſeyn dürfte, und ſo vollkommen es in ſeiner Bauart auch wäre, ſo iſt es doch immer unmöglich, daß irgend ein Inſtrument lange Zeit vollkommen genau ſich in ſeinem Zuſtande befinde, in welchem es aus des Künſtlers Hand gegangen, daher denn die Haupttheile immer ſo eingerichtet werden müſſen, daß ſie eine Bewegung zu laſſen, damit der Beobachter ſie in erforderlichen Fällen wiederum gehörig genau berichtigen könne.

Erwähnung der vorzüglich nothwendigen Inſtrumente des praktiſchen Landvermeſſers.

Weniger oder mehrere derſelben ſind erforderlich, je nach dem Umfange der Vermeſſung, oder der Genauigkeit, die dabey erforderlich iſt.

Ein gutes Taſchenbeſteck von Inſtrumenten.
Ein Stangenzirkel.
Ein Satz Maßſtäbe zum Uebertragen (Plotting ſcales).
Drey oder vier Parallellineale, von verſchiedener Art.
Ein Proportionalzirkel.
Ein dreyſchenklichter Zirkel.
Ein Pantograph.
Ein Kreuzmaß (croſs - ſtaff).
Eine Bouſſole mit Dioptern (Circumferentes).
Ein Hadleyſcher Sextant.

Ein Scheibeninſtrument (Theodolite).
Ein Vermeſſungscompaß.
Meßketten.
King's Vermeſſungsquadrante.
Ein Schrittzähler.
Eine Weingeiſtwage.
Stationsſtäbe für die Wage.
Ein Transporteur mit oder ohne Nonius.

Hiezu kann man zur Land- und Seevermeſſung rechnen:
Ein aſtronomiſcher Quadrante.
Ein gutes refrangirendes oder reflectirendes Teleſkop.
Ein Kopirglas.

Zur Seevermeſſung.

Ein Stationstheiler (station pointer).
Ein Azimuthalcompaß.
Ein oder zwey Bootkompaſſe.

Auſſer dieſen angeführten wird man eine Menge Meſſungsſtäbe, eiſernen Spitzen u. ſ. f. ſehr bequem finden, desgleichen zwey oder drey Vermeſſungsſtäbe (off ſet ſtaves) von Holz gegen 6 Fuß 7 Zoll lang, und ohngefähr 1½ Zoll im Viereck; ſie müſſen genau in zehn gleiche Theile getheilt werden, deren jeder einem Gliede gleich iſt. Man bedient ſich ihrer zu Nebenmeſſungen, (off ſets), und um die Kette zu unterſuchen und zu berichtigen.

Fünf oder ſechs Stäbe, 5 Fuß lang und 1½ Zoll im Durchmeſſer, der obere Theil weiß angeſtrichen, das untere Ende aber mit Eiſen beſchlagen, um in den Boden als Merkmale eingetrieben zu werden.

Zwanzig oder mehr Spitzen, deren zehn immer mit der Kette gebraucht werden, um die Menge der Glieder zu zählen, und um die Richtung der Kette zu erhalten, ſo daß der gemeſſene Abſtand genau in einer geraden Linie ſey.

Feldmeſſer Taxe.

Taxe der Vermeſſungen in den Königlich-Preuſiſchen Landen, und beſonders in den Marken. (Leipz. Intellbl. 1782. S. 68).

Für einen Morgen a 180 □ Ruthen brauch und nutzbarer Acker und Wieſe 9 Pf. Für einen Morgen an Huthung, Seen, Büſchen und unbrauchbare Stücken 6 Pf. Für einen Morgen große Hayden, Seen, Büſche, Brücher von großem Umfange 4 Pf. Kettenzieher werden beſonders mit Tagelohn bezahlet. Bey Aufnahme einer Gränze für jede laufende Ruthe 3 Pf. Für Vermeſſung eines Grabens oder Weges pro Ruthe 2 Pf. Wofür denn noch eine doppelte Zeichnung abgeliefert wird, nebſt 2 Vermeſſungsregiſtern. Wenn ein Plan von einer andern Karte copirt wird, ohne zu verjüngen, wird jeder Quadrat Decimalfuß mit 2 Rthl. bezahlet. Wird ſie um ⅓ verjünget, ſo wird der Quadratfuß des Originals mit 1 Rthl. 16 gl., wird ſie um die Hälfte verjünget, mit 1 Rthl. 6 gl., um ein Viertel mit 1 Rthl. bezahlet, nähmlich: den Quadratfuß des Originals zu verſtehen.

Taxe für die Ingenieur bey Vermeſſung und Eintheilung der Forſten, nebſt Zeichnungsgebühren.

		Thl.	gl.	pf.
1	Wenn ein Forſt von neuem vermeſſen wird, worin der Ingenieur, nach Angabe des Forſtbedienten, die verſchiedenen Holzarten mit durchgeſteckten Linien ſepariren und in der Karte gehörig eintragen muß; ſo erhält derſelbe pro Magdeburgiſchen Morgen, incl. Schonungen, Raum, Aeckern, Wieſen, Hofſtellen, und was nur in dem Forſte nach der Inſtruktion zu notiren vorkömmt, mit der reinen Brouillonkarte nach dem vorgeſchriebenen Schemate, nebſt den Vermeſſungsregiſtern A. B. und D. ſowohl in geſchloſſenem Forſte als in ſeparirten Revieren excl. Materialien zum Zeichnen und Aufzeichnen der Karte.	—	—	5
2	Einen ſolchen vermeſſenen Forſt einzutheilen, nebſt den drey Vermeſſungs- und Eintheilungsregiſtern litt. C. anzufertigen, und die Schläge in die Brouillonkarte einzutragen, alles nach der Inſtruktion des Reglements pro Morgen.	—	—	1½
3	Für Beyhülfe bey der Abſchätzung, erhält der Ingenieur incl. des Taxationsregiſters pro Morgen.	—	—	½
4	Wenn auf alten Vermeſſungen Probelinien durchgeſtochen werden ſollen, pro drey Ruthen	—	—	1
	(zu Reviſionen der neuen Vermeſſungen muß derſelbe ex officio die Linien durchſtechen).			
5	Wenn eine alte Karte zur Eintheilung tauglich befunden wird; ſo erhält derſelbe für Anfertigung und Auftragung zu einer neuen Brouillonkarte a 50 Ruthen p. Decimalzoll incl. der ad 1 bemerkten Eintheilungs- und Vermeſſungsregiſter pro Morgen.	—	—	2
6	Wenn ohne eine neue Vermeſſung eine Gränze berichtiget und aufgetragen werden ſoll: indem bey einer neuen Vermeſſung ſolches ſchon mit Nr. 1 verbunden iſt, ſo erhält derſelbe dafür nebſt Anfertigung eines Gränzregiſters nach vorgeſchriebenem Schemate pro laufende Ruthe und zweimaligem Meſſen des Winkels.	—	—	½
7	Wenn einzelne kleine Stücke in oder auſſer dem Forſte vermeſſen werden, welche unter 70 Morgen halten; ſo wird pro Morgen bezahlt.	—	—	6
8	Pro laufende Ruthe zu invelliren, das Profil und den Situationsplan nach einer vorhandenen Karte anzufertigen, wobey die Stationen nicht weiter als 20 Ruthen genommen werden; hin und zurück zu wägen pro laufende Ruthe.	—	—	2
	Zeichengebühren.			
9	Für eine reine Brouillonkarte a 50 Ruthen p. Decimalzoll in eben der Größe zu copiren, incl. Papier und Farben pro vier Morgen.	—		1
	(Leinwand wird hierzu beſonders bezahlt).			
10	Eine ſolche Karte nach einem Maßſtabe von 250 Ruthen auf den Decimalzoll zu reduciren, incl. Papier, Leinwand und Farben pro ſechs Morgen.	—	—	1

		Thl.	gl.	pf.
11	Eine dergleichen Karte von 250 Ruthen p. Decimalzoll eben nach derſelben Größe zu copiren incl. Papier, Leinwand ꝛc. pro zehn Morgen.	—	—	1
	An Diäten.			
12	Wenn das Forſtdepartement entſcheidet, daß der Ingenieur bey kleinen Vermeſſungen, oder ſonſt zu andern Geſchäften auf Diäten arbeiten ſoll, ſo erhält derſelbe für einen ganzen Tag einen Reichsthl., für einen halben Tag 12 gl. und eben ſo 1 Thl. für den Tag auf Reiſen.			

Des durchlauchtigen Herzogs Carl zu Braunſchweig Inſtruktion für die Subdelegatos bey fürſtl. General Landesvermeſſungs = Commiſſion d. d. 28 Nov. 1755 ſteht in Schrebers neuen Samml. ꝛc. 7. Th. Bützow und Wißmar 1764. 8. S. 523 = 588.

Feldmeßkunſt *Geodaeſia.*

Dieſes iſt eine Wiſſenſchaft, die Figur eines kleinen Stücks unſerer Erdfläche auf dem Papiere zu entwerfen, und zeigt überhaupt, wie man die theoretiſchen Lehren der Geometrie anwenden könne, Abmeſſungen auf unſerer Erdfläche aufs leichteſte und vortheilhafteſte zu beſtimmen, und mit einander zu vergleichen.

Die nähere Vorſtellung davon iſt dieſe:

Man gedenke ſich z. E. auf dem Felde die Krümmung eines Fluſſes, die Gränzen einer Waldung, eines Gebirges, die Lage einer gewiſſen Menge von Oertern u. dgl. ſo geben dieſe Dinge allemahl eine gewiſſe Figur.

Geſetzt es ſeyen die Punkte A, B, C, D, E, F, Fig. 574 Oerter auf der Erdfläche. Man verbinde ſolche in Gedanken durch gerade Linien mit einander, ſo ergiebt ſich auf dem Felde die Figur A, B, C, D, E, F. Dieſe Figur nun auf dem Papiere zu entwerfen, das will ſagen, auf dem Papiere eine kleinere Figur abcdef Fig 575 zu verzeichnen, die der A, B, C, D, E, F, ſowohl im Ganzen als in ihren Theilen, ſo viel als möglich, und der jedesmahligen Abſicht gemäß, ähnlich iſt, und alle Abmeſſungen, die dabey erfordert werden, aufs leichteſte und vortheilhafteſte zu beſtimmen, dieſes iſt der Gegenſtand der Geodäſie. Und die hierzu erforderlichen Lehren aus der theoretiſchen Geometrie, verbunden mit einer genauen Kenntniß und Behandlung der praktiſchen Werkzeuge, machen die Wiſſenſchaft eines Feldmeſſers aus.

Wenn eine Figur abcdef auf dem Papiere der A, B, C, D, E, F, auf dem Felde völlig ähnlich iſt, folglich die Winkelpunkte a, b, c, d, e, f, eben die Lage gegen einander haben, wie die Winkelpunkte A, B, C, D, E, F, der Figur auf dem Felde, und die Seiten ab, bc, u. ſ. w. ſich unter einander ſo verhalten wie die AB, BC, u. ſ. w.; mit einem Worte, wenn alle Theile der Figur auf dem Felde, in eben der Ordnung, Verhältniß und Lage, auch im kleinern ſich bey der Figur auf dem Papiere vorfinden, dann ſagt man: die Figur auf dem Papiere ſey ein Grundriß, ein topographiſcher Entwurf, oder auch eine Karte von der Figur auf dem Felde, oder von dem kleinen Stücke der Erdfläche.

2. Eine ſolche geometriſche Karte unterſcheidet ſich von einer geographiſchen, in folgenden Stücken.

Die

Die erſtere ſtellt nicht nur allein die Gränze und Figur eines kleinen Stücks der Erdfläche dar, ſondern auch die einzelnen Theile derſelben, als: die Größe, Lage, und Figur der Städte, Dörfer, Flecken, die Richtung der Wege, Flüſſe, die Eintheilung und Gränzen der Gebirge, Waldungen, Wieſen und Felder; kurz in einer geometriſchen Karte werden alle einzelne und merkwürdige Punkte einer Gegend im Kleinen vorgeſtellt, ſo daß man alles auf ihr angemerkt findet, was zu einer gewiſſen Abſicht, und zur genauern Kenntniß eines Landes dienlich ſeyn kann.

Hingegen eine geographiſche Karte ſtellt meiſtens ein ſehr großes Stück der Erdfläche dar, ohne Angabe aller kleinen einzelnen merkwürdigen Punkte die ſich darauf befinden: ſo z. E. nur die Figur eines ganzen Landes, die Hauptrichtung der Flüſſe, die Lage der Städte u. ſ. w.

3. Zuſatz. Man ſiehet aus dem bisherigen, daß die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren in der Feldmeßkunſt von unendlichem Gebrauche ſeyn müſſe, da dieſe Lehren im großen auf dem Felde ausgeübt werden. Allein die gehörige Anwendung der theoretiſchen Lehren, von der Aehnlichkeit der Figuren, hat auf dem Felde oft unendliche Schwierigkeiten, und eine gewiſſe Art auf dem Papiere ein paar Figuren einander ähnlich zu machen, läßt ſich in manchen Fällen auf dem Felde gar nicht gebrauchen. So z. E. kann man ohne Schwierigkeit, auf dem Papiere rings herum alle Seiten und Winkel einer Figur meſſen, und ſolche nachher in eben dem Verhältniſſe und Ordnung, nur nach einen andern Maßſtabe verzeichnen, alſo die zweyte Figur der erſtern ähnlich machen.

Allein mit dieſem Verfahren läßt ſich auf dem Felde oft gar nichts ausrichten; man kann nicht immer wegen vorkommender Hinderniſſe auf dem Felde die Theile einer Figur an ihrem Umkreiſe unmittelbar meſſen; auch würde es oft unendlich mühſam ſeyn, wenn man an die auszumeſſenden Entfernungen, den Maßſtab oder die Meßkette ſo oft anlegen wollte als es angienge.

Man kann alſo eine gewiſſe Methode, ein paar Figuren einander ähnlich zu machen, nicht in jedem Falle auf dem Felde mit Vortheil gebrauchen, ſondern man muß unter den verſchiedenen Methoden diejenige auszuwählen wiſſen, vermittelſt der man am leichteſten ſeinen Endzweck erreichet.

Ferner müſſen auch in der Geodäſie die Mittel angegeben werden, aus gewiſſen gegebenen oder willkührlich angenommenen Datis, diejenigen Umſtände und Abmeſſungen einer Figur zu beſtimmen, die man entweder gar nicht, oder nur durch ſehr viele Mühe und Arbeit unmittelbar finden könnte.

Die Auflöſung ſolcher ſchweren Fälle erhält man vermittelſt einer gehörigen Anwendung der theoretiſchen Geometrie, wo gezeigt wird, wie man Größen durch Schlüſſe herausbringen, und mit einander vergleichen könne. Und in ſolchen Fällen unterſcheidet ſich der wiſſenſchaftliche Feldmeſſer von dem ſogenannten handwerksmäſigen, welcher aus Mangel nöthiger Kenntniſſe, oft entweder gar nichts, oder mit unbeſchreiblicher Mühe nur etwas ſehr unvollkommenes leiſtet.

4. Anmerkung. Das Papier auf dem man eine gewiſſe Figur auf dem Felde zu entwerfen hat, iſt eine ebene Fläche; nun aber liegen die Theile einer Figur auf dem Felde ſehr ſelten in einer einzigen Ebene. Es fragt ſich daher wie man in ſolchen Fällen ſich die Sache vorſtellen müſſe. Denn das läßt ſich leicht überſehen, daß es unmöglich ſey, auf einer ebenen Fläche eine Figur

gur einer andern ähnlich zu machen, deren Theile nicht alle in einer einzigen Ebene liegen.

Um nun dieſe Schwierigkeit gehörig ins Licht zu ſetzen, und zu zeigen, wie man ſich bey ihr verhält, ſo muß ich vorher kürzlich folgende Sätze, die in der Feldmeßkunſt überall gebraucht werden, zum voraus ſchicken.

Es lehret die Erfahrung, daß die Richtungen zweyer oder mehrere Fäden, an denen man ſchwere Körperchen z. E. Bleykugeln herabhängen läßt, ſo genau als man es bemerken kann, mit einander gleichlaufend ſind. Eine ebene Fläche, die man ſich auf die Richtung dieſer Fäden, welche man Verticallinien nennet, ſenkrecht vorſtellet, heißt eine Horizontalfläche, und jede andere Fläche eine ſchiefe.

So z. E. ſind die ſchrägen Abdachungen der Berge keine Horizontalflächen, denn jeder Verſuch wird zeigen, daß die verticale Richtung einer herabhängenden Kugel, mit der Anhöhe eines Berges ſchiefe Winkel machet.

Hingegen die Oberfläche eines ſtillſtehendes Waſſers, wie auch die Ebene des ſogenannten platten oder flachen Landes wird horizontal ſeyn.

So kann man ſich an jedem Orte, wo man ſich befindet, eine Horizontalfläche gedenken, und ſolche nach allen Gegenden ſo weit man will erweitert vorſtellen.

Auch werden alle Horizontalflächen mit einander parallel ſeyn, weil ſie insgeſammt auf den parallelen Richtungen der Verticallinien ſenkrecht ſtehen.

Dieſe Horizontalflächen ſind in der praktiſchen Geometrie von unendlichem Gebrauche, weil man ſie in jedem Falle vermittelſt eines mit Waſſer angefüllten Gefäßes ſinnlich machen kann.

Um nun nach dieſen Betrachtungen die im Anfange dieſes § gedachte Schwierigkeit zu heben, ſo überlege man folgendes.

Man ſtelle ſich vor die Punkte a, b, c, d, e, Fig 567 auf dem Felde ſeyen nicht alle in einer einzigen Ebene, ſondern nach Gefallen einer über dem andern erhöhet, wie wenn z. E. die erwähnten Punkte, Spitzen verſchiedener Gebirge wären.

Nun gedenke man ſich auf dem Felde, wo man will, eine Horizontalfläche. Die Ebene des Papiers, worauf ſich die 576 Fig befindet, mag dieſe Horizontalfläche vorſtellen, und die Punkte a, b, c, d, e, ſeyen alſo nach Gefallen über dieſelbe erhaben.

Man fälle von den Punkten a, b, c, d, e, auf die Horizontalfläche die perpendikulär oder Verticallinien aα, bβ, cγ, dδ, eε, herab.

Die Punkte α, β, γ, δ, ε, wo dieſe Perpendikulärlinien in die Horizontalfläche eintreffen, nennet man die Projektionen der Punkte a, b, c, d, e, auf die Horizontalfläche, oder man ſagt: α, β, γ, δ, ε, ſeyen die auf den Horizont reducirten Punkte a, b, c, d, e, die Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, u. ſ. w. heiſſen die auf den Horizont reducirten Linien ab, bc, u. ſ. w.

So begreift man alſo leicht, wie man ſich überhaupt eine ganze Figur auf dem Felde mit allen ihren Theilen auf die Horizontalfläche reducirt vorſtellen könne.

Eine ſolche auf den Horizont gebrachte Figur α, β, γ, δ, ε, deren Theile nun alle in einer einzigen Ebene liegen, iſt es eigentlich, um die man ſich in der Feldmeßkunſt bekümmert, und von der man auf dem Papiere einen Grundriß verfertigen kann. Eine Figur auf dem Papiere die alſo der auf

den

den Horizont reducirten Figur $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ähnlich iſt, heißt eigentlich der Grundriß der Figur abcde.

So würde alſo der Grundriß eines Gebirges, diejenige Figur auf dem Papiere vorſtellen, welche derjenigen ähnlich iſt, die man erhielte, wenn man die Gränzen und die ganze Oberfläche deſſelben auf die Horizontalfläche reducirt hätte.

Und ſo erhellet ferner, was z. E. der Grundriß eines ganzen Landes ſagen will.

5. Zuſatz. Ein Grundriß kann alſo nicht die verſchiedenen Erhöhungen der einzelnen Theile einer Figur über der Horizontalfläche angeben, ſondern er beſtimmt bloß den Raum, den eine gegebene Figur auf der Horizontalfläche einnimmt.

Von den Grundriſſen unterſcheidet man zum Gegentheil die Profilriſſe, welche diejenige Figur vorſtellen, welche man erhielte, wenn man z. E. eine bergichte Gegend, mit einer auf der Horizontalfläche ſenkrechten Ebene, mit einer Verticalfläche, durchſchnitte.

6. Zuſatz. Einige nöthige Betrachtungen über das vorhergehende werden wir nun hier noch beybringen. Man ſetze es werde Fig 576 durch den über der Horizontalfläche $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ erhabnen Punkt e die Linie en mit $\varepsilon\gamma$, und ei mit $\varepsilon\delta$ parallel gezogen, ſo ſind die Linien en, ei, horizontal, und der Winkel ien = $\delta\varepsilon\gamma$. Auch liegt en in der Verticalfläche durch eε, cγ; und ei in der durch eε, dδ.

Es iſt daher der Winkel ien = $\delta\varepsilon\gamma$ das Maß des Neigungswinkels, den die Verticalfläche durch die beyden Gegenſtände e, d, mit der Verticalfläche macht, in der die Gegenſtände e und c liegen.

Wenn man alſo im Stande iſt auf dem Felde bey e den Winkel ien zu meſſen, den ein paar Horizontallinien ei, en, in den erwähnten Verticalflächen durch e und d und durch e und c mit einander machen, ſo hat man den Winkel $\delta\varepsilon\gamma$ den die drey Gegenſtände d, e, c, im Grundriſſe mit einander machen müſſen.

Wenn e, d, ein paar Punkte ſind, durch welche eine Verticalfläche gelegt iſt, ſo werde ich in der Folge dieſe Verticalfläche bloß durch ed bezeichnen, nähmlich bloß durch zwey Buchſtaben, die ſich auf die Punkte oder Gegenſtände e, d, beziehen, durch welche man ſich eine Verticalfläche vorſtellet.

7. Zuſatz. Man verlängere die horizontale Linie ei, bis ſie bey m in die Verticallinie δd einſchneidet, ſo iſt em = $\varepsilon\delta$.

Es iſt alſo ed die wahre Entfernung der beyden Gegenſtände e, d. em = $\varepsilon\delta$ iſt aber die Entfernung der beyden Punkte e, d, nach der Horizontallinie gerechnet, oder ihr Horizontalabſtand, und dieſe em oder $\varepsilon\delta$ iſt es eigentlich, die man im Grundriſſe für den Abſtand der beyden Oerter e und d angiebt.

8. Zuſatz. Der Triangel dme iſt bey m rechtwinklicht, und eine Ebene durch ihn ſtehet auf der Horizontalfläche ſenkrecht. Auch drückt man das Stück dm aus, um wie viel der Ort d niedriger als e, oder um wie viel e höher liegt als d.

Wäre alſo in dem Dreyecke dme, die wahre Entfernung ed, und die Tiefe des Punkts d unter e, oder dm gegeben, ſo könnte man daraus em = εd, oder die auf den Horzont reducirte Entfernung der beyden Gegenſtände e, d berechnen, denn es wäre em = $\varepsilon\delta$ = $\sqrt{}$ (ed^2 — md^2).

Auch lieſſe ſich der Winkel dem berechnen; für ihn wäre

$$\sin dem = \frac{md}{dc}.$$

Es iſt aber dem die Neigung des Schenkels ed, oder der wahren Weite beyder Objekte e. d, gegen die Horizontallinie em.

Hat man eben ſo auch die Neigung des Schenkels ec gegen die Horizontallinie en, ſo kann man aus den gegebenen Neigungen der beyden Schenkel ec, ed, nebſt dem Winkel dec, den ſie mit einander machen, den Horizontalwinkel men = δεγ, durch die ſphäriſche Trigonometrie finden.

9. Die bisherigen Betrachtungen zeigen den Grund von verſchiedenen Aufgaben und Operationen auf dem Felde.

Die Urſache warum man eine Figur auf die Horizontalfläche reduciret, iſt:

1. Weil ſich die Lage und Richtung einer horizontalen Ebene weit leichter angeben, und ſinnlich machen läßt als jede andere, die gegen den Horizont geneigt wäre. Denn man darf ſich an einem gewiſſen Orte nur eine Waſſerfläche, oder die Oberfläche eines mit Waſſer angefüllten Gefäßes gedenken, ſo hat man ſogleich daſelbſt eine horizontale Ebene.

2. Weil man den natürlichen Werth eines Grundſtückes, oder überhaupt eines Landes, nach dem Raume beurtheilt, den ſolches auf der Horizontalfläche einnimmt. Da nähmlich die Erfahrung lehret, daß alle Früchte und Gewächſe nach verticalen, oder auf der Horizontalebene ſenkrechten Richtungen wachſen, ſo ſchließt man, daß auf den erhabenen, gewölbten und ungleichen Hügeln einer bergichten Gegend nicht mehr Gewächſe ſtehen können, als auf dem flachen Lande.

3. Iſt es gar nicht möglich von einer Gegend, deren einzelne Theile verſchiedene Erhöhungen und Lagen haben, einen Riß zu entwerfen, oder ſie auf dem ebenen Papiere in einer ähnlichen Figur darzuſtellen, man muß ſie alſo zuvor auf eine und dieſelbe Ebene reduciren, und dazu iſt, aus obigen Gründen, dies die ſchicklichſte.

Eine der nöthigſten Vorſchriften eines Feldmeſſers beſtehet alſo darinnen, alle Abmeſſungen der Theile einer Figur auf den Horizont zu reduciren; und je unebener das Stück der Erdfläche iſt, auf dem man miſſet, deſto wichtiger iſt dieſe Vorſchrift.

Die Gränzen der gemeinen Geodäſie.

11. Dieſe gehen eigentlich nur ſo weit, als die Erfahrung (4) wahr iſt. Wenn man annimmt, daß unſere Erde die Geſtalt einer Kugel hat, ſo werden die Richtungen der Schwere an zweyen ſehr weit von einander entlegenen Oertern, nicht mehr einander parallel ſeyn, und folglich auch nicht die auf den Verticallinien ſenkrecht ſtehenden Horizontalflächen. Man ſetze unſere ganze Erde ſey mit Waſſer umgeben, ſo wird, aus phyſikaliſchen Urſachen, die Oberfläche des Waſſers nicht eine ebene, ſondern eine ſphäriſche Geſtalt annehmen, und das würde ein Bild von der eigentlichen Figur der Erdfläche ſeyn, welche man wohl von derjenigen unterſcheiden muß, ſo wie ſie gewöhnlich mit ihren höckerichten und bergichten Stellen in die Augen fällt.

Iſt nun $\alpha\beta$ Fig 577 ein kleines Stückchen von der eigentlichen Oberfläche unſerer Erdkugel, ſo kann man annehmen, daß ſolches in Abſicht der ganzen Erdfläche, keine merkliche Krümmung habe, und folglich als eben angeſehen werden könne.

Nun

Nun ſey e über dem Stückchen $\alpha\beta$ nach Gefallen erhaben, z. E. e die Spitze eines Bergs, und man gedenke ſich bey e eine Waſſerfläche, ſo wird da auf ihr perpendikular, des Orts e Verticallinie ſeyn. Weil aber, wie ebenfalls in der Naturlehre gezeigt wird, die Waſſerfläche eines beliebigen Orts e, mit dem kleinen Stückchen $\alpha\beta$ der eigentlichen Erdfläche, über welchem der Ort erhaben iſt, parallel lauft, ſo wird de auch auf $\alpha\beta$ ſenkrecht ſtehen, und es iſt daher ein ſehr kleines Stückchen der Erdfläche ſelbſt eine Horizontalebene.

Nun ſey an einem andern Orte i, welcher ſich über dem Stückchen $\gamma\delta$ der Erdfläche befindet, ebenfalls ik, eine auf der Waſſerfläche, und folglich auf $\gamma\delta$ ſenkrechte Linie. Weil alſo de, auf $\alpha\beta$, und ik auf $\gamma\delta$ ſenkrecht ſtehen, ſo müſſen offenbar beyde Verticallinien de, ki, nach dem Mittelpunkte der Erdkugel c, hinlaufen.

Auf dieſe Art kommen eigentlich alle Verticallinien in dem Mittelpunkte der Erdkugel zuſammen, und ſind daher nicht, wie oben zum vorausgeſetzt worden, unter einander parallel. Weil aber der Mittelpunkt der Erde von der Oberfläche derſelben, ohngefähr um 860 deutſche Meilen entfernt iſt, und man Linien, die ſich in einem ſo weit entlegenen Punkte, und unter einem ſehr kleinen Winkel durchſchneiden, ohne großen Fehler als parallel anſehen kann, ſo erhellet, daß, wenn die beyden Oerter e, und i, nicht ſehr weit von einander entfernt ſind, und folglich ihre Verticallinie ed, ik, bey c nur unter einem ſehr kleinen Winkel eci zuſammen treffen, man auch ohne merklichen Irrthum berechtiget ſey, die Richtung dieſer Verticallinie ſelbſt, ſo weit man es durch die Sinne bemerken kann, wie auch daher die auf ihnen ſenkrecht ſtehende Horizontalflächen, als gleichlaufend, und den Theil der eigentlichen Erdfläche, der zwiſchen e und i liegt, als eben, oder ohne merkliche Krümmungen zu betrachten. In ſofern iſt alſo die Erfahrung (4) richtig, und ſo weit gehen auch nur die Gränzen der gemeinen Feldmeßkunſt.

Sie erſtreckt ſich alſo nur auf ein ſehr kleines Stückchen der Erdfläche, in ſoferne es keine merkliche Krümmungen hat, und lehret, wie die Figur deſſelben auf dem Papiere entworfen werden könne.

Hätte man ein ſehr großes Stück der Erdfläche auf dem Papiere zu entwerfen, ſo gehören dazu Kenntniſſe der höheren Mathematik und Aſtronomie, die aber, ſo lange man nur ein kleines Stück der Erdfläche betrachtet, nicht unumgänglich nothwendig ſind. Man könnte denken, weil ſich nach den Regeln der gemeinen Feldmeßkunſt, ein jedes kleines Stückchen der Erdfläche vermeſſen läßt, ſo dürfte man nur alle dieſe kleine Stückchen zuſammen ſetzen, um den Grundriß oder die Projektion eines ſehr großen Theils der Erdfläche zu erhalten.

Allein man überlege, daß dieſes wegen der Krümmung unſerer Erde ſo gerade hin nicht angeht, ſondern daß auch hierzu Reduktionen und Kenntniſſe erfodert werden, die man wohl meiſtens bey Feldmeſſern nicht vorausſetzen kann.

Indeſſen aber erſtrecket ſich die gemeine Geodäſie ſchon auf eine beträchtliche Weite. Denn unſere Erde iſt ſo groß, daß man einen Diſtrikt von 12 bis 15 Quadratmeilen wohl ohne merklichen Irrthum als eben anſehen, und ihn alſo nach den Regeln der gemeinen Geodäſie vermeſſen und entwerfen kann. Wenigſtens läßt ſich der von der ſphäriſchen Geſtalt der Erdfläche herrührende Fehler, ſehr leicht beurtheilen.

Die

Die nothwendigſten Kenntniſſe eines Feldmeſſers.

12. Dieſe ſind.

1) Eine vollſtändige Kenntniß der theoretiſche Elementargeometrie, und insbeſondere desjenigen, was darinnen von der Aehnlichkeit der Figuren bewieſen wird.

2) Die Kenntniß trigonometriſcher Rechnungen; ohne welche bey Vermeſſungen, die nur einigermaßen ins Große geben, wenig oder gar nichts geleiſtet werden kann. Hauptſächlich dienen die bekannten trigonometriſchen Formeln für die Zuſammenſetzung der Sinuſſe und Coſinuſſe u. ſ. w. zu vielen wichtigen Abkürzungen und Vortheilen, in denen in der Geodäſie vorkommenden und nothwendigen Rechnungen.

3) Die erſten Gründe von der Algebra werden auch mit unendlichen Nutzen gebraucht werden können.

4) Da bey den geodätiſchen Vermeſſungen immer gewiſſe Linien und Winkel unmittelbar gemeſſen werden müſſen, um andere unbekannte Stücke daraus herleiten zu können, ſo verſtehet es ſich von ſelbſt, daß man allen möglichen Fleiß und Sorgfalt anwenden müſſe, ſolche Dinge, die zur Beſtimmung anderer dienen ſollen, ſo genau als möglich zu meſſen; und hierzu gehöret eine gewiſſe natürliche oder durch Uebung erlangte Fertigkeit, auf eine gehörige und leichte Art mit den Werkzeugen umzugehn, und alſo dadurch wenigſtens die groben Fehler zu vermeiden, die eine Trägheit und Ungeſchicklichkeit der Hände zur Quelle haben.

5) Der Feldmeſſer muß genau die Natur und Einrichtung ſeiner Werkzeuge kennen, mit denen er Meſſungen anſtellt: er muß ihre Fehler zu beurtheilen und zu prüfen wiſſen.

Fehler die eine ungeſchickte Behandlung der Werkzeuge zum Grunde haben, werden allemahl auf die Rechnung des Feldmeſſers geſetzt: hingegen ſolche Fehler, die aus der Unvollkommenheit der Werkzeuge (z. E. bey einem Winkelmeſſer aus der Unmöglichkeit einen Kreis völlig genau einzutheilen u. ſ. w.) entſpringen, kann wohl kein Feldmeſſer vermeiden: Er muß aber doch aus der Natur eines Inſtruments zu beurtheilen wiſſen, wenigſtens wahrſcheinlicher Weiſe, wie genau er mit demſelben meſſen könne; ob die unvermeidlichen Fehler in den gemeſſenen Stücken, auf die Beſtimmung der unbekannten, einen beträchtlichen Einfluß haben oder nicht.

Mit einem Worte, er muß den Grad der Zuverläſſigkeit einer Vermeſſung, wenn es verlangt wird, anzugeben wiſſen.

6) Da ferner bey einer Vermeſſung es immer eine der Hauptabſichten eines Geometers ſeyn muß, mit der Arbeit ſobald als möglich fertig zu werden, ſo erhellet, daß man nicht mehr Stücke unmittelbar meſſen müſſe, als unumgänglich nothwendig ſind, die übrigen unbekannten daraus herzuleiten.

Man erſpart dadurch nicht nur ſehr viel überflüſſige Arbeit, ſondern auch oft große Unkoſten. Beſonders muß man auch dahin trachten, diejenigen Stücke zur Beſtimmung der unbekannten auszuwählen, die nicht nur am bequemſten gemeſſen werden können, ſondern von denen auch die geringſten Fehler in Abſicht auf die Folge zu befürchten ſind.

Daß hierin die Feldmeſſer ſehr oft fehlen, die Arbeit länger als nothwendig aufhalten, iſt kein Wunder, wenn man überlegt, daß oft nicht nur bloße Unwiſſenheit, ſondern wirklich noch öfterer, die Begierde Geld zu gewinnen zum Grunde liegt.

7) Da

7) Da eine genaue Meſſung der Linien und Winkel immer die Hauptſache in der Geodäſie iſt, ſo muß ſich ein Feldmeſſer außer den Fehlern, die von der Unvollkommenheit der Werkzeuge entſpringen, noch um andere phyſikaliſche Urſachen bekümmern, die unſere Meſſungen unſicher machen, und zu Fehlern Gelegenheit geben, und die beſonders bey wichtigen Vermeſſungen eine nöthige Sorgfalt empfehlen;

Dahin gehören z. E.

a) Fehler die von der Undeutlichkeit entfernter Gegenſtände herrühren. Nähmlich es lehret die Erfahrung daß man Gegenſtände, die ſehr weit weg liegen, nicht mehr deutlich unterſcheiden kann. Die Urſache hievon liegt ſowohl in unſerm Auge ſelbſt, als auch darinnen, daß die ſich zwiſchen unſerm Auge und dem Gegenſtande befindliche Athmoſphäre einen großen Theil der von dem Objekte ausfahrenden Lichtſtrahlen aufhält. Es hängt aber die undeutliche Empfindung entlegener Gegenſtände noch von mehreren Umſtänden ab, die ich hier nicht alle erklären kann.

Die Folge aber hieraus iſt dieſe:

Wenn man in einer gewiſſen Entfernung ein Objekt, das z. E. unter einem Winkel von 2 Minuten ins Auge fällt, nicht mehr deutlich erkennen kann, ſo können die Dioptern eines Winkelmeſſers, nach dem Augenmaße zu urtheilen, nach dem Gegenſtande noch ſo genau gerichtet zu ſeyn ſcheinen, und es bleibt doch mit der Ungewißheit einer Minute unentſchieden, ob man die Dioptern nicht um etwas verrücken ſoll.

b) Fehler die von den Strahlenbrechungen herrühren. Nähmlich ein Lichtſtrahl, der von einem erhabenen Objekte durch die Luft in unſer Auge kömmt, gehet in keiner geraden Linie fort, und daher erfordern beſonders Winkel, die ſolche Gegenſtände an unſerm Auge machen, einige Verbeſſerungen.

c) Fehler, die aus der Vorausſetzung herrühren, daß alle Mittagslinien, wie auch die Richtungen der Magnetnadel, ſich beſtändig parallel ſind.

8) Ueberhaupt ſind aber auch aus der Urſache, einem Geometer die vornehmſten Kenntniſſe der Naturlehre wichtig, weil verſchiedene Vorrichtungen an den Werkzeugen, wie auch einige praktiſche Arbeiten ſelbſt ohne ſie nicht verſtanden werden können. Insbeſondere ſind die optiſchen Wiſſenſchaften von ſehr großem Gebrauche in der Feldmeßkunſt.

Auch ſelbſt bieten die Eigenſchaften der natürlichen Körper dem Geometer oft wichtige Vortheile an, beſonders in ſolchen Fällen, wo man nur eine ohngefähre Beſtimmung der unbekannten Stücke verlangt. So z. E. dienen der Schatten, die Geſchwindigkeit des Schalles u. ſ. w. wenn man Entfernungen nur beyläufig beſtimmen will.

9) Da faſt jedes geometriſches Werkzeug gewiſſen Fehlern, in Abſicht auf deſſen Einrichtung und Zuſammenſetzung unterworfen iſt, ſo verſtehet es ſich doch von ſelbſten, daß der Geometer, wenn er anders was genaues zu Stande bringen will, immer dasjenige Werkzeug auszuwählen wiſſe, welches den damit vorzunehmenden Vermeſſungen am angemeſſenſten, nicht zuſammen geſetzt, im Ganzen ſowohl, als in allen ſeinen Theilen fleißig ausgearbeitet, dauerhaft, und wo möglich zu mehr als einem Endzwecke dienlich iſt.

10) Endlich muß ich noch erinnern, daß man bey jeder Vermeſſung ſich allemal nach dem Grad ihrer Wichtigkeit verhalten müſſe. Man muß zu beurthei-

urtheilen wiſſen, in welchen Fällen es der Mühe werth ſey, mehr oder weniger Vorſichtigkeit zu beobachten; und in wieferne man dadurch unnöthige Mühe und Arbeit erſparen könne. Wenn z. E. ein Feldmeſſer bey der Ausmeſſung eines Ackers oder Wieſenſtücks von unbeträchtlicher Größe, alle kleinen Fehler, die, ſowohl aus Unvorſichtigkeit, als aus dem Baue der Werkzeuge, und andern phyſikaliſchen Urſachen entſpringen, in Betrachtung ziehen wollte, ſo würde dieſes eine Mühe ſeyn, die ihm niemand belohnen würde. Ja es würde eine Thorheit ſeyn, wenn man in ſolchen Fällen ſo genau verfahren wollte.

Hingegen je wichtiger eine Meſſung iſt, und jemehr ſie ins Große gehet, deſto vorſichtiger muß der Geometer verfahren, und ſich keine, auch nicht die kleinſten Fehler vorſetzlich erlauben; weil viele kleine Fehler ſich häufen, und bey einer großen Figur, am Ende oft eine große Unrichtigkeit nach ſich ziehen.

Noch einige nothwendige Erinnerungen.

13) 1. Ich habe ſchon im Vorhergehenden geſagt, daß die Hauptſache auf dem Felde darinnen beſtehe, gerade Linien und Winkel auszumeſſen, und daraus andere unbekannte Dinge herzuleiten. Ferner, daß man nicht mehrere Stücke unmittelbar ausmeſſen müſſe, als zur Beſtimmung der Unbekannten unumgänglich nothwendig ſind.

Indeſſen aber pflegt man doch unterweilen ein oder mehrere Stücke auszumeſſen, die an ſich überflüſſig ſind, aus welchen man aber den Grad der Zuverläſſigkeit einer Vermeſſung beurtheilen will.

Z. E. Hätte man in einem Dreyecke auf dem Felde die beyden Seiten nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel gemeſſen, ſo reichen dieſe Data zu, um den ganzen Triangel auf dem Papiere zu verzeichnen, und die übrigen unbekannten Theile deſſelben entweder durch Zeichnung oder Rechnung zu finden.

Hätte man aber in Meſſung der erwähnten drey Stücke irgendwo einen Fehler begangen, ſo würde ſich dieſes zeigen, wenn man in dem Dreyecke noch ein viertes Stück mäſſe, und ſolches mit eben dem Stücke vergliche, wie es ſich aus den erſtern drey datis nach der Berechnung ergäbe. Zeigte ſich, daß dieſes zum Ueberfluß gemeſſene vierte Stück des Dreyecks mit der Berechnung nicht übereinſtimmt; ſo ſind folgende drey Fälle möglich:

Entweder iſt bloß in denen drey erſten datis, die zur Beſtimmung des Dreyecks nothwendig waren, ein Fehler vorgefallen.

Oder: die drey erſten Data ſind richtig gemeſſen worden, und es iſt nur ein Fehler in dem zur Prüfung der Arbeit gemeſſenen Stücke begangen worden. Oder: man hat, ſowohl in der Meſſung der erſtern drey, als auch des vierten Stücks gefehlet.

Findet der erſte Fall ſtatt, ſo würde freylich das vierte richtig gemeſſene Stück die fehlerhafte Beſtimmung der erſtern drey anzeigen.

Bey dem zweyten und dritten Falle würde ſich aber aus dem zur Prüfung gemeſſenen Stücke nichts auf die Richtigkeit der ganzen Arbeit ſchlieſſen laſſen. Und wir leiten daraus dieſe Folge her: daß, wenn man aus einigen zum Ueberfluß gemeſſenen Dingen von der Richtigkeit einer ganzen Vermeſſung ein Urtheil fällen will, man ſolche Stücke ſelbſt mit aller möglichen Sorgfalt beſtimmen müſſe; denn ſonſt könnte man die Fehler, die man in deren Meſſung begangen hat, als eine Folge der Unrichtigkeit in Abſicht auf die ganze Figur anſehen.

II) Es läßt ſich leicht zeigen daß ein Fehler, der in Meſſung der gegebenen, oder willkührlichen Theile einer Figur vorgefallen iſt, nicht durchgehends auf jedes der unbekannten Stücke gleich großen Einfluß habe, ſondern daß die Folge eines Fehlers bald größer bald kleiner ſeyn könne, je nachdem die Theile einer Figur eine gewiſſe Lage gegen einander haben. Ja es giebt Fälle, daß man gerade ein Stück zur Prüfung miſſet, auf welches die begangenen Fehler gar keinen Einfluß gehabt. — Wie würde ſich alſo aus einem ſolchen Stücke beurtheilen laſſen, ob irgendwo in der Figur eine Unrichtigkeit ſtecke?

Ueberhaupt muß alſo ein Feldmeſſer ohngefähr wiſſen, dasjenige Stück zur Prüfung auszuwählen, auf welchem die Folge der begangenen Fehler am ſichtbarſten iſt, und woraus ſich am meiſten etwas auf die Richtigkeit des Ganzen ſchlieſſen läßt.

III) Wenn man in jedem Falle wirklich die wahre Größe des Fehlers angeben könnte, den man in Ausmeſſung eines jeden einzeln Stücks begangen hat, ſo würde man ohne Schwierigkeit die auf die ganze Figur erfolgende Verbeſſerung berechnen können, und es würde ſo gut ſeyn, als wenn man gar keinen Fehler begangen hätte, wenn man deſſen Größe kennet.

Allein da eben dieſe, bey allen praktiſchen Arbeiten vorfallende, und nicht zu vermeidende Unrichtigkeiten bald größer bald kleiner ſeyn können, ſo bleibt weiter kein Hülfsmittel als folgendes übrig.

Man nimmt an, daß man einen Fehler begangen hat, beurtheilt deſſen Möglichkeit, und wahrſcheinliche Größe, aus der Einrichtung und der Schärfe des Werkzeugs, mit dem man miſſet, und ſchätzt daraus deſſen Folge, in Abſicht auf die ganze Figur: das will ſagen: wenn man z. E. einen Winkelmeſſer gebrauchte, bey dem man für einen Fehler von 4′ nicht gut ſtehen könnte, ſo nimmt man an, man begehe bey der Meſſung eines jeden Winkels einen Fehler von 4′, und ſucht zu berechnen, was daraus in Abſicht der unbekannten Stücke und der ganzen Figur für eine Unrichtigkeit erfolgt, und ſchätzt alſo daraus die größte mögliche Zuverläſſigkeit einer Vermeſſung. Denn ob man gleich vielleicht einen kleinern Fehler als 4′ begehen kann, ſo iſt man doch darinnen ungewiß, weil das Werkzeug keine größere Genauigkeit zuläßt. Aus der Möglichkeit alſo einen ſolchen Fehler zu begehen, muß man den Grad der Zuverläſſigkeit beurtheilen.

IV) Die Theorie, die Zuverläſſigkeit einer Vermeſſung zu berechnen, die Wahl ſolcher Umſtände auf dem Felde zu treffen, bey denen man die geringſten Folgen zu befürchten hat, und andere dahin gehörige nützliche Betrachtungen machen wenigſtens für einen Feldmeſſer, der nur einigermaßen ſich über die gemeinen Kenntniſſe erheben will, eine ſehr nöthige und nützliche Beſchäftigung aus.

Die Geſchichte der Feldmeßkunſt ſiehe in dem Artickel Geometrie nach.

Geometriſche und graphiſche Verſuche, oder Beſchreibung der mathematiſchen Inſtrumente, deren man ſich in der Geometrie — Vermeſſung — bedient, von Georg Adams. Aus dem Engl. von J. G. Geißler. M. 39 K. Leipzig 1795. gr. 8.

G. Adams geometriſche und graphiſche Verſuche, Anhang oder Tafeln für die Größe der nördlichen, ſüdlichen, öſtlichen und weſtlichen Richtung für einzelne Gra

de und 15te Minute des Quadrantens bey einer Entfernung von 1 bis 100 von John Gal: gr. 8. Leipzig b. Cruſius 1795.

Anfangsgründe der Geometrie nebſt Anwendung derſelben auf die Feldmeßkunſt, zum Gebrauche der Kadets im Potsdamſchen Waiſenhauſe; m. K. 8. Potsdam 1783.

Nouvell Inſtrument d'Ichnographie, pour lever les plans, terriers etc. de campagne, ſans ſe ſervir d'échelle, ni calcul, ni meſurage, dès qu'on a trois ou quatre points levés, par M. Antoine: ſ. n. 1 K. T. im Iourn. oeconom. Mars 1760, S. 109-111.

Anweiſung für gemeine Feldmeſſer, m. K. 8. Marburg Acad. Buchh. 1796.

Anweiſung zur Geometrie, in welcher ſowohl die Theoria als Praxis derſelben deutlich gelehret wird, 8. Frankf. 747 15½ B. 6 gr.

Ardüſers 14 Bücher von dem Feldmeſſen, m. Kupf. 4. Zürch 1646.

Arnolds Joh. Nik. praktiſcher Ingenieur, worinnen die Rechenkunſt, Geometrie, theoretiſch und praktiſch bewieſen u. ſ. w. Köln 1793. 4.

Aſter (F. L.) Anmerkungen und Erläuterungen zu Th. Bugge Beſchreibung der Ausmeſſungs-Methode ꝛc. aus dem däniſchen überſetzt von Marcus. Dresden 1787. 4.

Andr. Auer disquiſitio problematis mathematici: „Menſurare et diſtribuere ſyluam aut paludem inacceſſibilem et imperſpicuam meliori modo, vel in partes aequales vel datae proportionis, et oſtendere, ad quantam magnitudinem hoc effici, et quantum vel calculo debite et exacte finito ſic a veritate aberrari poſſit, adhibitis inſtrumentis geometricis aut non", quam praemio Iablonowskiano ſocietas phyſica Gedanenſis adfecit 1766. d. 19. Martii. Hrn. Andr. Auer Abhandlung über die geometriſche Aufgabe: „Einen unzugänglichen und undurchſichtigen Wald oder Moraſt auf die beſte Weiſe auszumeſſen, und denſelben entweder in gleiche Theile, oder in Theile nach gegebener Verhältniß, zu theilen; ferner, bis zu welcher Größe dieſes möglich ſey, zu zeigen, und wie weit man bey der genaueſten Berechnung dennoch von dem wirklichen Gehalt abweichen könne, es ſey, daß man mit oder ohne geometriſche Werkzeuge arbeite:" welcher von der naturforſchenden Geſellſchaft in Danzig 1766, den 19. Merz, der Fürſtl. Jablonowskiſche Preis zuerkannt worden. Aus der lateiniſchen Urſchrift überſetzt. Lat. und deutſch, Danzig 1767, 4. 4 B. nebſt 2 Kupfr.

Die Frage iſt, eine Figur in Grund zu legen, deren Gränzen man nur ſehen, aber nicht dazu kommen kann. Herr Auer mißt alſo vor der Figur eine Grundlinie, mit dieſer verbindet er andere Standlinien um die Figur herum, aus deren Enden er nach den Gränzen der Figur, und nach den benachbarten Standpunkten viſirt, und nach ſo ausgemeſſenen Winkeln, und der gemeſſenen Grundlinie, andere Linien trigonometriſch berechnet, welche die Gränzpunkte der Figur beſtimmen. Die Verzeichnung räth er, anſtatt des Transporteurs, durch Dreyecke, deren Seiten man berechnet hat, zu machen.

Bendelers, Joh. Phil. planimetria practica, oder Feldmeßkunſt, nebſt der quadratura circuli und rechten proportione diametri, 4. Quedlinburg 700 8 Bog. 3 gl.

= = = emendirte planimetria, 4. Quedlinb. 701. 3¾ B. 1 b. K. 2 gr.

Beyer

Beyer J. M. höchſt nöthiger Unterricht für Ritterguts- und Gutsbeſitzer, welche ihre Güter und Ländereyen mit Nutzen ausmeſſen laſſen wollen. 8 Leipzig 1796.

L'Horolographie curieuſe avec la Longimetrie ou Geodeſie nouvelle, pour meſurer, toiſer et arpenter etc. par *Bobynet*. Paris Dupuis 1647 et 1663 8.

Böbel (J. G.) praktiſche Erdmeßungskunſt für Landmeſſer. M. K. Tübingen 1784 8. 110 S. ADB LXXII. 196 ALZ. 1785. IV. 248. Tübinger gel. Anz. 1785. S. 33.

Zweyte verbeſſerte Aufl. 1789 151 S. m. Kpft. 8. ALZ. 1789 IV. 358. Ob deutſch. Z. 1789 II. 347. Tub. g. A. 1789 S. 537.

Böhm (Andr.) gründliche Anleitung zur Meßkunſt auf dem Felde, ſammt 2 Anhängen von Waſſerwägen und der unterirrdiſchen Meßkunſt. Frkf. 1759. 1 Alph. 18 B. 4. 7 B. K. 1 Thl. 8 gl. 2te Aufl. Leipz. 1779. 4.

Bonnycaſtle Introduction to Menſuration. London 1787.

Break. Syſtem of Land Surveying London 1778.

Breithaupt H. C. W. über den Gebrauch verſchiedener neuer und verbeſſerter Arten math. und geometr. Inſtrumente, die zur Feldmeßkunſt leicht und gut zu gebrauchen m. K. 8. Caſſel 1796 Griesbach.

von Brück Gottlob Fried. Vortheile eine Situation zum militäriſchen Gebrauche aufzunehmen. Dresd. 1767. 8.

Bugge, Thomas, Beſchreibung der Ausmeſſungs-Methode, welche bey den däniſchen geographiſchen Karten angewendet worden. Dreßden 1787. 22 B. 4 Kupf. rez. ADB. 85 S. 284.

— Beſkrivelſe over den Opmaalings Maale, ſom er brugt ved de Danſke geographiſke Karter. Kopenh. 1779.

Canzlers, Bernh., Bericht vom Feldmeſſen, mit A. Trew und Doppelmaiers Anmerkungen, 8. Nürnberg 718. 1 A. 12 B. 8 B. K. 16 gl.

= = = vollſtändige Anweiſung zum Land- und Feldmeſſen, 5te und vielvermehrte Auflage, 8. Nürnb. 750. 1 A. 18 B. 8. B. K. 1 Thl.

Methode pour la Meſure des ſurfaces, par *Carré*, av. Fig 4. Paris. 1750.

Chriſtiani (F. W.) die Lehre von der geometriſchen Vertheilung der Felder, nach der däniſchen Schrift des Herrn Niclas Morville bearbeitet mit Hofrath Käſtners Vorrede; m. K. Göttingen gr. 8. 1792 Vandenhoek.

Chriſtoph. *Clavii* Geometria practica Rom 1604.

Pratique de Geometrie ſur le papier et le terrain, par *Le Clerc*, 2 Vol. 8. Paris 1691.

Le Clerc Abh. von der theoretiſchen und praktiſchen Geometrie, m. Kupf. 8. Augsburg 1763.

Geometrie pratique de l'Ingénieur, ou l'art de meſurer, par *Clermont*, av. Fig 4. Paris 1733.

L. Z. de *Coesfelt* Geometria practica. Lugd. Bat. 1730. in 8.

The art of practical meaſuring etc, hoc eſt Ars praxin geometricam facile exercendi, bipedalis regulae adminiculo. Auctore Heinrico *Coggeſchall*. Londini, apud Thomam Bennet, 1690: 12 plag. 6. Acta Erud. 1691. p. 473.

Geodaiſia, das iſt, von gewiſſer und bewährter Feldmeſſung. . . durch Joh. Conraten von Ulm, Predigern zu Schaffhauſen am Rhein. Straßburg 1580. 8. die Blätter nicht numerirt, 4 B. 6 Bl.

Käſtner Geſch. d. Math. I. 663.

Curtii Praktica des Landmeſſens, m. Kupf. 4. Amſterdam 1636.

La Science des Geometres, ou Theorie et Pratique de la Geometrie, par *Deidier* av. Fig 4. Paris 1739.

Geometrie de l'arpenteur, ou Pratique de la Geometrie, en ce qui a rapport à l'Arpentage, aux Plans et aux Cartes topographiques, par Dayen, av, Fig. 8. Paris, 1769.

Cours de Geometrie pratique, d'Architecture militaire, des Perſpective, ect. par *Dupuis*, av. Fig 8. Paris, 1781.

Durret Traicte de la Geodaeſie et des fortifications regulieres et irregulieres a Paris. 1643. 4.

Ecole des Arpenteurs ou l'on enſeigne toutes les Pratiques de Geometrie qui ſont neceſſaires à un Arpenteur 12. Paris 1723.

Aufgaben gröſtentheils aus der angewandten Mathematik zur Uebung der Analyſis für angehende Feldmeſſer, Ingenieurs, und Baumeiſter. Entworfen von Eytelwein. Berlin 1793. 8. Bog. 8. 14 gl. N. ADB. 9 B. 537.

Richtiger und bewahrter Feldmeſſer, wie auch Sonnenuhrmacher, ohne Lehrmeiſter und ohne Inſtrument, das iſt: Kurzer, doch vollkommener und leichter Unterricht zum Feldmeſſen, woraus ein jeder von ſich ſelbſten und ohne koſtbares Inſtrument alle Landgüter abmeſſen, abtheilen und hernach, ſo er auch nur die 5 Species verſteht, ſolche ausrechnen, wie nicht weniger ſich ſelbſten eine liegende oder aufrecht ſtehende Sonnenuhr auf die leichteſte Art verfertigen kann. Zum Behuf aller derer, welche dieſer Künſten zwar Liebhaber wären, ſelbe aber zu erlernen, keine Gelegenheit haben, oder ſich theure Inſtrumenten anzuſchaffen nicht vermögen, abſonderlich aber zur Bequemlichkeit derer Herrn Beamten auf dem Lande, damit ſie dasjenige, was des Feldmeſſens halber in ihren Aemtern vorfället; ſelbſt ausmachen können. Von einem dieſer Künſten curieuſen Liebhaber. Dritte verbeſſerte Auflage. Ulm, 1767. bey Joh. Conr. Wohler 7 Bogen mit 5 Kupfer 8.

Fiſcher J. C. Anfangsgründe der Feldmeßkunſt m. K. 8. Jena 1795 Cröcker.

Frankens, Joh. Barth. praxis geometrica univerſalis, oder allgemeine Lehre vom Feldmeſſen, 4. Augſp. 710. 1 A. 16½ B. 6½ B. K. 18 gr.

Gardiner, Practical Surveying London 1737. 125 S. 8. 2 K.

Gedanken über die Aecker-Umlegung in den Dörfern, und deren Theilungsgrund in Schonen: ſt. im 3. Th. des ſchwed. ökon. Wochenbl. für den Apr. May und Jun. 1765. Greifsw. 8. Art. 98. S. 407-423.

Geometrie françoiſe, pour apprendre l'Arpentage des figures acceſſibles et inacceſſibles, Meſurés et Toiſés des Fortifications, 8. Paris 1676.

Geometrie theoretique, et pratique, par *Girard*, av. Fig fol. Amſterd. 1627.

Gibſon Treatiſe of Surveying. Dublin 1763.

Hammond Practical Surveyer. London 1765.

J. H. Helfenzrieder Abh. von der Geodäſie oder dem praktiſchen Feldmeſſen, darinnen verſchiedene neue Inſtrumente beſchrieben, und neue Vortheile vorgetragen werden, wodurch die Arbeit nicht nur erleichtert oder ſicherer und genauer wird. Ingolſtadt und Augsburg bey Crätz 1775 4. 388 S. ADB. XXIX. 205.

Helmreich von Feldmeſſen, 4. Leipzig 1591.

Hock (Joh. Jac.) Abh. von Verſteinerungen, Beſchreibung, Bezeichnung und Beziehungen der Gränzen, zum Gebrauch eines Beamten und Geometers, nach angewandten rechtlichen und mathematiſchen Gründen. Maynz 1789. 8.

Joh. Ludw. Hogreve praktiſche Anweiſung zur topographiſchen Vermeſſung eines ganzen Landes. Hannover und Leipzig 1773. 8. ADB. XXIII. 543.

Hume Art of Surveying. London 1763.

The

The compendious Meaſurer, being a brief yet comprehenſive Treatiſe on Menſuration and practical Geometry: with an Introduction to Decimal and Duodecimal-Arithmetic, adapted to the Uſe of Schools and Practic, by *K. Hutton* London Robinſon 1786. 8.

-- the II Edit: with many Additions, 1788: 703 S. 8. I. A. L. Z. 1789. J. Bl. 1718.

(*) Von Feldmeſſen, geometriſchen Meſſen vnd Abſehen, allerhand Höhe, Fläche, Ebene, Weyte und Breyte: als Thürme, Kirchen, Bäw, Bäume, Felder vnd Aecker ꝛc. Mit künſtlich zubereitem Jacobſtab, philoſophiſchen Spiegel, Schatten und Meßrüten, durch ſchöne Figuren und Exempel. Von dem viel erfahren Hr. Jacob Köbel weiland Stadtſchreiber zu Oppenheim verlaſſen. Dabey von Bereitung, verſtand und vielfältigen nützlichen Gebrauch des Quadranten — Frankfurt, Chr. Egenolff in 4. 36 Blatt, mit vielen beygedruckten Holzſchnitten. Auf den 36 Blatte erſter Seite: Zu Franckfurt am Mayn, bei Chriſtian Egenolph. Anno MDL. die 2te Seite iſt leer.

Geometrie, von künſtlichen Feldmeſſen, und Abſehen, allerhand Hohe, Fläche, Ebene, Weite und Breite; als, Thürme, Kirchen, Bäw, Bäume, Felder und Aecker ꝛc. Mit faſt werklich und künſtlich zubereiteten Jakobsſtab, philoſophiſchen Spiegel, Schatten und Meßruthen, durch ſchöne Figuren und Exempel, von den viel erfahrnen G. Jacob Köbel, weiland Stadtſchreiber zu Oppenheim verlaſſen. Dabey von Bereitung, Verſtand, und vielfältigen nützlichen Gebrauch des Quadranten. Gedruckt zu Frankfurt am Mayn, in Verlegung Vincentii Steinmetzens. Im Jahr 1616. 4. 39 gezählte Blätter.

Käſtner Geſchichte der Math. I. 655.

Anfangsgründe zu praktiſch geometriſchen Zeichnungen, und Vermeſſungen die zur Anfertigung und Abzeichnungen der ökonomiſchen, militäriſchen und geographiſchen Charten, und zur Kenntniß der verſchiedenen Meilen-Ruthen-Fuß und Zollmaßes nöthig ſind, zum Gebrauch für Officiere und ſolche Schüler, die ohne viel Anweiſung, Charten zeichnen und aufnehmen wollen, von Joh. Fr. Keferſtein. Leipzig Bohme 1778 $9\frac{1}{2}$ B. 27 K. in 8. ADB XXXVIII. 172.

Kleidke J. G. Handbuch der Feldmeßkunſt für Oeconomen, welches eine Anweiſung enthält, Feldmarken ſelbſt zu vermeſſen, zu zeichnen, zu berechnen und in Schläge oder Koppeln zu legen, mit beſonderer Rückſicht auf Pommern und Meklenburg m. K. gr. 8. Berl. Lange 1796.

Neu erfundene mathematiſche Curioſitäten, beſtehen ſowohl in einem ſattſamen Unterricht zum Feldmeſſen und itzt üblichen Fortification ꝛc. durch Johann Chriſtoph Kohlhanſen. Leipz. 1677. 4. 320 S. m. Bl. 25 Kpfl.

J. A. Kratzer praktiſche Ausmeſſung und Berechnung der Felder, auf eine ſehr einfache und faßliche Art entworfen. Grätz 1785. 8. Weingand und Feſtlin 41 S. 1 Kpf. ALZ 1786. IV. 605.

Geodaeſie ou Art de partager les Champs par AA Lalmand gr 8. a Paris 1793. 1 Thl. 6 gl.

Anmerkung und Zuſätze zur praktiſchen Geometrie in Lamberts Beyträge zum Gebrauch der Math. Berlin 1765. S. 1-313.

Bewährte Feldmeſſung und Theilung mit vorhergehender Verzeichniß der Mängel, ſo bisher darinnen geweſen, richtig, kurz, zum Gebrauch bequem geſtellt, vom Pfarrherrn zu Langeforch an den Stadtſchreiber zu Breitenau. Erſtlichen gedruckt zu Heidelberg im Jahr 1578, recht, und ganz den wer-

then Ackerbau zu gute. Nun aber auf vornehmer Leut-Begehren wiederum aufs neue aufgelegt und gedruckt. Zu Straßburg bey Paul Lederß Buchhändlern 1628, 8. Titel und Vorrede 2 B. das Buch 8. B. die Blätter ſind numerirt.

Käſtner G. d. Math. I. 659. vermuthlich iſt Herrmann Wittekind der V.

Batty Langley Practical Geometry applied to the uſeful Arts of Building, Surveying, Gartenig and Menſuration London 1726. fol. 1 Alph. 11 Bog. 40 Kupfertafl. Acta erud. 1726. S. 529.

Love Art of Surveying London 1786.

Zuverläſſige und in ganz Deutſchland brauchbare geometriſche Tabellen, für Beſitzer großer Landgüter, Oeconomen und Verwalter, auch überhaupt für alle diejenigen, welche oft Land zu meſſen haben, und zwar Kunſtverſtändigen zur Bequemlichkeit, Unkundigen aber zur Richtſchnur. Nebſt deutlichen Unterricht für die, ſo ſeiner bedürfen von J. G. Ludemann Pachtamtmann zu Schweckhauſen im Hochſt. Paderborn. Hannover bey Ritſcher 1792. 107 S. 8. 10 gl. N. ADB. II. 606.

La Geometrie pratique, diviſée en quatre Livres Par Allain Maueſſou Mallet Pariſ. 1702. 8. 4 Alph. 50 Kpf. Acta Erud. 1702. S. 511.

Mandey Marrow of Meaſuring London 1717.

Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktiſchen Geometrie. Entworfen von M. Joh. Tobias Mayer. — Erſter Theil 1777 bey Vandenhoeck. Göttingen 1 Alph. 7 B. 8. mit 7 K. ADB. Anhang XXV-XXXVI 2 B. S. 1104. 2ter Theil 3r Theil.

— Neue verbeſſerte und vermehrte Auflage, 3 Theile 1793-1795.

Mayers, J. Tob. gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktiſchen Geometrie 4r Th. mit K. 8. Erlangen, bei J. J. Palm.

Daſſelbe auch unter dem beſ. Titel: gründl. und vollſt. Anweiſ. zur Verzeichnung der Land-See- und Himmelskarten u. d. Netze zu Weltkugeln und Conigloben, m. Kpf. 1794.

Andr. Chriſtian Mayer kurze und deutliche Anweiſung zum Feldmeſſen, für die Jugend Nürnb. 1782. 8. ADB LV. 194.

Fr. Meinert Anfangsgründe der Feldmeßkunſt Halle 8. Renger. 1794.

von Meißner, G. neu verbeſſerte geometria practica in der nothwendigen Abänderung der geometriſchen Inſtrumenten beſtehend, 4. Frkf. 743 19 Bog. $2\frac{1}{2}$ B. K. 20 gl.

Meyers, Jac. kurzer Bericht vom Feldmeſſen und Theilen, 12 Baſel 684. $8\frac{1}{2}$ B. 4 gl. 1712.

Müllers, Joh. Ulr. geometria, oder theoretiſch-praktiſche Meßkunſt, 8. Ulm 706. $18\frac{1}{2}$ B. 2 B. K. 6 gl.

M. van *Niſpen* beknopte Lant-meet-konſt. 1689. in 8.

von *Niſpens* kurzer Begriff der Land-Feldmeßkunſt, in holländiſcher Sprache, 8. Dordrecht, 1662.

Noble Eſſay on practical Surveying. London 1774.

Wahrer Nutzen von geometriſcher Aufnahme der Landgüter und derſelben Pertinenzien: ſt. im 14. St. der ſchleſ. ökon. Samml. Breßlau 1775, 8. S. 497-514.

Oſſermann Landmeßkunſt nach theoretiſchen und praktiſchen Gründen m. K. 8. Flensburg 1782.

Ozanam neue Uebung der Feldmeßkunſt, deutſch und franzöſiſch, mit Kupf. 8. Bern 699 12 B. 16 gr.

Methode facile, pour arpenter et meſurer toutes ſortes de ſuperficies, par *Ozanam* av. Fig. 8. Paris 1728.

De l'uſage de la Geometrie, par Iaques Pelletier, Medecin et Mathematicien Paris 1573. 4. 68 S.

Penthers, Joh. Fr. praxis geometriae, worinnen alle bey dem Feldmeſſen vorkommende Fälle deutlich erörtert werden, Fol. Augſp. 732. 1 A. 5 B. 16 B. K. 1 Thl. 12 gl.

— — praxis geometriae, nebſt der Zugabe, Fol. Augſp. 738. 1 A. 19 B. 39 B. K. 2 Thl. 4 gl.

— — praxis geometriae, worinnen nicht nur alle Fälle bey dem Feldmeſſen, ſondern auch die Abnehmung der Höhe und Waſſerfälle nebſt beygefügten praktiſchen Handgriffen gezeiget werden, nebſt der Zugabe, Fol. Augſp. 755. 1 A. 20 B. 40 B. K. 3 Thl. 16 gl.

Peſchecks, Chr. rechnender Feldmeſſer, welcher die bey der Geometrie eingeführte Decimalrechnung ausführlich beſchreibet, 8. Budißin 730 6. B. 3 gl.

Scuolo di Geometria pratica, da *Portalibros*, con Fig fol. Milano 1744.

Eine kurze und gründliche Anleitung zu dem rechten Verſtand Geometrie durch Chriſtoffen Puchler von Syclas in Ungern, gemacht und von neuen beſchrieben. Was nun ordentlich hierin begriffen, wird in dem nächſten Blatt angezeiget. M. R. K. May. Freyheit. Gedruckt zu Dilingen durch Sebaſtum Mayer Anno Dom. M. DLXIII. 4. 121 Bl.
Käſtner G. d. Math. I. 670.

Praktiſche Mathematik herausgegeben von Fried. Kauſch Presburg Weber 1788. 8. I Band die Feldmeßkunſt 161 S. m. 4 K. II B. 154 S. m. 7 K. und 3 Tabellen AL. d. k. d. I. 2. 266.

Reinholds Bericht vom Feldmeſſen und Markſcheiden, m. K. 4. 1597.

Planimetrie oder Berechnung der Flächen, praktiſch den Grundbeſitzern, die ihr Eigenthum zu wiſſen wünſchen, gewidmet von J. S. Wien. Weimar 1785. 39 S. m. 2 Kpft. 8. ALZ 1786. IV. 602. Leipz. g. Z. 1786. I. 333.

Geometria, das iſt, wie man recht und behend, eines jeden Dings Länge, Höhe und Breite, und auch wie weit ein Stadt von der andern gelegen ſey an einen ſtillſtehenden Orte, ohne alles hin- und hergehen abmeſſen ſoll, welchs zuvor von keinen Mathematico niemals beſchrieben worden iſt. Und iſt alſo dieſes neue Kunſtſtück mit Fleiß beſchrieben, zu Lieb und Gefallen allen Kriegsherrn, Zeugmeiſtern, Büchſenmeiſtern, Baumeiſtern, Steinmetzen, Schreinern, und allen dergleichen Handwerkern, und in allen Trauen an Tag gegeben worden, durch Nicolaum *Reinsbergenſem* Mathematicum. Cum gratia et Privilegio C. M. gedruckt zu Augsburg bey Matheo Franken, in Verlag Georg Willers MDLXVIII. 4. Titel und Zueignung 4 Blätter, Buch 15 Blätter, ½ B. Figuren in Holzſchnitt, ½ B. ged. Tafeln.
Käſtner G. d. Math. I. 667.

Der ſicher und accurate Gränz- Land- und Forſt-Renovator, oder deutlicher Wegweiſer, wie 1) eine figurirte Gränz- Stein- und Wayd-Beſchreibung über eine jede Gemarkung zu verfertigen; 2) eine recht vollkommene Renovation anzuſtellen, und in ein geometriſch und figurirtes Lagerbuch zu redigiren; 3) eine gründliche Widerlegung derjenigen irrigen Meynung, ſo be-

haupten

haupten wollen, daß die wagrechte Meſſung der Berge berechnet, mithin der horizontale Inhalt für das rechte Produkt gehalten werden ſolle; 4) wie die Waldungen zu meſſen; 5) eine denen Herrſchaft- und Communen höchſt nöthig und nützliche Inſtruction, wie auf eine ganz leicht und geſchwinde Art alle gemeſſene und in Grund gelegte Waldungen probirt, dadurch nicht allein ſowohl die Accurateſſe als Fehler, ſondern auch die Capacität eines zu dergleichen Verrichtungen gebrauchend oder ſich angebenden Geometrá ſogleich erkundigt werden kann, wobey 6) auch die von denen Geometris gebrauchend unterſchiedliche Arten beym Forſtmeſſen; endlich auch 7) die Fehler, ſo aus Veränderung der Winkel entſpringen, angezeigt werden; leztens folgt 8) eine kleine Erinnerung wegen Examinirung der Feldmeſſer; und 9) von der 16 und 10theiligen Meß- und Berechnung, eine unvorgreifliche Meynung; wie auch 10) in aller Eil, ohne Cirkul und Lineal, ein Winkelmaß zu machen. Alles ſowohl denen Herrſchaft- und Unterthanen, als auch Forſtmeiſtern, Beamten, Commiſſariis, Renovatoribus und Geometris zum Dienſt und Nachricht durch 7 Demonſtrationes in Kupfer vorgeſtellt und in Druck befördert von Gc. Eph. Rieckhern. Stutg. 1734, 4. 2 B.

Geodaeſia Ranzouiana, Landrechnen und Feldmeſſen, ſammt meſſen allerley Größen, alles auf eine leichte, behende und vormals unbekannte neue Art künſtlich, gründlich und deutlich beſchrieben. Zu Ehren des Edlen, Geſtrengen und Ehrenveſten Herrn Heinrichen Rantzoven, Herrn Johannes ſeel. Sohne, der K. Maj zu Dännemark ꝛc. in dem Fürſtenthume Schleßwik, Holzſtein und Diethmarſen, Statthalter, Rath und Amtmann auf Segeberge, Erbgeſaſſenen zum Breitenberge ꝛc. durch Nic. Reymers von Henſtädt in Diethmarſen 4. (Gedruckt zu Leipz. bey Georg Deſner im Jahr MDLXXXIII. beygeſchrieben).

Die Blätter nicht gezählt und gehet Ljjj. Am Ende ein Beſchluß an den Stadthalter, Datum auf E. G. Hofe zu Hattſtadt in Diethmarſen den 14. Sept. Anno 1583.

Die Geometrie in Tabellen, alſo verfaſſet, daß die Theorie nach mathematiſcher Lehrart vorgetragen, und die Praxis auf dem Papier und im Felde in deutlichen Exempeln gezeigt wird, mit XVI Kupfertäfeln, nebſt Georg Sarganecks weiland Paed. Reg. Inſp. Adj. zu Halle, Vorſchlägen und Anmerkungen von der leichteſten und nützlichſten Lehrart in der Geometrie, wie auch vom Gebrauch des Proportionalzirkels. Dritte, mit einer Kupfertafel und angehängter Nachricht von dem Gebrauch der auf derſelben abgezeichneten Inſtrumente, vermehrte Auflage. Berlin 1767. im Verlag des Buchladens der Realſchule, 1 Alph. 6 B. Text in 8.

Beyträge zur Meßkunſt auf der Oberfläche der Erde, wenn man ſie als eine Ellipſoide betrachtet von C. Scherffer. Wien 1783. 5 B. gr. 8. 2 K. Trattner ADB. 68 B. 485.

Anleitung zur Feldmeßkunſt von Schirmer und Sohlich Berlin 1788. 8. 208 S. 10 Kiſt. ADB. CV. 151 ALZ 1789. I. 531.

Beſchreibung von Hrn. Jonathan Siſſons neu erfundenen Meßinſtrument, um Felder damit zu meſſen: ſteht mit der Abbild. in Ed. Laurence aus dem Engl. überſ. Pflichten eines Verwalters. Leipz. 1751. 8. S. 116-126.

Schleicher Beyträge zur praktiſchen Meßkunſt 1. H. m. K. Frankf. am M. Varrentrap 1794.

Elia

Elias Schulz geometriſches Handbüchlein, in welchem alle mögliche Vortheile ſowohl in Ausmeſſung der Felder, und Auftragen auf das Papier, als auch wie deren Inhalt richtig zu finden, gezeigt werden ꝛc. Frankf. und Leipz. 1776 8. 3½ B. 7 Kfl. ADB. 31 B. 242 S.

Elias Schulzens geometriſches Handbüchlein, in welchem alle mögliche Vortheile, ſowohl in Ausmeſſung der Felder und Auftragen auf das Papier, als wie auch deren Inhalt richtig zu finden, und in verſchiedene Theile zu bringen, gezeigt werden. Nebſt einem neuerfundenen Inſtrument, die Klüfte und Gänge der Erde ohne Compaß zu meſſen. Nunmehro ganz umgearbeitet und vermehret, von Joh. Leonh. Späth Nürnberg 1788. gr. 8. 204 S. mit 7 Kpfl. ALZ 1789. IV. 724. ADB. 97. II. 455.

Schulzens Taſchenbuch für diejenigen die einen gründlichen Gebrauch von der Meßkunſt machen wollen. Zwey Theile m. K. 8. Berl. 1783.

J. E. Silberſchlag Anweiſung für den Landmann, ſein Feld ſelbſt zu meſſen; in der 2ten Auflage des Reccardtiſchen Lehrb. für die Landjugend Berl. 1779.

Joh. Leonh. Späth analytiſche Unterſuchung über die Zuverläſſigkeit, mit welcher ein Landmeſſer, vermittelſt verſchiedener geometriſcher Werkzeuge, Winkel und Linien abmeſſen kann. M. K. Nürnb. u. Altorf 1789. 4. Schneider. ALZ 1790 II. 371 Ob. d. Z. 1790. II. 250. Götting. g. A. 1785. I. 666.

Joh. Leonh. Späth Geodaeſia oder Anweiſung zum Feldmeſſen, zum Gebrauch auf Schulen 4 K. Nürnb. u. Altorf 1790. 8.

Von künſtlicher Abmeſſung aller Größe, Ebene oder niedere, in die Länge, Breite Höhe und Tiefe — durch den hochberühmten Mathematikum Joannem Stöfflern von Juſtingen beſchrieben. — Eine gar künſtlich Sonnenuhr Hororium bilimbatum genannt. . . ein faſt leichtes künſtlich geometriſches Inſtrument. . . durch Herrn Philipſen Weiß, Schöſſen und des Raths zu Frankfurt am Tag gegeben. Frkf. a. M. bey Chriſtian Egenolpf Fol. 17 Blätter mit viel eingedruckten Figuren.

Die Beſchr. des Inſtruments, ſiehe Inſtrumentum baſis.

Swinden J. H. van Anleitung zur Meßkunſt. Aus dem holländ. überſetzt und mit Anmerkungen und Zuſätzen vermehrt von M. C. Ulr. Gaab gr. 8. Jena 1796.

Talbot Complete Art of Land Meaſuring London 1784.

Theſaurus geometriae practicae, 8. Lond. 737. 12½ B. c. Fig. 1 Thl. 8 gl.

Unterricht vom Feldmeſſen, 4. Schmalkalden 1596.

Unterſuchung über den rechten Grund zu gleicher Eintheilung der Ackerſtücke an gewiſſen Orten in Schweden, überhaupt und beſonders in Smaland; ſtehet in zweyten Theile des ſchwed. ökon. Wochenbl. für April May und Junius 1765. Greifsw. 8. Art. 43 S. 196-212.

Einnerungen darüber; ſteht im 3ten Theile deſſelben Art. 93. S. 391-394.

Lucas Voch praktiſche Geometrie auf dem Papier und Feld. In zweyen Abtheilungen Die erſte enthält wie Linien, Winkel und Figuren zu zeichnen, zu theilen und was noch ſonſten bey der Praxis auf dem Papier nöthig. Die andere lehret allerhand Flächen mit den gebräuchlichen Feldmeßinſtrumenten in Grund zu legen. Mit 13 Kfl. Augsb. 1778. 8. 16 B. ADB. 45 B. 516-1780.

Lucas Voch Unterricht bey vorfallenden Bauſtreitigkeiten und Anwendung der praktiſchen Geometrie auf dem Lande; 2 Theile Augsb. 1780. 8.

Voigts, K. Chr. Zuſätze zu ſeinen neueſten Verſuchen zur Erleichterung der praktiſchen Geometrie. Mit 1 Kupf. gr. 8. Leipzig in der Weidmanniſchen Buchh. 1794.

Vollimhaus (D. A.) getreue Anweiſung zu Felder- und Landtheilungen; m. K. Hannov. u. Leipz. 1773. 8. ADB. XXIII. 542.

Vollimhaus (Dav. And.) gründliche Anweiſung zum Landmeſſen mit Stäben und der Kette, nebſt dem Gebrauch der Bouſſole; m. K. 1 Th. Lemgo 1776. 8.

Gründliche Anweiſung zur praktiſchen Landmeſſerkunſt für Liebhaber und beſonders für Leute auf dem Lande, mit 7 Ktfl. Herausgegeben von David Andreas Vollimhaus. Hannov. u. Leipz. Schmidt 1778. 12½ B. 8. ADB. XXXVIII. 477.

Werner (Georg Heinrich) Ausführlicher Unterricht zur Feldmeßkunſt oder Scheibenmeſſung, wo bey einer richtigen Ausmeſſung, Ausrechnung und Eintheilung, einzelner Stücke und auch ganzer Fluren, nöthige Handgriffe und Vortheile gezeiget werden, allen Liebhabern der praktiſchen Geometrie oder Feldmeßkunſt nicht allein, ſondern auch beſonders denjenigen, welche wirkliche Meſſungen vorzunehmen willens ſind, dergl. alle Forſtbedienten und Feldmeſſer ſind, verfaßt, und mit gehörigen Kupfern verſehen. Langenſalza 1766. 8. ADB. V. 1 St. 78.

Erfahrungen von dem Gebrauch der Magnetnadel, und wie vermittelſt derſelben am füglichſten eine Feldvermeſſung angeſtellet werden, und eine Provinzial-Aufnahme geſchehen mag, wie auch etwas vom Gebrauch verſchiedener Maßſtäbe. Von Joh. Friedr. Werner. Berlin bey Bever 1778. 7 B. 8. 2 K. in Fol. ADB. XXXVIII. 174.

Wilkens, Chr. Heinr. neue und erleichterte Methode, den Inhalt geradelinichter Flächen zu finden, und dieſelben ohne Rechnung einzutheilen; beſonders vortheilhaft auf die Entſcheidung der Grenzſtreitigkeiten angewendet, 4. Halle 757. 9 B. 2 B. Kpf. 8 gl.

Wilkens, (Chr. Heinr.) neue Grundſätze der praktiſchen Geometrie aus welchen viele zu der Aufnahme dieſer Wiſſenſchaft gereichende Verbeſſerungen hergeleitet werden. 4. Halle 1758. 1 Alph. 7 B. 2 B. K. 13 gl.

Die Verbeſſerungen des Staats aus mathematiſchen und ökonomiſchen Gründen; oder vollſtändiger Unterricht von Landesvermeſſungen und daher entſtehenden vortheilhaftern Einrichtung der allgemeinen Landesökonomie und des Cameralweſens, worinnen gezeiget wird, wie alle Felder überhaupt, ohne den Gebrauch eines Inſtruments zu vermeſſen, zu vertheilen, durch eine ganz andere Einrichtung zu verbeſſern, und die Karten darüber zu verfertigen ſind; alles nach richtigen Grundſätzen nach der beſondern Beſchaffenheit eines Staats alſo hergeleitet, daß ſowohl der Landesherr die wichtigſten Vortheile daraus ziehen, als auch der Nahrungsſtand der Unterthanen dadurch befördert als das ganze Land in einen blühenden Zuſtand geſetzt werden möge; aus den beſten Landesvermeſſungsanſtalten und vielfältigen Erfahrungen zuſammen getragen durch Chr. Heinr. Wilke. Frankf. u. Leipz. 1765 4 Alph. 14 Bog. 8 K. ADB. IX. S. 119 2 Thl. 16 gl.

Die wichtigen Vortheile, welche die Landesvermeſſungen einem Staate gewähren, von Chr. Heinr. Wilken: ſt in D. G. Schrebers neuer Cameralſchr. VI Th. Halle 1766 gr. 8. S. 558-627.

Auch in Leipz. Intellbl. 1764 S. 392. u. 493.

Die

Die Vermeſſung der Grundſtücke in der Ferne; oder geometriſch-praktiſche Anweiſung, wie ſolche Grundſtücke, zu welchen man ſo wenig nach Gefallen kommen, als ſie überſehen kann, z. B. Brüche, Moräſte, undurchſichtige Wälder u. dgl. am allergenaueſten, kürzeſten und leichteſten aufzunehmen, auszumeſſen und zu vertheilen ſind, von Joh. Chriſt. Wilke, Danzig 1767. 4. 4 B. 1 Kpfl.

C. F. Wurſler kurze und gründliche Einleitung zur praktiſchen Feldmeßkunſt; nebſt einem Anhange von der Trigonometrie, Gnomonik und Viſirkunſt m. K. Tübingen 1786. 8. ADB. LXVIII. 471. ALZ. 1785. V. 508.

Zollmanns, J. W. Anleitung zur Geodeſie oder praktiſchen Geometrie, zum Gebrauch der judiciorum in Entſcheidung der darüber entſtehenden Streitigkeiten, Fol. Halle 744. 1 A. 4 B. 21 B. K. 2 Thl. 4 gl.

Zumbach Geometria practica uuiverſalis. 8. Lugd. 1730.

Feldmeſſung, von den Fehlern dabey, ſiehe Vermeſſungsfehler beym Feldmeſſen.

Feldſcheider, ſiehe Feldmeſſer.

Feldſcheidung, ſiehe Feldmark.

Feldſchnürende Gewerken, heißen diejenigen, welche mit einander markſcheiden.

Feldweg, ſtadium, ſtade, ein Längenmaß, ſo bey den alten Griechen, und andern Völkern gebräuchlich geweſen, und 125 geometriſche Schritte hält. Es wird gemeiniglich für den 32ten Theil einer deutſchen Meile gehalten.

Feldige Richter, hießen in uralten Urkunden die Feldmeſſer, welche auf Ausmeſſung der Aecker beeidigt ſind.

Feuercaſſe, Brandcaſſe, ſiehe Verſicherungsanſtalten gegen Feuer.

Fiduzialrand des Diopterlinials heißt derjenige, der mit der Geſichtslinie in einer verticalen Ebne lieget.

Figur, Figura, wird genannt ein jeder Raum, der durch einen Umfang begrenzt iſt. Man braucht dieſes Wort nicht allein von den Flächen, ſondern auch von den Körpern. Daher pflegt man die erſten figuras ſuperficiales, Flächen-Figuren; die andern aber figuras ſolidales, körperliche Figuren zu nennen. Wenn man ſchlechthin eine Figur nennet; ſo verſteht man insgemein eine Flächen-Figur. Apollonius nennet insbeſondere figuram oder die Figur das Rechteck aus der Zwerch-Axe in dem Parameter.

Figur iſt in ihren Parallelen heißt, wenn durch die Spitze einer Figur eine gerade Linie der Grundlinie parallel gezogen iſt.

Figura aequiangula, ſiehe Figuren gleichwinklichte.

Figura aequilatera, ſiehe Figuren gleichſeitige.

Figura circulo circumſcriptibilis, ſiehe Figuren um den Cirkel.

Figura circulo inſcriptibilis, ſiehe Figuren in dem Cirkel.

Figura inordinata, ſiehe Figuren irreguläre.

Figura irregularis, ſiehe Figuren irreguläre.

Figura multangula, ſiehe Vieleck.

Figura multilatera, ſiehe Vieleck.

Figura quatrilatera, ſiehe Viereck.

Figura polygona, ſiehe Vieleck.

Figura rectilinea, ſiehe Figuren geradlinichte.

Figura ſolidalis, ſiehe Figur.

Figura ſuperficialis, ſiehe Figur.

Figura trilatera, ſiehe dreyſeitige Figur.

Figurae aequales, ſiehe Figuren gleiche.

Figurae congruentes, ſiehe Figuren einander deckende.

Figurae curvilineae, ſiehe Figuren krumlinichte.

Figurae inter ſe aequiangulae, ſiehe Figuren unter einander gleichwinklichte.

Figurae inter ſe aequilaterae, ſiehe Figuren unter einander gleichſeitige.

Figurae iſoperimetrae, ſiehe Iſoperimetriſche Figuren.

Figurae numerariae, ſiehe Zeichen der Zahlen.

Figurae reciprocae, heißen diejenigen Figuren von einerley Art, deren Grundlinien oder Grundflächen ſich verkehrt wie ihre Höhen verhalten. Triangel und Parallelogrammen unter der ebenen, und Priſmen, Parallelepipeda, Pyramiden, Kegel und Cylinder unter den körperlichen Figuren ſind diejenigen, bey welchen dieſes Verhältniß merkwürdig iſt. Denn die reciproken unter denſelben ſind ſich jedesmal gleich, indem der Inhalt aller gefunden wird, wenn man die Grundlinien der ebenen in die halbe oder ganze Höhe, und die Grundflächen der körperlichen in die ganze Höhe oder den dritten Theil derſelben multipliciret.

Figurae ſimiles, ſiehe ähnliche Figuren.

Figuren acht blattericht zu zeichnen, ſiehe Radlinienzieher des Suardi's.

Figuren ähnliche, ſiehe ähnliche Figuren.

Figuren auf einander paſſende, ſiehe einander deckende.

Figuren ebene, ſind ebene Flächen, welche von allen Seiten begrenzt ſind. Die Grenzen machen zuſammen den Umfang oder den Perimeter der Figur aus.

Figuren einander deckende Figurae congruentes, ſind diejenigen, welche gleich und ähnlich ſind. Unter dieſen ſind ſonderlich die Triangel von großem Nutzen, denn das meiſte, was von den Eigenſchaften der geradlinichten Figuren demonſtrirt wird läſſet ſich durch Hülfe derſelben darthun. Die Triangel haben auch in andern Fällen ihren Nutzen im Demonſtriren.

Figuren erſte nennet man, die ſich nicht in einfache zerlegen laſſen. Unter den Flächenfiguren ſind es die Dreyecke und unter den körperlichen die Pyramiden. Man löſet alle übrige zuſammengeſetzte Figuren in dieſe auf, wenn man ihren Inhalt beſtimmen will.

Figuren geradlinichte Figurae rectilineae, heißen die von lauter geraden Linien eingeſchloſſen ſind, ſiehe Vieleck geradlinichtes.

Figuren gleichſchenklichte, heißen unter den geradeckichten ſymmetriſchen Figuren, diejenigen, in welchen die gegen einander überſtehenden Seiten einander gleich ſind.

Figuren gleichſeitige, Figurae aequilaterae, darinnen alle Seiten einander gleich ſind.

Figuren gleichwinklichte, Figurae aequiangulae, in welchen alle Winkel einander gleich ſind.

Figuren gleiche, Figurae aequales, werden genannt die einen gleichen Inhalt haben, ſie mögen einander ähnlich ſeyn oder nicht. Welche von den geradlinichten Figuren einander gleich ſind, findet man beym Euclides, und in den Elementis geometriae.

Figuren in den Cirkel Figura, Circulo inſcriptibilis eine Figur die ſich in einen Cirkel beſchreiben läßt. So nennet man diejenigen ebenen Figuren, um welche ſich ein Kreis ſo beſchreiben läßt, daß er durch die Scheitel aller

ihrer Winkel gehe Jede reguläre Figur hat dieſe Eigenſchaft; aber auch viele irreguläre Figuren.

Figuren irreguläre, unordentliche, Figurae irregulares, inordinatae, die nicht zugleich gleichſeitig und gleichwinklicht ſind. Sie pflegen in Feldmeſſen am meiſten vorzukommen. Siehe Vielecke irreguläre.

Figuren iſoperimetriſche, ſiehe dieſelben.

Figuren körperliche, ſiehe Körper.

Figuren krumlinichte, ſiehe dieſelben.

Figuren reguläre, ſiehe Vielecke reguläre.

Figuren ſieben blätterichte, zu zeichnen, ſiehe Radlinienzieher des Suardi's.

Figuren ſymetriſche, ſiehe Vielecke.

Figuren um den Cirkel Figura Circulo circumſcriptibiles, ſind diejenigen in welchen ſich ein Cirkel beſchreiben läßt, der alle Seiten im Umfange der Figur berührt; dergleichen alle reguläre Figuren ſind; doch haben auch mehrere irreguläre Figuren dieſe Eigenſchaft, ſiehe Vieleck um den Kreis.

Figuren unordentliche, ſiehe irreguläre.

Figuren unter einander gleichſeitige, Figurae inter ſe aequilaterae, ſind zwey Figuren, wenn jede Seite der einen insbeſondere gleich iſt jeder Seite der andern.

Figuren unter einander gleichwinklichte, Figurae inter ſe aequiangulae, ſind zwey Figuren, wenn jeder Winkel der einen insbeſondere jedem Winkel der andern gleich iſt.

Figuren von gleichem Umfange, ſiehe iſoperimetriſche Figuren.

Figuren zehnblättrichte, ſiehe Radlinienzieher des Suardi's.

Figuren zweyblätterichte, ſiehe Radlinienzieher des Suardi's.

Figuren auf dem Felde auszumeſſen, ſiehe Feld zu meſſen.

Figuren in Dreyecke zu verwandeln, ſiehe Vielecke.

Figuren in gleichgroße Rectangula zu verwandeln, ſiehe Vielecke.

Figuren zu theilen, ſiehe Vielecke, auch Länderey geometriſch einzutheilen.

Figuren zu verzeichnen in ein Dreyeck, ſiehe Vieleck...

Figurirte Zahl, ſiehe figürliche Zahl.

Figürliche Zahl, ſiehe Zahl.

Figurlicher Calkul, Calculus figuratus, ſo heißt die Lehre von den figürlichen Zahlen. Es giebt zweyerley figürliche Zahlen, Flächen und körperliche. Die Flächen Zahlen heißen auch vieleckichte oder Polygonalzahlen, ſie entſpringen aus der Zuſammenſetzung ſimpler Zahlen, überhaupt geſprochen, ſo wie in der Geometrie die Polygone aus der Zuſammenſetzung von Linien entſpringen; und die körperlichen Zahlen werden aus der Zuſammenſetzung von Polygonalzahlen erzeuget, ſo wie in der Geometrie die Körper aus zuſammengeſetzten Polygonen erzeuget werden. Die Zuſammenſetzung der Zahlen geſchieht entweder durch die Addition oder Multiplication allein, oder durch die Verbindung der Addition mit der Multiplication. Der Proceß durch die Addition giebet Polygonal und Pyramidalzahlen von unendlichen Ecken. Der Proceß durch die Multiplication ſchränket ſich auf das bloße Viereck ein, und giebet quadratiſche parallelogrammiſche cubiſche prismatiſche und parallelepipedische, und daher entſtehende viereckichte Pyramidalzahlen. Wenn eine Polygonalzahl mit ihrer Seite multipliciret wird, ſo entſtehet eine ſäulen-

förmige oder Columnarzahl; und aus der Zuſammenſetzung einer Pyramidal- und Columnarzahl nach gewiſſen Regeln entſtehen thurmförmige oder Pyrgoidalzahlen. Die letzten körperlichen Zahlen ſind die Polyedralzahlen, welche mit einigen der vorhergehenden einerley ſind. M. ſ. Zahlen.

Unter denjenigen, die von den figürlichen Kalkul geſchrieben, zeichnet ſich unſtreitig der berühmte italieniſche Mathematiker Franciscus Maurolycus aus, welcher in dem 16. Jahrhunderte gelebet, da er, die Lehre von den Polygonalzahlen ſehr erweitert und die Columnar- und Pyrgoidalzahlen erfunden hat. Vom Maurolycus auf den ſogenannten arithmetiſchen und geometriſchen Wurzelmann des M. Chr. Peſcheck iſt ein gewaltiger Sprung.

Hemeling hat in ſeinen arithmetiſchen Schriften, ingleichen Heinrich Meißner in ſeinen ſogenannten Stern und Kern der Algebra viel von den Polygonalzahlen gehandelt.

Kerners (Joach.) Polygonal-Pyramidal- und Columnar Aufgaben. In Beyenburgs Ausgabe des Braſſerſchen Rechenbüchleins Leipz. 1667. 8.

Overheyden, Gerhard, Arithmetica figurata gründ- und eigentliche Beſchreibung aller mathematiſchen- Polygonal- Pyramidal- und Columnarzahlen ꝛc. Braunſchweig 1668. 8.

Final-Gleichung, ſiehe Gleichung.

Finger-Rechenkunſt, ſiehe Rechenkunſt mit den Fingern.

Fingerzahlen, ſiehe Einer.

Flach, plat, diagonal (Markſcheider) alles dasjenige, was nach einer Diagonallinie geht, oder zwiſchen der Seigerlinie und wagerechten Linie, und zwar in einer Richtung, die der letzteren Linie näher als der Seigerlinie ſtreicht.

Flach fallender Gang (Markſcheider) heißt derjenige, der mit dem Horizonte einen Winkel von 20 bis 50 Graden macht.

Flache Teufe der Abſtand nach einer flachen oder ſchiefen Linie eines angegebenen Punkts in der Tiefe von einem in der Höhe angenommenen Punkt.

Wie die Flache-Teufe des Schachtes zu beſtimmen ſ. Ausſtreichen eines flachen Ganges.

Fläche, ſo nennen die meiſten Markſcheider den wahren Abſtand zweyer Punkte von einander. Auch nennen ſie ſo die Hypothenuſa eines rechtwinklichten Dreyecks, ja auch den Sinus totus.

Fläche, ſuperficies, fr. ſurface, die Gränze eines Körpers. Sie hat eine Ausdehnung oder Dimenſion weniger als der Körper, nähmlich die Dimenſion der Dicke, und iſt alſo nur in die Länge und Breite ausgedehnt. Daher iſt ſie auch mit Körpern ganz heterogen, und man kann wohl ſagen, daß ein Körper von Flächen umſchloſſen, nicht aber, daß er aus ihnen zuſammengeſetzt ſey.

2. So wie die Linien entweder gerade oder krumme Linien ſind, ſo ſind die Flächen entweder eben oder nicht eben, unebene Flächen, ſind entweder convex oder concav, auch giebt es welche die theils convex, theils concav ſind. So iſt die äuſſere Fläche einer Kugel, eines Cylinders und eines Kegels, wenn man von der Grundfläche abſtrahirt, convex, die Fläche einer Schüſſel aber iſt concav. So wie man ferner unter einer geraden Linie diejenige verſtehet, in welcher alle Punkte nach einerley Richtung liegen, ſo iſt eine Ebene diejenige, in welcher jede gerade Linie liegt, die durch zwey Punkte in dieſer Ebene gezogen iſt; und die nicht ebene Fläche, ſie mag convex oder concav ſeyn, kann als eine ſolche gedacht werden, worinnen kein Theil eben iſt.

3. Wie

3. Wie eine unebene Fläche beſchaffen ſey, läßt ſich leicht erkennen, wenn man weiß, wie weit ſie in jedem Punkte von einer Ebene abſtehe. So wie wir nähmlich die Beſchaffenheit der Curven aus den Entfernungen ihrer Punkte von einer zur Axe angenommenen geraden Linie zu beurtheilen im Stande ſind; ſo kann man auch die Beſchaffenheit einer unebenen Fläche aus der Entfernung ihrer Punkte von einer nach Belieben angenommenen beſtimmten Ebene beurtheilen, und zu dem Ende ſich aus jedem Punkte jener Fläche auf die Ebene ſenkrechte Linien gezogen vorſtellen. Kann man die Längen dieſer ſenkrechten Linien durch Gleichungen beſtimmen, ſo werden dieſe Gleichungen auch die Natur der gedachten Fläche ausdrucken. Aus einer ſolchen Gleichung laſſen ſich aber auch umgekehrt alle Punkte dieſer Fläche angeben, und es wird daher durch dieſelbe auch die Fläche ſelbſt beſtimmt.

4. Es ſtelle die Ebene der Kupfertafel die Ebene vor, auf welche alle Punkte einer gegebenen Fläche bezogen werden ſollen. Ferner ſey M, Fig 1130 irgend ein Punkt in der gegebenen Fläche außer der Ebene der Tafel, und aus demſelben MQ auf dieſe Ebene ſenkrecht herabgefället werden. Um nun die Lage dieſes Punktes algebraiſch auszudrucken, nehme man in der Ebene irgend eine gerade Linie AB zur Axe an, und ziehe auf dieſelbe aus Q die gerade Linie QP ſenkrecht. Endlich nehme man in der Axe AB irgend einen Punkt A zum Anfangspunkte der Abſciſſen an. Iſt dieſes geſchehen, ſo kennet man die Lage des Punktes M, wenn man die Länge der drey Linien AP, PQ, und QM weiß; und es wird demnach die Lage jedes Punktes M einer Fläche durch drey ſenkrechte Coordinaten auf eine ähnliche Art beſtimmt, als ſolches bey den Punkten der Curven, die in einer Ebene lagen, durch zwey rechtwinkliche Coordinaten geſchiehet.

5. Da wir alſo drey Coordinaten AP, PQ und QM haben, ſo wollen wir $AP = x$, $PQ = y$, und $QM = z$ ſetzen. Dieſe drey Coordinaten werden uns die Natur der gegebenen Fläche zu erkennen geben, wenn wir, nachdem wir x und y willkührlich angenommen haben, zu beſtimmen im Stande ſind, wie groß z iſt; denn können wir dieſes, ſo laſſen ſich alle Punkte M in der gedachten Fläche angeben. Es wird daher die Natur einer jeden Fläche durch eine Gleichung ausgedruckt, in welcher die Coordinate z durch die beyden übrigen Coordinaten x und y und durch beſtändige Größen beſtimmt wird; und es iſt daher für jede gegebene Fläche die veränderliche Größe z gleich einer Funktion zweyer veränderlicher Größen x und y. Umgekehrt druckt, wenn z irgend einer Funktion von x und y gleich iſt, dieſe Gleichung eine Fläche aus, deren Natur ſich aus ihr erkennen läßt. Setzt man demnach für x und y alle, ſowohl poſitive als negative Werthe, die ſie bekommen können, ſo erhält man alle Punkte Q der angenommenen Ebene; und dann ergiebt ſich aus der Gleichung zwiſchen z, x und y die Länge der ſenkrechten Linie $QM = z$, von dieſer Ebene bis zu der durch die Gleichung ausgedruckten Fläche. Iſt z poſitiv, ſo liegt M über ihr; iſt aber z negativ, ſo liegt M unter ihr; wird $z = 0$, ſo fällt M in die Ebene; und wird es imaginär, ſo gehört zu dem Punkte Q in der Ebene gar kein Punkt M; hat endlich z mehr reelle Werthe, ſo ſchneidet die auf der Ebene durch Q ſenkrecht aufgerichtete Linie die gegebene Fläche in mehr als in einem Punkte.

6. Will man alſo die verſchiedenen Arten der Flächen beſtimmen, ſo bietet ſich ſogleich die Abtheilung derſelben in continuirliche oder reguläre, und in discontinuirliche, oder irreguläre dar. Eine Fläche iſt nähmlich continuirlich

lich, deren Punkte ſich insgeſammt durch eine und dieſelbe Gleichung zwiſchen z, x und y ausdrucken laſſen, oder wo z für alle Punkte dieſelbe Funktion bleibt. Irregulär wird hingegen eine Fläche genannt, wenn die Theile derſelben durch verſchiedene Funktionen ausgedruckt werden, z. B. wenn dieſelbe an einem Orte ſphäriſch, an einem andern coniſch, an einem dritten cylindriſch oder eben iſt. Dieſe irregulären Flächen ſetzen wir indeß hier ganz bey Seite, und betrachten bloß die regulären, deren Natur durch eine und dieſelbe Gleichung ausgedruckt wird. Denn kennt man dieſe, ſo laſſen ſich darnach auch die irregulären, da ſie aus regulären Theilen zuſammen geſetzt ſind, leicht beurtheilen.

7. Die regulären Flächen werden zuförderſt in algebraiſche und in transcendente eingetheilt. Eine Fläche iſt eine algebraiſche, wenn ihre Natur durch eine algebraiſche Gleichung zwiſchen den Coordinaten x, y und z ausgedruckt wird, oder wenn z einer algebraiſchen Funktion von x und y gleich iſt. Iſt hingegen z keine algebraiſche Funktion von x und y, oder kommen in der Gleichung zwiſchen x, y und z transcendente Größen vor, z B. ſolche die von Logarithmen oder Kreisgrößen abhängen, ſo iſt die Fläche die durch eine ſolche Gleichung ausgedruckt wird, eine transcendente. Dergleichen iſt z. B. da, wenn $z = x.\, l.\, y$; oder $z = y^x$; oder $z = y.\, \sin x$ iſt. Es fällt aber in die Augen, daß man die Unterſuchung der algebraiſchen Flächen vor der Betrachtung der tranſcendenten vorhergehen laſſen muß.

8. Ferner muß man, um die Natur einer Fläche kennen zu lernen, vor allen Dingen unterſuchen, was z in Anſehung der Menge ſeiner Werthe für eine Funktion von x und y iſt. Hier kommen zuerſt diejenigen Flächen vor, wobey z eine einförmige Funktion von x und y iſt. Es ſey P eine ſolche einförmige oder rationale Funktion von x und y; ſo werden, wenn $Z = P$ iſt, den einzelnen Punkten der Ebene Q eben ſo viel Punkte der Fläche zugehören, oder es wird jede auf der Ebene APQ ſenkrecht aufgerichtete gerade Linie die Fläche in nicht mehr als in einem Punkte ſchneiden. In dieſem Falle kann der Werth der geraden Linie QM nie imaginär werden, ſondern es giebt dieſe gerade Linie allemal einen reellen Punkt in der Fläche. Es bringt indeß dieſe Verſchiedenheit der Funktionen keine weſentliche Verſchiedenheit unter den Flächen hervor; denn ſie hängt von der Lage der Ebene APQ ab, welche eben ſo als die Lage der Axe willkürlich iſt. Bezieht man daher dieſelbe Fläche auf eine andere Ebene, ſo kann die Funktion z aus einer einförmigen in eine vielförmige übergehen.

9. Es ſeyen P und Q einförmige Funktionen von x und y; ſo werden, wenn

$$zz - Pz + Q = 0$$

iſt, die geraden Linien, die aus den Punkten Q der angenommenen Ebene auf dieſelbe ſenkrecht geſtellet werden, die Fläche entweder in zweyen Punkten oder gar nicht ſchneiden; denn es hat dann z allemal zwey Werthe, die entweder beyde reell oder beyde imaginär ſind. Auf ähnliche Art iſt z, wenn P, Q und R einförmige Funktionen von x und y bedeuten, und

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$$

iſt, eine dreyförmige Funktion, und jede gerade Linie QM ſchneidet die Fläche entweder in dreyen Punkten, wenn alle Wurzeln dieſer Gleichung reell ſind, oder nur in einem, wenn zwey von dieſen Wurzeln imaginär ſind. Auf ähnliche Art hat man zu urtheilen, wenn z durch eine Gleichung von mehreren

ren Dimenſionen beſtimmt wird. Wie vielfältig als die Funktion z ſey, erkennet man leicht, ſobald man die Gleichung zwiſchen x, y und z rational gemacht hat.

10. So wie bey den Gleichungen der Curven die beyden Coordinaten derſelben verwechſelt werden können, ſo laſſen ſich auch in jeder Gleichung für eine Fläche die drey Coordinaten x, y und z mit einander verwechſeln. Denn nimmt man zuvörderſt in der Ebene APQ eine gerade auf AP ſenkrechte Linie Ap zur Axe an, ſo wird nun Ap = y und pQ = x, und dadurch ſind die beyden Coordinaten x und y mit einander vertauſcht. Die übrigen Verwechſelungen lernt man kennen, wenn man das rechtwinkliche Parallelepipedum ApQMξπqPA ergänzt; bey welchem zuvörderſt die drey beſtändigen und auf einander ſenkrechten Ebenen in Betrachtung kommen, APQp, APqπ, und Apξπ; denn die Art, wie die Fläche, worin der Punkt M liegt, auf dieſe Ebenen bezogen werden kann, wird durch eben dieſelbe Gleichung zwiſchen x, y und z angezeigt. In jeder Ebene aber giebt es eine doppelte Axe, die beyde in dem Punkte A anfangen, und daher entſpringen alſo ſechs verſchiedene Beziehungen zwiſchen den drey Coordinaten.

Die Coordinaten ſind

für die Ebene APQp entweder $\begin{cases} AP = x \\ PQ = y \\ QM = z \end{cases}$

oder $\begin{cases} AP = y \\ pQ = x \\ QM = z \end{cases}$

für die Ebene APqπ entweder $\begin{cases} AP = x \\ Pq = z \\ qM = y \end{cases}$

oder $\begin{cases} A\pi = z \\ \pi q = x \\ qM = y \end{cases}$

für die Ebene Apξπ entweder $\begin{cases} Ap = y \\ p\xi = z \\ \xi M = x \end{cases}$

oder $\begin{cases} A\pi = z \\ \pi\xi = y \\ \xi M = x. \end{cases}$

Wenn aber von dem beſtändigen Punkte A nach dem Punkte M der Fläche die gerade Linie AM gezogen wird, ſo iſt

$$AM = \sqrt{(xx + yy + zz)}.$$

11. Eine und dieſelbe Gleichung zwiſchen den Coordinaten x, y und z giebt uns alſo die Lage aller Punkte einer Fläche, in Beziehung auf drey Ebenen zu erkennen, die auf einander ſenkrecht ſind, und ſich in dem Punkte A ſchneiden. So wie nähmlich die veränderliche Größe z die Entfernung eines jeden Punktes der Fläche M von der Ebene APQ giebt, ſo giebt die veränderliche Größe y die Entfernung eben dieſes Punktes M von der Ebene APq und die veränderliche Größe x von der Ebene Apξ. Wiſſen wir aber, wie weit der Punkt M von jeder dieſer drey Ebenen entfernt iſt, ſo kennen wir auch ſeine wahre La-

ge. Es ſind daher dieſe drey Ebenen, auf welche jede Fläche vermittelſt einer Gleichung zwiſchen drey veränderlichen Größen x, y und z bezogen werden kann, vorzüglich zu merken, und iſt eine davon horizontal, ſo ſind die beyden übrigen vertical, und zwar die eine nach der Richtung AP, und die andere nach der Richtung Ap.

12. Hat man nun dieſe drey auf einander ſenkrechte Ebenen feſtgeſetzt, um darauf die gegebene Fläche zu beziehen; ſo fälle man aus jedem Punkte dieſer Fläche M auf jene Ebenen APQ, APq und $A\pi\xi$ die ſenkrechten Linien MQ, Mq und $M\xi$, und mache $MQ = z$, $Mq = y$ und $M\xi = x$. Dann ergänze man das Parallelepipedum, wodurch man drey gerade Linien bekömmt, welche jenen gleich ſind, und aus dem Punkte A ausgehen, nähmlich $AP = x$, $Ap = y$ und $A\pi = z$, und ſobald man dieſe kennt, ſo iſt auch die Lage des Punktes M bekannt. Läßt man aber die veränderlichen Größen x, y und z, wenn ſie nach den Ebenen, welche die Figur anzeigt, gerichtet ſind, poſitiv ſeyn, ſo muß man ſie, wenn ſie nach den entgegenſtehenden Gegenden laufen, als negativ anſehen.

13. Hat in der Gleichung zwiſchen den drey veränderlichen Größen x, y und z diejenige, welche auf der Ebene APQ ſenkrecht iſt, oder z, allenthalben gerade Dimenſionen, ſo kommt ihr ein doppelter Werth zu, ein poſitiver und ein negativer, und beyde ſind einander gleich. Alsdann iſt alſo die Fläche von der Art, daß ſie ſich auf beyden Seiten der Ebene ähnlich und gleich bleibt, und daß der Körper, der durch dieſelbe begränzt iſt, durch ſie in zwey gleiche Theile getheilt wird. So wie nun bey den ebenen Figuren diejenige gerade Linie, welche die Figur in zwey gleiche und ähnliche Theile theilte, Durchmeſſer genannt wurde, ſo wollen wir bey den Körpern diejenige Ebene, welche den Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt, die Diametral-Ebene nennen. Wenn daher die veränderliche Größe z in der Gleichung allenthalben gerade Dimenſionen hat, ſo iſt die Ebene APQ eine Diametral-Ebene.

14. Auf ähnliche Art erhellet, daß die Ebene APq, worauf y ſenkrecht iſt, eine Diametral-Ebene ſeyn werde, wenn y in der Gleichung für die Fläche allenthalben gerade Dimenſionen hat; und eben ſo iſt die Ebene $Ap\xi$ eine Diametral-Ebene, wenn x allenthalben gleiche Dimenſionen hat. Sobald daher eine Gleichung für eine Fläche zwiſchen den veränderlichen Größen x, y und z gegeben iſt, ſo läßt ſich ſogleich beurtheilen, ob unter den drey Ebenen Diametral-Ebenen ſeyn werden, oder nicht. Es können aber auch zwey, ja alle drey Ebenen Diametral-Ebenen ſeyn. Bey der Kugel z. B. deren Mittelpunkt in A liegt, iſt, weil der Halbmeſſer $AM = \sqrt{(xx + yy + zz)} = a$ iſt, $xx + yy + zz = aa$, und es wird folglich die Kugel von jeder der gedachten Ebenen in zwey ähnliche gleiche Theile getheilt.

15. Um die Geſtalt der Oberfläche, die in der gegebenen Gleichung enthalten iſt, zu erkennen, muß man ſein Augenmerk auf die drey auf einander ſenkrechte Ebenen richten, welche in der 1131. Fig. durch $QQ^1Q^2Q^3$, $TT^1T^2T^3$ und $\gamma\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ bezeichnet ſind, und ſich in dem Punkte A ſchneiden. Wenn man ſich dieſe drey Ebenen nach allen Seiten ohne Ende erweitert gedenkt, ſo theilen ſie den Raum in acht Gegenden ein, welche in der Figur durch AX, AX^1, AX^2, AX^3, AX^4, AX^5, AX^6, und AX^7 angezeigt werden. Sind in der erſten AX die veränderlichen Größen x, y und z poſitiv, ſo ſind in den übrigen ein oder zwey oder alle drey negative. Die genauere

nauere Beſchaffenheit dieſer Werthe aber läßt ſich am beſten aus folgenden Schema erkennen.

Die Gegend AX	Die Gegend AX^4
AP = + x	AP = + x
AR = + y	AR^1 = − y
AS = + z	AS = + z
Die Gegend AX^1	Die Gegend AX^5
AP^1 = − x	AP^1 = − x
AR = + y	AR^1 = − y
AS = + y	AS = + z.
Die Gegend AX^2	Die Gegend AX^6
AP = + x	AP = + x
AR = + y	AR^1 = − y
AS^1 = − z	AS^1 = − z
Die Gegend AX^3	Die Gegend AX^7
AP^1 = − x	AP^1 = − x
AR = + y	AR^1 = − y
AS^1 = − z	AS^1 = − z.

16. Bequemer iſt es indeß, dieſe acht Gegenden durch Zahlen zu bezeichnen, um jedesmal auf die leichteſte Art anzeigen zu können, von welcher die Rede ſey. Da nun alle acht Gegenden in dem Punkte A zuſammen kommen, und durch drey ſenkrecht ſich ſchneidende Ebenen von einander abgeſondert, dieſe drey Ebenen aber durch die geraden Linien Pp, Qq, Rr, die ſich in dem Punkte A ſenkrecht ſchneiden, beſtimmt werden: ſo läßt ſich jede Gegend durch drey von den Buchſtaben P, Q, und R, und p, q und r angeben. Die Hauptgegend oder die erſte PQR iſt nähmlich der Raum, welcher das Parallelepipedum zwiſchen den ohne Ende verlängerten geraden Linien AP, AQ, AR, und die Gegend Pqr, der Raum, welcher das Parallelepipedum zwiſchen den drey ohne Ende verlängerten geraden Linien AP, Aq und Ar enthält. Setzt man daher AP = x, AQ = y, AR = z, ſo iſt Ap = − x, Aq = − y, und Ar = − z. Wir wollen alſo die gedachten acht Gegenden auf die Art durch Zahlen von einander unterſcheiden, daß ſey:

	die 1ſte	die 2te
zwiſchen den Coordinaten	AP = + x AQ = + y AR = + z	AP = + x AQ = + y Ar = − z
	die 3te	die 4te
zwiſchen den Coordinaten	AP = + x Aq = − y AR = + z	Ap = − x AQ = + y AR = + z
	die 5te	die 6te
zwiſchen den Coordinaten	AP = + x Aq = − y Ar = − z	Ap = − x AQ = + y Ar = − z
	die 7te	die 8te
zwiſchen den Coordinaten	Ap = − x Aq = − y AR = + z	Ap = − x Aq = − y Ar = − z

17. Dieſe Gegenden unterſcheiden ſich ſehr, bald mehr, bald weniger von einander. Zuvörderſt giebt es zwey Gegenden, die zwey Coordinaten gemein und eine verſchieden haben; dieſe berühren ſich in einer Ebene, und wir wollen ſie daher verbundene nennen. Dann ſind zwey Coordinaten verſchieden, und eine gemein; dieſe Gegenden berühren ſich bloß in einer geraden Linie, und wir wollen ſie deswegen getrennte nennen. Endlich ſind alle Coordinaten von einander verſchieden, und die Gegenden haben bloß den Punkt A mit einander gemein; dieſen wollen wir den Namen der entgegengeſetzten Gegenden geben. Was für Gegenden mit einer jeden verbunden, oder von ihr getrennt, oder ihr entgegen geſetzt ſeyn, zeigt folgende Tabelle.

	Verbunden.			Getrennt.			Entgegengeſetzt.
PQR I	PQr II	PqR III	pQR IV	Pqr V	pQr VI	pqR VII	pqr VIII
PQr II	PQR I	Pqr V	pQr VI	PqR III	pQR IV	pqr VIII	pqR VII
PqR III	Pqr V	PQR I	pqR VII	PQr II	pqr VIII	pQR IV	pQr VI
pQR IV	pQr VI	pqR VII	PQR I	pqr VIII	PQr II	PqR III	Pqr V
Pqr V	PqR III	PQr II	pqr VIII	PQR I	pqR VII	pQr VI	pQR IV
pQr VI	pQR IV	pqr VIII	PQr II	pqR VII	PQR I	Pqr V	PqR III
pqR VII	pqr VIII	pQR IV	PqR III	pQr VI	Pqr V	PQR I	PQr II
pqr VIII	pqR VII	pQr VI	Pqr V	pQR IV	PQR III	PQr II	PQR I

18. Es hat alſo jede Gegend drey mit ihr verbundene, drey getrennte und eine entgegengeſetzte, und es erhellet aus der vorſtehenden Tabelle ſogleich, wie eine jede gegen jede andere beſchaffen iſt. Die Ordnung, welche die Zahlen in dieſer Tabelle beobachten, iſt bemerkenswerth, und um ſie dem Ueberblicke auf eine leichtere Art darzuſtellen, wollen wir eben dieſelben Zahlen in eben der Ordnung in folgendes Quadrat einſchließen.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	5	6	3	4	8	7
3	5	1	7	2	8	4	9
4	6	7	1	8	2	3	5
5	3	2	8	1	7	6	4
6	4	8	2	7	1	5	3
7	8	4	3	6	5	2	1
8	7	6	5	4	3	2	1

Die

Die Art, wie hier die Zahlen auf einander folgen, fällt bey einiger Aufmerkſamkeit von ſelbſt in die Augen, der Gebrauch dieſer Tabelle aber wird in der Folge ausführlich gezeigt werden.

19. Wir haben ſchon vorhin bemerkt, daß einer Fläche, in deren Gleichung die veränderliche Größe z allenthalben gerade Dimenſionen hat, zwey einander gleiche und ähnliche Theile zukommen; es iſt nähmlich alsdann der Theil in der erſten Gegend gleich und ähnlich dem in der zweyten, und auf ähnliche Art ſind auch die Theile in der dritten und fünften, desgleichen die in der vierten und ſechſten, und endlich in der ſiebenten und achten mit einander übereinſtimmend. Wenn hingegen die veränderliche Größe y allenthalben gerade Dimenſionen hat, ſo ſtimmen die erſte und dritte, die zweyte und fünfte, die vierte und ſiebente, und die ſechſte und achte mit einander überein. Hat x in der Gleichung allenthalben gerade Dimenſionen, ſo findet dieſe Uebereinſtimmung in der erſten und vierten, in der zweyten und ſechſten, in der dritten und ſiebenten, und in der fünften und achten Gegend ſtatt. Wenn nähmlich

in der Gleichung allenthalben gerade Dimenſionen hat die veränderliche Größe.

z	y	x
ſo ſtimmen überein		
die Gegenden	die Gegenden	die Gegenden
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7	3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6	4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5.

20. Wenn die Theile der Fläche in den getrennten Gegenden, der erſten und fünften, einander gleich ſeyn ſollten, ſo muß die Gleichung ſo beſchaffen ſeyn, daß ſie unverändert bleibt, wenn man die beyden unveränderlichen Größen y und z negativ nimmt. Es wird dies alſo ſtatt finden, wenn die beyden Größen y und z zuſammen genommen in allen Gliedern der Gleichung allenthalben entweder gerade oder ungerade Dimenſionen haben. Wenn aber die erſte und fünfte Gegend mit einander übereinſtimmen, ſo thun ſolches auch die zweyte und dritte, die vierte und achte, und die ſechſte und ſiebente. Auf ähnliche Art ſtimmen, wenn in der Gleichung für die Fläche die beyden veränderlichen Größen x und z allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimenſionen ausmachen, die erſte Gegend mit der ſechſten, die zweyte mit der vierten, die dritte mit der achten, und die fünfte mit der ſiebenten überein.

Wenn nähmlich in der Gleichung für die Fläche allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimenſionen haben.

Die veränderlichen Größen

y und z	x und z	x und y
ſo ſtimmen überein		
die Gegenden	die Gegenden	die Gegenden.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4	6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3	7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2.

Wenn aber alle drey veränderlichen Größen x, y und z zuſammengenommen entweder allenthalben eine gerade oder allenthalben eine unge-

rade Anzahl von Dimenſionen haben, ſo ſtimmen die entgegengeſetzten Gegenden mit einander überein.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

21. Wenn ſich von dieſen Bedingungen zwey oder alle drey zugleich bey der Gleichung finden, ſo ſtimmen entweder je vier oder alle acht Gegenden mit einander überein.

Wenn ſowohl x als y, jede für ſich betrachtet, allenthalben eine gerade Anzahl von Dimenſionen haben, ſo ſtimmen folgende Gegenden zu je vieren mit einander.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2.

Wenn ſowohl x als z, jede für ſich, eine gerade Anzahl von Dimenſionen haben, ſo ſtimmen folgende Gegenden zu je vieren mit einander überein.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3.

Wenn die veränderlichen Größen y und z, jede für ſich betrachtet, allenthalben eine gerade Anzahl von Dimenſionen haben, ſo ſtimmen folgende Gegenden zu je vieren mit einander überein

1, 2, 3, 4, 5, 7, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4.

22. Wenn eine ven den veränderlichen Größen allenthalben gerade Dimenſionen hat, die beyden übrigen aber zuſammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimenſionen geben, ſo ſtimmen auch je vier und vier Gegenden mit einander überein, und zwar auf folgende Art.

Wenn z allenthalben gerade Dimenſionen hat, x und y aber allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimenſionen ausmachen, ſo ſtimmen folgende Gegenden mit einander überein.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Wenn y allenthalben gerade Dimenſionen hat, und x und z zuſammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimenſionen geben, ſo ſtimmen folgende Gegenden zu vier und vieren mit einander überein.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Wenn

Wenn x allenthalben gerade Dimenſionen hat, und y und z zuſammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder ungerade Anzahl von Dimenſionen geben, ſo ſtimmen folgende Gegenden zu vier und vieren mit einander überein.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3
8, 7, 8, 5, 4, 3, 2, 1.

In dieſen drey Fällen haben alſo drey veränderliche Größen x, y und z zuſammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimenſionen.

23. Es ſind noch folgende Fälle von vier gleichen Gegenden übrig. Wenn x und y und y und z allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimenſionen haben, ſo ſtimmen folgende Gegenden zu vieren mit einander überein.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4
7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2
6, 3, 8, 2, 7, 1, 5, 3.

Eben dieſe Aehnlichkeiten müſſen ſich ergeben, wenn auſſerdem die beyden übrigen veränderlichen Größen x und z allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimenſionen ausmachen, ſo daß dieſe Bedingung bereits in der angeführten enthalten iſt. Es werden daher die Theile einer Oberfläche in je vier getrennten Gegenden unter einander gleich ſeyn, wenn in der Gleichung je zwey veränderliche Größen zuſammengenommen, allenthalben entweder eine gerade oder ungerade Anzahl von Dimenſionen haben. Da es aber drey Combinationen giebt, ſo iſt zu bemerken, daß wenn zwey die erklärte Eigenſchaft haben, dieſelbe der dritten ebenfalls zukomme.

24. Wenn zu den Bedingungen, wobey je vier Gegenden gleich und ähnlich werden, noch eine neue in ihnen nicht enthaltene hinzukommt, die je zwey Gegenden einander gleich und ähnlich macht, ſo werden alle Gegenden einander gleich, und die Fläche beſtehet aus acht einander gleichen und ähnlichen Theilen. Die Gleichung für dieſe Art der Flächen faßt alle bisher betrachteten Eigenſchaften zuſammen in ſich; es haben nähmlich die veränderlichen Größen x, y und z jede für ſich betrachtet, allenthalben gerade Dimenſionen, und es müſſen daher auch je zwey oder alle drey zuſammen genommen eine gerade Anzahl von Dimenſionen geben.

25. Ob aber eine gegebene Gleichung zwiſchen dreyen veränderlichen Größen zwey oder alle drey von den betrachteten Eigenſchaften an ſich habe oder nicht, erkennet man in Anſehung der geraden Dimenſionen jeder veränderlichen Größe, leicht. Auch macht es keine Schwierigkeit zu beſtimmen, ob alle veränderliche Größen allenthalben eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimenſionen geben. Nicht ſo leicht iſt es, zu unterſuchen, ob je zwey von

von dieſer Art ſind. Man ſetze in der Gleichung entweder $x = nz$, oder $y = nz$, oder $x = ny$, und ſehe, ob in dem einen oder dem andern Falle eine Gleichung ſich ergebe, in welcher für die beyden erſten Annahmen z, und für die letzte y allenthalben gerade Dimenſionen bekomme. Iſt dieſes, ſo haben je zwey veränderliche Größen zuſammengenommen allenthalben entweder gerade oder ungerade Dimenſionen, und es muß daher die Fläche zum wenigſten zwey einander gleiche und ähnliche Theile haben.

Euler Anal. d. Unendl. 2. B. S. 471 u. f. w.

II. Ordnungen der Flächen.

1. So wie die Gleichungen für die krummen Linien, die in einer Ebene liegen, durch Veränderung entweder des Anfangspunkts der Abſciſſen, oder der Lage der Axen, oder beyder Dinge, unzählige Formen bekommen können, ſo findet dieſe Verſchiedenheit bey den Gleichungen für die Flächen in einem noch weit höhern Grade ſtatt. Denn einmal können in der Ebene, in welcher zwey Coordinaten liegen, dieſe Coordinaten auf unzählige Arten verändert werden; und dann läßt ſich auch die Ebene, welche zwey Coordinaten enthält, verändern, und auf dieſe Weiſe die vorhergehende Verſchiedenheit unendlich vermehren. Iſt nähmlich eine Gleichung zwiſchen drey auf einander ſenkrechten Coordinaten gegeben, ſo läßt ſich allemal eine andere Gleichung zwiſchen drey andern ebenfalls auf einander ſenkrechten Coordinaten finden, deren Lage in Anſehung der vorigen unendlich mehrmal verändert werden kann, als wenn nur zwey Coordinaten da wären, wie bey den Gleichungen für die krummen Linien.

2. Angenommen, daß zuvörderſt bloß der Anfangspunkt der Abſciſſen x in der Axe verändert werde, und die beyden übrigen Coordinaten dieſelben bleiben; ſo wird die neue Abſciſſe von der vorigen um eine beſtändige Größe unterſchieden ſeyn. Es ſey alſo die neue Abſciſſe $= t$, ſo iſt $x = t \pm a$; und bringt man dieſen Werth in die für die Fläche gegebene Gleichung, ſo bekommt man eine Gleichung zwiſchen den drey Coordinaten t, y und z, die zwar von der vorigen verſchieden iſt; aber gleichwohl eben der Fläche zugehört. Auf ähnliche Art können auch die übrigen Coordinaten y und z um beſtändige Größen vermehrt oder vermindert werden: und ſetzt man $x = t \pm a$; $y = u \pm b$; und $z = v \pm c$, ſo bekommt man eine Gleichung für eben die Fläche zwiſchen den Coordinaten t, u und v, welche ſelbſt den vorigen parallel ſind. Ob indeß dieſe Gleichung gleich allgemeiner iſt, ſo iſt ſie doch von der gegebenen eben nicht ſehr verſchieden.

3. Da die drey rechtwinklichen Coordinaten, deren Gleichung die Natur der Fläche ausdruckt, auf drey auf einander ſenkrechte Ebenen bezogen werden, ſo wollen wir annehmen, daß die neue Ebene, in welcher die beyden Coordinaten x und y genommen werden, unverändert bleibe, daß aber darinn eine andere gerade Linie CD, Fig 1258 zur Axe angenommen werde. Da nun die vorigen Coordinaten bey der Axe AB folgende waren, $AP = x$, $PM = y$, $QM = z$, ſo bleibt für die neue Axe CQ die Coordinate $QM = t$, und $TQ = u$, wenn man QT auf die neue Axe CT ſenkrecht gezogen hat. Um daher die Gleichung zwiſchen dieſen neuen Coordinaten t, u und z zu finden,

ziehe

ziehe man CR der vorigen Axe AP parallel, und aus C auf ſie CB ſenkrecht, und ſetze AB = a, BC = b, und den Winkel RCT = ζ. Endlich ziehe man TR auf CR, und aus T auf PQ die TS ſenkrecht.

4. Iſt dieſes geſchehen, ſo iſt in dem Dreyeck TCR

$TR = t. \sin \zeta$; und $CR = t. \cos \zeta$.

Hieraus findet man

$$AP = x = CR + TS - AB = t. \cos \zeta + u. \sin \zeta - a,$$

und $QP = y = QS - TR - BC = u. \cos \zeta - t. \sin \zeta - t$.

Bringt man daher dieſe Werthe für x und y in die für die Fläche gegebene Gleichung, ſo bekommt man eine andere Gleichung zwiſchen den neuen Coordinaten t, u und z, welche ebenfalls die Natur der gegebenen Fläche ausdruckt. Dieſe neue Gleichung hat einen viel weitern Umfang, da in ihr drey neue willkührliche beſtändige Größen a, b, und der Winkel ζ befindlich ſind, die in der vorigen Gleichung nicht anzutreffen waren. Auch iſt ſie die allgemeinſte Gleichung, wenn die Ebene, worin x und y liegen, beybehalten wird.

5. Es ändere ſich nunmehr auch die Ebene, in welcher x und y angenommen worden, und zwar zuvörderſt ſo, daß die Durchſchnittslinie der neuen Ebene mit der vorigen APQ, Fig. 1286, in die gerade Linie AP falle, die zugleich als die Axe der neuen Coordinaten angeſehen werden ſoll. Es ſey alſo APT dieſe neue Ebene, deren Neigungswinkel gegen die vorige der Winkel QPT iſt, den wir = η ſetzen wollen, und aus M nach PT ſenkrecht MT gezogen, welche auch auf der neuen Ebene ſenkrecht ſeyn wird, und die Stelle der dritten Coordinate vertreten kann. Man ſetze alſo AP = x, PT = u, und TM = v, ſo iſt, wenn man TR auf PQ und TS auf QM ſenkrecht gezogen hat,

$TR = u. \sin \eta$; $PR = u. \cos \eta$; $TS = v. \sin \eta$; $MS = v. \cos \eta$

und folglich

$PQ = y = u. \cos \eta - v. \sin \eta$; und

$QM = z = v. \cos \eta - u. \sin \eta$.

Bringt man dieſe Werthe für y und z in die gegebene Gleichung, ſo erhält man eine zwiſchen den drey neuen Coordinaten x, u, und v, welche die Natur eben der Fläche ausdruckt.

6. Es falle nun der Schnitt der neuen ſchneidenden Ebene und der Ebene APQ in irgend eine Linie CT, und η ſey der Neigungswinkel dieſer Ebenen, und CT die Axe in dieſer Ebene. Man ſuche zuvörderſt eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten in der Ebene APQ auf die Axe CT bezogen, welche man aus der vorhergehenden auf die Art finden wird, daß bey

AB = a; BC = b; TCR = ζ; CT = p; TQ = q; und QM = r

$x = p. \cos \zeta + q. \sin \zeta - a$;

$y = q. \cos \zeta - p. \sin \zeta - b$; und $z = r$

iſt. Es wird aber aus dem vorhergehenden §, wenn man die neuen Coordinaten t, u und v nennt

$p = t$; $q = u. \cos \eta - v. \sin \eta$; und $r = v. \cos \eta + u. \sin \eta$

und folglich

$x = t. \cos \zeta + u. \sin \zeta. \cos \eta - v. \sin \zeta. \sin \eta - a$

$y = - t. \sin \zeta + u. \cos \zeta. \cos \eta - v. \cos \zeta. \sin \eta - b$ und

$z = u. \sin \eta + v. \cos \eta$.

7. Nun nehme man in der neuen Ebene in welcher die Coordinaten t und u liegen, irgend eine andere Linie zur Axe an, um die allgemeinſte Gleichung für die gegebene Fläche zu bekommen. Es ſeyen zu dem Ende AP, PQ, QM, Fig 1285 die Coordinaten t, u und v, welche wir ſo eben gefunden haben, ſo daß AP der Durchſchnitt der erwähnten Ebene mit derjenigen ſey, in welcher man ſich die Hauptcoordinaten x und y denkt. Es ſey CT die neue Axe, auf welche die neuen allgemeinſten Coordinaten, welche wir ſuchen, bezogen werden, und CT = p; TQ = q; und QM = r. Außerdem ſind die Linien AB und BC beſtändige Linien, der Winkel CTR aber ſey = ϑ. Dies vorausgeſetzt, ſo iſt nach (4)

$$t = p.\cos\vartheta + q.\sin\vartheta - AB$$

$$u = -p.\sin\vartheta + q.\cos\vartheta - BC$$

$$\text{und } v = r.$$

Bringt man dieſe Werthe in die Ausdrücke des vorhergehenden §, ſo findet man

$$x = p(\cos\zeta.\cos\vartheta - \sin\zeta.\cos\eta.\sin\vartheta) + q.(\cos\zeta.\sin\vartheta + \sin\zeta.\cos\eta.\cos\vartheta) - r.\sin\zeta.\sin\eta + f.$$

$$y = -p.(\sin\zeta.\cos\vartheta + \cos\zeta.\cos\eta.\sin\vartheta - q(\sin\zeta.\sin\vartheta - \cos\eta\ \cos\vartheta) - r.\cos\zeta.\sin\eta + q \text{ und}$$

$$z = -p.\sin\eta.\sin\vartheta + q.\sin\cos\vartheta + r.\cos\eta + h.$$

wo f, g und h beſtändige, und aus den in die Rechnung eingeführten entſtandene Linien ſind.

8. Es enthält alſo die allgemeinſte Gleichung für jede Fläche ſechs beſtändige willkürliche Größen, die man annehmen kann wie man will, ohne daß deswegen durch die Gleichung eine andere Fläche ausgedruckt werde. So einfach aber eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten x, y und z für eine Fläche ſeyn mag, ſo wird ſie, wenn man daraus die allgemeinſte Gleichung zwiſchen p, q und r macht, wegen der großen Menge der beſtändigen willkürlichen Größen nothwendig ſehr verwickelt, insbeſondere, wenn höhere Potestäten von x, y und z vorkommen. Es ſind daher die Fälle ſelten, wo es rathſam wäre, zu der allgemeinſten Gleichung aufzuſteigen. Denn wenn man gleich daraus den Vortheil ziehen könnte, daß man durch eine geſchickte Beſtimmung der beſtändigen Größe die Gleichung auf die einfachſte Form zurückführte, ſo wird doch dieſe Arbeit wegen der Weitläuftigkeit des Calculs meiſtens ſehr beſchwerlich. Zur Erforſchung mehrerer merkwürdigen Eigenſchaften aber leiſtet die Verwandlung der Gleichung in die allgemeinſte allerdings Nutzen

9. So verwickelt indeß die allgemeinſte Gleichung meiſtens iſt, ſo iſt doch die Anzahl der Dimenſionen der Coordinaten in derſelben der Anzahl der Dimenſionen der erſten Coordinaten x, y und z gleich. Die Gleichung für die Kugel z. B. $xx + yy + zz = aa$ iſt eine Gleichung von zwey Dimenſionen, und die allgemeinſte Gleichung enthält ebenfalls nicht mehr Dimenſionen der Coordinaten p, q und r. Aus dieſem Grunde giebt die Anzahl der Dimenſionen welche die Coordinaten in einer Gleichung für eine Fläche haben, ein weſentliches Kennzeichen der Natur dieſer Fläche, weil dieſe Anzahl immer dieſelbe bleibt, man mag die Lage der Coordinaten verändern wie man will. Es findet ſich hier nähmlich bey den Flächen eine ähnliche Beſchaffenheit wie bey den Curven, wornach dieſelben in Ordnungen getheilt werden; und es laſſen ſich daher die Flächen ebenfalls nach den Dimenſionen ihrer Coordinaten in

Ord-

Ordnungen theilen. Eine Fläche der erſten Ordnung iſt demnach die, deren Gleichung zwey Dimenſionen enthält, u. ſ. f.

10. Wenn man dieſes mit dem vergleicht, was von der Erfindung der ebenen Schnitte jeder Fläche gelehrt wird (S. Flächenſchnitte) ſo nimmt man wahr, daß die Ordnung dieſer Schnitte allemal mit der Ordnung der Fläche übereinſtimmt. Es ſey nähmlich eine Gleichung für irgend eine Fläche zwiſchen den Coordinaten x, y und z gegeben, die zur nten Ordnung gehöre, und die ſenkrechten Coordinaten eines jeden Schnitts ſeyen t und u. Nun haben wir oben geſehen, daß man die Gleichung zwiſchen t und u findet, wenn man in der gegebenen Gleichung für die Fläche

$$x = f + t.\cos\vartheta - u.\sin\vartheta.\cos\phi$$
$$y = t.\sin\vartheta + u.\cos\vartheta.\cos\phi$$
$$\text{und } z = u.\sin\phi$$

ſetzt, und es iſt daher offenbar, daß die Gleichung für den Schnitt nicht mehr Dimenſionen bekommen kann, als die Gleichung zwiſchen x, y und z hat, ſondern daß allemal eben ſo viel Dimenſionen wieder entſtehen werden.

11. Es kann alſo die Fläche der erſten Ordnung von einer Ebene nicht anders als in einer Linie der erſten Ordnung, oder in einer geraden Linie geſchnitten werden. Ferner giebt die Durchſchneidung einer Fläche der zweyten Ordnung auch eine Linie der zweyten Ordnung oder Kegelſchnitte, denn es gehören auch die coniſchen Flächen zu der zweyten Ordnung, indem ihre Gleichung $zz = \alpha xx + \beta yy$ iſt. Auf ähnliche Art entſtehen aus der Durchſchneidung einer Fläche der dritten Ordnung durch Ebenen, Linien der dritten Ordnung ꝛc. Es kann indes geſchehen, daß eine Gleichung für einen Schnitt Diviſoren zuläßt, und in dieſem Falle iſt der Schnitt aus zwey oder mehreren Linien der niedrigern Ordnungen zuſammengeſetzt. So beſtehet der durch den Scheitel gehende Schnitt des Kegels aus zwey geraden Linien, die aber zuſammengenommen als zu der zweyten Ordnung gehörig ſich darſtellen.

12. Nach dieſer Beſtimmung der Ordnungen der Flächen wollen wir vor allen übrigen die Flächen betrachten, welche zu der erſten Ordnung gehören. Die Gleichung, welche die Natur derſelben ausdruckt, iſt

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a$$

und da alle ebene Schnitte derſelben gerade Linien ſind, ſo fällt in die Augen, daß dieſe Fläche keine andere als eine Ebene ſeyn kann; denn ſollte ſie erhaben oder hohl ſeyn, ſo müßte ſie auch krummlinichte Schnitte haben. Nun giebt es zwar unter den übrigen Ordnungen ebenfalls Flächen, bey welchen gewiſſe Schnitte gerade Linien ſind, wie z. B. bey dem Cylinder, dem Kegel und andern dergleichen ſtatt finden, aber es ſind doch dabey die krummlinichten Schnitte nicht ganz ausgeſchloſſen. Es verhält ſich hier auf eine ähnliche Art, wie bey den Linien. So wie eine Linie, die von einer geraden Linie nie in mehr als in einem Punkte geſchnitten werden kann, nothwendig eine gerade Linie iſt, ſo iſt auch die Fläche, welcher von einer Ebene geſchnitten jedesmal eine gerade Linie giebt, nothwendigerweiſe auch ſelbſt eine Ebene.

13. Aus der allergemeinſten Gleichung läßt ſich dieſe Beſchaffenheit aufs klärſte darthun. Man mache nähmlich aus der Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ die allgemeinſte Gleichung zwiſchen den Coordinaten p, q und r nach dem (7). Da darin ſechs neue willkürliche beſtändige Größen vorkommen, ſo iſt es allemal möglich und erlaubt, dieſelben ſo zu beſtimmen, daß die Coefficien-

ſicienten der beyden Coordinaten p und q verſchwinden, und alſo eine Gleichung von der Form $r = f$ übrig bleibe, welche die Natur eben der Fläche ausdruckt. Es zeigt aber dieſe Gleichung an, daß die gegebene Fläche der Ebene, in welcher die beyden Coordinaten p und q ſind, parallel, und alſo ſelbſt eine Ebene iſt. Man kann es auch ſo einrichten, daß $r = 0$ wird, und auf dieſe Art fällt es in die Augen, daß die Ebene wie p und q angenommen worden, ſelbſt die geſuchte Ebene iſt.

14. Da alſo ausgemacht iſt, daß die durch die Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ ausgedruckte Fläche eine Ebene iſt, ſo müſſen wir die Lage derſelben gegen die Ebene, worin die Coordinaten x und y angenommen werden, unterſuchen. Es ſey alſo Fig 1287, M irgend ein Punkt dieſer Fläche, und die drey Coordinaten $AP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$. Man ſetze zuvörderſt $z = 0$, ſo bekommt man die Gleichung $\alpha x + \beta y = a$, welche den Schnitt der geſuchten Fläche und der Ebene APQ ausdruckt, und es iſt klar, daß derſelbe eine gerade Linie BCR iſt, deren Lage in Rückſicht auf die Axe ſo beſchaffen ſeyn wird, daß die auf der Axe AP in der Ebene ſenkrechte Linie AB $= \frac{\alpha}{\beta}$, und

$AC = \frac{a}{\alpha}$, und folglich

$$\text{tang } ACB = \frac{\alpha}{\beta}; \ \text{ſin } ACB = \frac{\alpha}{\sqrt{(a^2+\beta^2)}}; \text{ und}$$

$$\text{coſ } ACB = \frac{\beta}{\sqrt{(a^2+\beta^2)}} \text{ iſt.}$$

Nun verlängere man die QP bis ſie der geraden Linie BC in R begegne, ſo iſt, wegen $CP = x - \frac{a}{\alpha}$, $CR = \frac{x\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\beta} - \frac{a\sqrt{(a^2+\beta^2)}}{\alpha\beta}$; und

$$PQ = \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{a}{\beta}.$$

15. Man fälle aus Q auf BC die ſenkrechte Linie QS herab, und ziehe MS, ſo mißt der Winkel MSQ die Neigung der gegebenen Fläche gegen die Ebene APQ. Da alſo $PR = \frac{\alpha x - a}{\beta}$ iſt, ſo iſt

$$QR = \frac{\alpha x + \beta y - a}{\beta} = \frac{-\gamma z}{\beta};$$

und da der Winkel ROS dem Winkel ACB gleich iſt, ſo wird

$$QS = \frac{-\gamma z}{\sqrt{(a^2+\beta^2)}}$$

und folglich

$$\text{tang } QSM = \frac{-\sqrt{(a^2+\beta^2)}}{\gamma}, \text{ und}$$

$$\text{coſ } QSM = \frac{\gamma}{\sqrt{(a^2+\beta^2+\gamma^2)}}.$$

Es

Es neigt ſich alſo die geſuchte Fläche gegen die Ebene, in welcher x und y ſind, unter einem Winkel, deſſen tang $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\gamma}$ iſt; und auf ähnliche Art iſt eben dieſe Fläche gegen die Ebene der Coordinaten x und z unter einem Winkel, deſſen Tangente $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)}}{\beta}$, und gegen die Ebene der Coordinaten y und z unter einem Winkel, deſſen Tangente $= \frac{-\sqrt{(\beta^2 + \gamma^2)}}{\alpha}$ iſt, geneigt.

16. Da wir alſo die Ordnung der Flächen nach der Zahl der Dimenſionen feſt geſetzt haben, welche den höchſten Poteſtäten der drey Coordinaten x, y und z in der Gleichung zukommen: ſo iſt es, wenn eine algebraiſche Gleichung für eine Fläche gegeben wird, leicht, ſogleich die Ordnung anzugeben, zu welcher dieſe Fläche gehört. Da nun alle Flächen der erſten Ordnung Ebenen ſind, und wie dieſe bereits betrachtet haben, ſo wollen wir nunmehr die Flächen der zweyten Ordnung betrachten. Bey denſelben findet eine weit größere Verſchiedenheit ſtatt, als bey den Linien der zweyten Ordnung.

17. Da die Natur der Flächen der 2ten Ordnung durch eine Gleichung ausgedruckt wird, in welcher die veränderlichen Größen x, y und z zu zwey Dimenſionen aufſteigen, ſo gehören der Cylinder und Kegel, die geraden ſowohl als die ſchiefen, zu dieſer Ordnung. Alle Flächen aber, welche dieſelbe unter ſich begreift, ſind in folgender allgemeinen Gleichung enthalten:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0.$$

Denn man mag die drey Coordinaten annehmen wie man will, ſo iſt die Gleichung allemal in dieſer enthalten. Die verſchiedenen Arten der Flächen werden alſo von den verſchiedenen Verhältniſſen abhängen, welche die Coefficienten gegen einander haben, die, obgleich eben dieſelbe Fläche durch unzählige Gleichungen ausgedrückt wird, dennoch eine unendliche Menge von verſchiedenen Flächen erzeugen.

18. Es laſſen ſich alle Flächen, ſie mögen zu einer Ordnung gehören, zu was für einer ſie wollen, in zwey Claſſen eintheilen, davon die eine diejenigen Flächen enthält, welche ſich ohne Ende fort erſtrecken; die andere aber diejenigen, welche in einem endlichen Raume enthalten ſind. So gehören der Cylinder und Kegel zu der erſten, und die Kugel zu der zweyten Claſſe. Von der zweyten Claſſe aber giebt es keine Art, die zu einer ungeraden Ordnung gehörte. Denn da jede Fläche einer ungeraden Ordnung, ebene Schnitte von eben der Ordnung hat, und die krummen Linien der ungeraden Ordnungen ſich ohne Ende fort erſtrecken, ſo müſſen ſich auch die Flächen dieſer Ordnungen ohne Ende ausbreiten.

19. So oft ſich aber eine Fläche ohne Ende fort erſtrecken ſoll, ſo muß zum wenigſten eine von den drey veränderlichen Größen x, y und z unendlich groß werden, da es nun gleichviel iſt, welche dazu angenommen wird, ſo wollen wir ſetzen, daß z unendlich wird, wenn die Fläche ohne Ende fortläuft. Bey der Unterſuchung dieſes ohne Ende ſich verbreitenden Theils nehmen wir alſo $z = \infty$ an, und nun kommt es vorzüglich auf die Betrachtung des erſten Gliedes αzz an, ob daſſelbe in der Gleichung vorkommt oder nicht.

Iſt alſo dieſes Glied da, ſo verſchwinden dagegen die Glieder $\varkappa z$ und $\varkappa$, und es entſtehet für dieſen ohne Ende fortlaufenden Theil der Gleichung

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \vartheta y + \iota x = 0$$

in welcher ferner alle Glieder, die nicht unendlich groß oder ſolches doch von einer niedrigern Stufe als αzz ſind, verſchwinden.

20. Wir wollen annehmen daß alle Glieder, in welchen die veränderlichen Größen zwey Dimenſionen haben, da ſeyen; denn wie auch die Fläche beſchaffen ſeyn mag, ſo enthält gleichwohl ihre allgemeinſte Gleichung allemal alle Glieder von den höchſten Dimenſionen, und es thut daher dieſe Annahme, der Allgemeinheit unſerer jetzigen Unterſuchung keinen Eintrag. Wenn aber die Glieder yz und xz da ſind, ſo verſchwinden dagegen die Glieder ϑy und ιx und es bleibet folgende Gleichung übrig

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0,$$

aus welcher fließet

$$z = \frac{-\beta y - \gamma x \pm \sqrt{((\beta\beta + 4\alpha\delta)yy + (2\beta\gamma + 4\alpha\varepsilon)xy + (\gamma\gamma - 4a\zeta)xx)}}{\alpha}$$

und dieſe Gleichung druckt die Natur der Theile der Fläche im Unendlichen aus.

21. Wenn alſo eine Fläche einen Theil im Unendlichen hat, ſo ſtimmt derſelbe mit dem Theile der Fläche im Unendlichen überein, welcher durch folgende Gleichung ausgedruckt wird

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$$

ſo daß dieſe Fläche gleichſam die Aſymptote jener durch die allgemeine Gleichung ausgedruckten Fläche iſt. Da aber in dieſer Gleichung die drey veränderlichen Größen, allenthalben zwey Dimenſionen haben, ſo iſt dieſe Gleichung eine Gleichung für eine coniſche Fläche, welche den Scheitel im Anfangspunkte der Coordinaten hat, wo zugleich alle verſchwinden; und es läßt ſich daher, ſo oft ſich eine Fläche ohne Ende fort erſtreckt, allemahl eine coniſche Fläche finden, welche als ihre Aſymptote betrachtet werden kann. Man kann alſo die Theile der Flächen welche ſich ohne Ende verbreiten, nach coniſchen Aſymptoten-Flächen von einander unterſcheiden.

22. So oft daher die coniſche Aſymptoten-Fläche reell iſt, ſo oft erſtreckt ſich die Fläche ſelbſt ohne Ende fort, und zwar auf die Art, daß die Theile von beyden im Unendlichen zuſammen fallen; und man kann daher aus der Natur der Aſymptoten-Fläche die Natur der gegebenen Fläche erkennen. Wird aber die Aſymptoten-Fläche imaginär, ſo hat die gegebene Fläche keinen Theil im Unendlichen, ſondern iſt ganz in einem Raume eingeſchloſſen. Um alſo die Flächen der zweyten Ordnung, die in einem endlichen Raume eingeſchloſſen ſind, zu erforſchen, darf man nur die Fälle aufſuchen, in welchen die Gleichung für die Aſymptoten-Fläche imaginär iſt, und dieſes geſchiehet wenn die ganze Fläche in einem Punkt verſchwindet. Denn wenn ſie irgend eine Ausdehnung, oder irgend einen Punkt außer dem Scheitel hatte, ſo müßte ſie ſich auch ohne Ende fort erſtrecken, weil die ganze gerade Linie, welche durch den Scheitel und einen Punkt der Fläche gezogen wird, in der Fläche ſelbſt lieget.

23. Wenn alſo die coniſche Aſymptoten-Fläche welche durch die Gleichung

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$$

ausgedruckt wird, in einen Punkt übergehet, ſo müſſen alle durch den Scheitel

tel gehenden Schnitte derſelben gleichfalls in dieſem Punkte verſchwinden. Es muß daher einmal, wenn man $z = 0$ ſetzt, die Gleichung $\delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx$ unmöglich ſeyn, wenn nicht $x = 0$, und $y = 0$ iſt, und dieſes geſchiehet, wenn $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$ iſt. Eben dieſes muß ferner geſchehen, wenn man entweder $x = 0$ oder $y = 0$ ſetzt, und es wird alſo $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$, und $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$. Wofern alſo in einer Gleichung für eine Fläche der zweyten Ordnung

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0$$

nicht $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$; $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$; $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$ iſt, ſo hat die Fläche allemahl Theile, die ſich ohne Ende fort verbreiten.

24. Es reichen alſo dieſe drey Bedingungen noch nicht hin, um eine Fläche in einem endlichen Raume einzuſchlieſſen, ſondern es wird noch außerdem erfordert, daß der aus der Gleichung für die Aſymptote hergeleitete Werth von z imaginär werde. Dies geſchiehet wenn der Ausdruck

$$(\beta\beta - 4\alpha\delta)\, yy + 2\, (\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon)\, xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)\, xx$$

beſtändig einen negativen Werth bekommt, wenn für jede der veränderlichen Größen x und y irgend ein Werth außer 0 geſetzt wird. Da $\beta\beta - 4\alpha\delta$, und $\gamma\gamma - 4\alpha\zeta$ negative Größen ſind, ſo findet dieſes ſtatt, wenn $(\beta\gamma + 2\alpha\varepsilon)^2$ kleiner als $(\beta\beta - 4\alpha\delta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)$ oder wenn $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ kleiner als $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$ iſt, vorausgeſetzt daß α einen poſitiven Werth habe, weil wir die Gleichung durch α dividirt haben. Hat aber α einen poſitiven Werth, ſo ſind, weil $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$, und $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$ und $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$ iſt, die Coefficienten δ und ζ poſitiv.

25. Es wird alſo eine Fläche der zweyten Ordnung in einem endlichen Raume eingeſchloſſen ſeyn, wenn bey ihrer Gleichung folgende vier Bedingungen ſtatt finden, daß nähmlich

$4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$;
$4\alpha\delta$ — — $\beta\beta$;
$4\delta\zeta$ — — $\varepsilon\varepsilon$ und
$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ kleiner als $\beta\gamma^{x} + 4\delta\zeta$

iſt. Hiernach beſtimmen wir das erſte Geſchlecht der Flächen der 2ten Ordnung, auf die Art daß wir dazu alle Flächen rechnen, die ſich nicht ohne Ende fort verbreiten, ſondern in einem endlichen Raume enthalten ſind. Zu dieſem Geſchlechte gehört daher die Kugel, deren Gleichung

$$zz + yy + xx + aa$$

iſt. Denn da hier $\alpha = 1$; $\delta = 1$; $\zeta = 1$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$; $\varepsilon = 0$ iſt; ſo geſchieht dadurch allen vier gefundenen Bedingungen ein Gnüge. Allgemeiner aber kann man hieher die Gleichung

$$\alpha zz + \delta yy + \zeta xx = aa$$

rechnen, welche, wenn α, δ und ζ poſitive Größen ſind, allemahl einer begränzten Fläche zugehört, wofern nicht ein oder zwey Coefficienten verſchwinden.

26. Hat man ſich von der Richtigkeit dieſer vier Bedingungen, wodurch eine Fläche zu einer begränzten wird, überzeugt, ſo iſt es, wenn eine Fläche gegeben iſt, leicht zu beſtimmen, ob dieſe Fläche ohne Ende ſich erſtreckende Theile haben werde oder nicht. Fehlt nähmlich eine von dieſen Bedingungen, ſo hat ſie gewiß dergleichen. In dieſem Falle werden aber einige Unter-

terabtheilungen nothwendig, um die ohne Ende ſich erſtreckenden Theile von einander zu unterſcheiden. Die erſte Unterabtheilung wird alſo ſeyn

wenn $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ größer als $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$

iſt, in welchem Falle die Fläche ſich ohne Ende fort verbreiten, und eine coniſche Fläche zur Aſymptote haben wird, wie bereits gezeigt worden iſt. Dieſer Fall ſteht dem vorhergehenden gerade entgegen, in welchem die Fläche in einem endlichen Raume enthalten war.

27. Außerdem giebt es gewiſſe Zwiſchenfälle, wo die Fläche, ob ſie ſich gleich ohne Ende verbreitet, zwiſchen jenen auf ähnliche Art enthalten iſt, wie die Parabel zwiſchen der Ellipſe und Hyperbel. Dieſer Fall entſteht, wenn

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 \; \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\delta\zeta$$

und alſo

$$\alpha z = -\beta\gamma - \gamma x + y\sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\delta)} + x\sqrt{(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}$$

iſt. Es hat alſo die Gleichung für die Aſymptote

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$$

zwey einfache Faktoren, die entweder reell, oder imaginär, oder einander gleich ſeyn werden. Dieſe dreyfache Verſchiedenheit giebt drey Geſchlechter der Flächen, die ſich ohne Ende verbreiten, und ſo haben wir überhaupt fünf Geſchlechter der Flächen der zweyten Ordnung erhalten, welche wir nun genauer unterſuchen wollen.

28. Da die allgemeine Gleichung durch die Veränderung der drey Axen, welchen die Coordinaten parallel ſind, auf eine einfachere Form gebracht wird, ſo wollen wir uns dieſer Reduktion auf die Art bedienen, daß wir die Gleichung auf eine einfachere Form bringen, ohne ihren Umfang einzuſchränken. Da alſo die allgemeine Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung folgende iſt:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0$$

ſo wollen wir eine Gleichung zwiſchen drey andern Coordinaten p, q und r ſuchen, welche ſich in eben dem Punkte ſchneiden, in welchen die drey vorigen es thaten. Zu dieſer Abſicht ſetze man aus

$$x = p\,(\cos K.\cos m - \sin K.\sin m.\cos n) + q\,(\cos K.\sin m + \sin K.\cos m.\cos n) - r.\sin K.\sin n$$

$$y = -p\,(\cos K.\cos m + \cos K.\sin m.\cos n) - q\,(\sin K.\sin m - \cos K.\cos m.\cos n) - r.\cos K.\sin n$$

und $z = -p\sin m.\sin n + q.\cos m.\sin n + r.\cos n$

wodurch man die Gleichung erhält

$$App + Bqq + Crr + Dpq + Epr + Eqr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = 0$$

29. Nun laſſen ſich die willkührlichen Größen K, m und n ſo beſtimmen, daß die drey Coefficienten D, C und F verſchwinden. Denn obgleich die Rechnung zu weitläuftig iſt, als daß dieſe Beſtimmung jener Winkel hier wirklich gezeigt werden könnte, ſo muß doch der, der daran zweifeln wollte, daß die Elimination jener Coefficienten allemal zu reellen Werthen der Winkel führe, zugeben, daß wenigſtens zwey Coefficienten D und C Null gleich gemacht werden können. Iſt aber dieſes geſchehen, ſo kann die Lage der dritten Axe, welcher die Ordinaten r parallel ſind, in der Ordinate p parallelen Ebene leicht ſo verändert werden, daß auch der Coefficient F verſchwindet. Denn man ſetze

$q = t.\sin i + u.\cos i$; und $r = t.\cos i - u.\sin i$

ſo daß ſtatt des Gliedes qr das neue Glied tu eingeführt werde: ſo kann deſ-

ſen

ſen Coefficient vermöge des Winkels i gleich Null gemacht werden. Auf dieſe Art erhält die allgemeine Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung folgende Form:

$$App + Bqq + Crr + Gp + Hq + Ir + K = o.$$

30. Ferner laſſen ſich die Coordinaten durch beſtändige Größen ſo vermehren oder vermindern, daß die Coefficienten G, H und I verſchwinden, und zwar wird dazu bloß die Veränderung des Anfangspunktes aller Coordinaten erfordert. Auf dieſe Art laſſen ſich alle Flächen der zweyten Ordnung in folgende Gleichung zuſammenfaſſen:

$$App + Bqq + Crr + K = o$$

woraus erhellet, daß jede der drey durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegten Hauptebenen die Fläche in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt. Es hat daher jede Fläche der zweyten Ordnung nicht nur eine, ſondern ſelbſt drey Diametral-Ebenen, welche ſich in demſelben Punkte durchkreuzen, ſo daß daher auch dieſer Punkt ein Mittelpunkt der Fläche wird, ob er gleich in einigen Fällen unendlich weit entfernt iſt. Man legt nähmlich der Fläche auf ähnliche Art einen Mittelpunkt bey, als man ſolches bey den Kegelſchnitten thut, ob derſelbe gleich bey der Parabel unendlich weit entfernt iſt.

31. Hat man alſo die allgemeine Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung auf die einfachſte Form gebracht, ſo bietet die Gleichung

$$App + Bqq + Crr = aa$$

das erſte Geſchlecht dieſer Flächen dar, wenn alle drey Coefficienten A, B und C poſitiv ſind; und die Flächen, welche zu dieſem Geſchlechte gehören, ſind daher nicht nur ganz in einem endlichen Raume enthalten, ſondern ſie haben auch insgeſammt einen Mittelpunkt, in welchem ſich die drey Diametral-Ebnen unter rechten Winkeln ſchneiden. Es ſey, Fig 1288, C der Mittelpunkt dieſer Figur, und CA, CB, CD die auf einander ſenkrechten Hauptaxen, welchen die Coordinaten p, q und r parallel ſind: ſo ſind die drey Diametral-Ebnen ABab, ADa und BDb, und durch dieſelben wird dieſer Körper in je zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt.

32. Man ſetze $r = o$, ſo druckt die Gleichung $App + Bqq = aa$ die Natur des Hauptſchnittes ABab aus, der alſo eine Ellipſe ſeyn wird, welche den Mittelpunkt in C, und die Halbaxen $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$, und $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$ hat. Setzt man $q = o$, ſo gehört die Gleichung $App + Crr = aa$ dem Hauptſchnitte ADa zu, der alſo ebenfalls eine Ellipſe iſt, welche den Mittelpunkt in C hat, und deren Halbaxen $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$, und $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$ ſind. Setzt man endlich $p = o$, ſo bekommt man für den dritten Hauptſchnitt BDb die Gleichung $Bqq + Crr = aa$, der daher auch eine Ellipſe iſt, deren Mittelpunkt in C liegt, und deren Halbaxen $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$, und $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$ ſind. Kennt man aber dieſe drey Hauptſchnitte, oder bloß ihre Hauptaxen $CA = \frac{a}{\sqrt{A}}$; $CB = \frac{a}{\sqrt{B}}$, und $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$: ſo iſt dadurch auch die Natur dieſes Körpers bekannt. Da die drey Hauptſchnitte dieſes erſten Geſchlechts der Flä-

Flächen der zweyten Ordnung Ellipſen ſind, ſo kann man dieſe Flächen Ellipſoiden nennen.

33. Zu dieſem Geſchlechte gehören drey Arten, die vor andern zu merken ſind. Die erſte iſt, wenn alle drey Hauptaxen CA, CB und CD einander gleich ſind. In dieſem Falle gehen die gedachten Hauptſchnitte in Kreiſe, und der Körper in eine Kugel über, deren Gleichung, wie wir oben geſehen haben, $pp + qq + rr = aa$ iſt. Die zweyte Art begreift die Fälle unter ſich, wo zwey Hauptaxen einander gleich ſind. Es ſey nähmlich $CD = CB$, oder $C = B$, ſo wird der Schnitt BDb ein Kreis, und aus der Gleichung $App + B(qq + rr) = aa$ erhellet, daß alle dieſem parallele Schnitte ebenfalls Kreiſe ſeyn werden. Es wird daher dieſer Körper ein längliches Sphäroid, wenn AC größer als BC, und ein zuſammengedrucktes, wenn AC kleiner als BC. Die dritte Art begreift endlich die Körper unter ſich, wo die drey Coefficienten A, B und C ungleich ſind, und dieſe behalten den allgemeinen Nahmen der Elliptoiden.

34. Die folgenden Geſchlechter der Flächen der zweyten Ordnung ſind in dieſer Gleichung enthalten:

$$App + Bqq + Crr = aa,$$

und zwar zuvörderſt, wenn von den Coefficienten A, B und C gar keiner fehlt, und entweder einer oder zwey negativ ſind. Es ſey bloß der eine von ihnen negativ, wobey wir folgende Gleichung

$App + Bqq - Crr = aa$ betrachten wollen, bey welcher wir annehmen, daß A, B und C poſitive Größen bedeuten. Was den Mittelpunkt dieſes Körpers, und ſeine Diametral-Ebnen betrifft, ſo verhält es ſich damit eben ſo wie vorhin. Es erhellet alſo, daß der erſte Hauptſchnitt dieſes Körpers ABab, Fig 1289, eine Ellipſe iſt, deren Halbaxen $AC = \frac{a}{\sqrt{A}}$, und $BC = \frac{a}{\sqrt{B}}$ ſind. Die beyden übrigen Hauptſchnitte Aq und BS aber ſind Hyperbeln, welche den Mittelpunkt in C, und die halbe zugehörige Axe $= \frac{a}{\sqrt{C}}$ haben.

35. Es ſtellt alſo die Fläche einen Trichter vor, der oben und unten nach Hyperbeln abweicht, und es hat daher dieſelbe einen Kegel zur Aſymptote, welcher durch die Gleichung $App + Bqq - Crr = 0$ ausgedruckt wird, den Scheitel in dem Mittelpunkte C hat, und deſſen Seiten die Aſymptoten der Hyperbeln ſind. Es ſteht aber dieſer Aſymptoten-Kegel zwiſchen der Fläche, und iſt ein gerader, wenn $A = B$, und ein ſchiefer, wenn A nicht $= B$ iſt. Die Axe deſſelben iſt die gerade auf der Ebene ABa ſenkrechte Linie CD. Uebrigens ſind alle der Axe CD ſenkrechte Schnitte Ellipſen, welche der Ellipſe ABab ähnlich ſind, ſo wie hingegen die, welche auf der Ebene ABab ſenkrecht ſind, Hyperbeln; daher man auch dieſe Flächen elliptiſch hyperboliſche nennen kann, welche ihren Aſymptoten Kegel umgeben. Dieſe Flächen machen alſo unſer zweytes Geſchlecht aus.

36. Bey dieſem Geſchlechte können wieder drey Arten von einander unterſchieden werden Die erſte iſt diejenige, welche entſteht, wenn $a = 0$ iſt, in welchem Falle die Ellipſe ABab in einen Punkt verſchwindet, die Hyperbeln in gerade Linien übergehen, und die Fläche ſelbſt ganz mit ihrer Aſymptote

zuſammenfält. Es faßt daher dieſe erſte Art alle gerade ſowohl als ſchiefe Kegel unter ſich, worauf man eine neue Abtheilung gründen könnte. Die zweyte Art ergiebt ſich, wenn $A = B$ wird, in welchem Falle die Ellipſe ABab in einen Kreis übergeht, und die Fläche ſelbſt eine runde oder gedrehte Fläche wird. Es entſteht nähmlich dieſe Fläche, wenn ſich eine Hyperbel um ihre zugehörige Axe dreht. Die dritte Art kommt mit dem Geſchlechte ſelbſt überein.

37. Das dritte Geſchlecht wollen wir auf die Art beſtimmen, daß dabey zwey Coefficienten der Glieder pp, qq und rr negativ werden, und es iſt daher die Gleichung für dieſes Geſchlechts

$$App - Bqq - Crr = aa.$$

Setzt man alſo $r = 0$, ſo iſt der erſte Hauptſchnitt EAFeaf, Fig 1290, eine Hyperbel, welche den Mittelpunkt in C hat, und deren Halbaxen $\frac{a}{\sqrt{A}}$ und $\frac{a}{\sqrt{B}}$ ſind. Der andere Hauptſchnitt, welchen man erhält, wenn man $q = 0$ ſetzt, iſt gleichfalls eine Hyperbel AQ, aq, welche eben dieſelbe halbe Zwergaxe hat, deren zugehörige Halbaxe aber $= \frac{a}{\sqrt{C}}$ iſt. Der dritte Hauptſchnitt wird imaginär. Endlich liegt dieſe ganze Fläche zwiſchen der coniſchen Aſymptoten-Fläche, und man kann ſie daher die hyberboliſch-hyberboliſche nennen, welche in einem Aſymptoten-Kegel beſchrieben iſt. Wenn $B = C$ wird, ſo iſt die Fläche rund, denn ſie entſteht alsdann durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre Zwergaxe, woraus man eine beſondere Art machen könnte. Wenn aber $a = 0$ geſetzt wird, ſo ergiebt ſich eine coniſche Fläche, welche wir bereits als eine Art des vorhergehenden Geſchlechts betrachtet haben.

38. Um die folgenden Geſchlechter kennen zu lernen, wollen wir annehmen, daß einer von den Coefficienten A, B und C verſchwinde. Es ſey alſo $C = 0$, ſo iſt die (29) gefundene allgemeine Gleichung

$$App + Bqq + Gp + Hq + Ir + K = 0$$

aus welcher man durch Vergrößerung oder Verkleinerung der Ordinaten p und q zwar die Glieder Gp and Hq, aber nicht Ir wegſchaffen kann. Es bleibt alſo das Glied Ir in der Gleichung zurück; allein man kann vermittelſt desſelben das letzte Glied K wegbringen, und wir haben daher die Gleichung

$$App + Bqq = rr$$

wobey zwey Fälle zu erwägen ſind. Der erſte findet ſtatt, wenn beyde Coefficienten A und B poſitiv ſind; der andere, wenn der eine davon negativ iſt. In beyden Fällen iſt der Mittelpunkt der Fläche in der Axe CD befindlich, aber unendlich weit entfernt.

39. Es ſeyen zuvörderſt beyde Coefficienten A und B poſitiv, ſo bekommt man das vierte Geſchlecht, welches durch dieſe Gleichung

$$App + Bqq = ar$$

ausgedruckt wird. Der erſte Hauptſchnitt, welcher entſteht, wenn man $r = 0$ ſetzt, verſchwindet demnach in einen Punkt, der andere und dritte, wovon jener entſteht, wenn man $p = 0$, und dieſer, wenn man $q = 0$ ſetzt, ſind beyde Parabeln, nähmlich MAm und NAn, Fig 1291. Da alſo bey dieſer Fläche alle auf der Axe AD ſenkrechte Schnitte Ellipſen, die Schnitte aber, welche durch die Axe gehen, Parabeln ſind; ſo wollen wir die Körper dieſes Geſchlechtes elliptiſch-paraboliſche Körper nennen. Es giebt davon

zwey Arten; die eine findet ſtatt, wenn $A = B$ iſt, in welchem Falle der Körper ein runder Körper wird, und kegelförmig-paraboliſch heißt, die andere entſteht, wenn $a = 0$ iſt, und $App + Bqq = bb$ wird. Dieſe Art giebt Cylinder, ſowohl gerade, wenn $A = B$, als ſchiefe, wenn A nicht $= B$ iſt.

40. Das fünfte Geſchlecht iſt in der Gleichung

$$App - Bqq = ar$$

enthalten, und ſein erſter Hauptſchnitt, wenn $r = 0$ wird, ſind zwey gerade Linien Ee und Ff, welche ſich in dem Punkte A ſchneiden. Alle Schnitte, welche dieſem parallel ſind, ſind Hyperbeln, welche ihre Mittelpunkte in der Axe AD haben, und zwiſchen den Aſymptoten Ee und Ff liegen. Die beyden Ebenen, welche auf der Ebene ABC in den Linien Ee und Ff ſenkrecht ſtehen, fallen im Unendlichen mit der gegebenen Fläche zuſammen, und es hat daher dieſe Fläche zwey ſich ſchneidende Ebenen zu Aſymptoten. Die übrigen Hauptſchnitte ſind Parabeln, und man kann daher die zu dieſem Geſchlechte gehörigen Flächen paraboliſch-hyperboliſche nennen, die zwey Ebenen zu Aſymptoten haben. Eine Art davon (wenn $a = 0$ wird, ſo daß $App - Bqq = bb$ iſt) iſt der hyperboliſche Cylinder, deſſen auf der Axe AD ſenkrechte Schnitte insgeſammt unter einander gleiche Hyperbeln ſind. Iſt überdem $b = 0$, ſo entſtehen die beyden Aſymptoten-Ebenen.

41. Das ſechſte Geſchlecht der Flächen der zweyten Ordnung endlich iſt in der Gleichung enthalten:

$$App = aq$$

und dieſe giebt einen paraboliſchen Cylinder, deſſen auf der Axe AB ſenkrechte Schnitte insgeſamt einander ähnliche und gleiche Parabeln ſind, ſo daß die Scheitel derſelben in die gerade Linie AD fallen, und die Axen einander parallel ſind. Auf dieſe ſechs Geſchlechter laſſen ſich alſo alle Flächen der zweyten Ordnung zurückführen, ſo daß keine angegeben werden kann, die nicht darunter begriffen wäre. Wenn übrigens in dem letzten Geſchlechte $a = 0$, und alſo $App = bb$ iſt, ſo giebt dieſe Gleichung zwey einander parallele Ebenen, die gleichſam eine Art dieſes Geſchlechtes ausmachen. Es findet hier etwas ähnliches ſtatt, wie bey den Linien der zweyten Ordnung, wo zwey ſich ſchneidende gerade Linien als eine Art der Hyperbel, zwey parallelle Linien aber als eine Art von Parabel betrachtet werden können.

42. Ob wir gleich dieſe ſechs Arten aus der einfachſten Gleichung abgeleitet haben, auf welche ſich die Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung zurückführen läßt, ſo iſt es nunmehr dennoch leicht, bey jeder gegebenen Gleichung des zweyten Grades das Geſchlecht anzuzeigen, zu welchem die Fläche gehört. Iſt nähmlich die Gleichung

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon zy + \zeta xx + \eta z + \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0:$$

ſo muß man nach den höchſten Gliedern, worin zwey Dimenſionen der veränderlichen Größen vorkommen, urtheilen, und alſo folgende Glieder betrachten,

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx.$$

Iſt darin $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$, und

$$\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta \text{ kleiner als } \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

ſo iſt die Fläche in einem endlichen Raume enthalten, und gehört zu dem erſten Geſchlechte der Elliptoiden.

43. Wenn eine oder mehrere von dieſen Bedingungen fehlen, und gleichwohl nicht $\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$ iſt, ſo gehört die Fläche entweder zum zweyten oder zum dritten Geſchlechte, und iſt eine hyperboliſche Oberfläche, die einen Kegel zur Aſymptote hat, und entweder um denſelben, wie beym zweyten, oder in demſelben beſchrieben iſt, wie beym dritten Geſchlechte. Wenn aber $\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$ iſt, ſo kann der Ausdruck

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx$$

in zwey einfache, reelle oder imaginäre Faktoren aufgelöſet werden. Im erſten Falle gehört die Fläche zu dem vierten, im andern zu dem fünften Geſchlechte. Auf dieſe Art kann man ſogleich beurtheilen, zu was für einem Geſchlechte eine Fläche gehöre, und es findet ſich bloß bey dem zweyten und dritten einige Schwierigkeit, daher man auch beyde in eins zuſammenfaſſen könnte.

44. Auf ähnliche Art laſſen ſich die Flächen der dritten und der folgenden Ordnungen behandeln und in Geſchlechter eintheilen. Man braucht nähmlich bloß die höchſten Glieder der Gleichungen in Erwägung zu ziehen, d. h. bey den Flächen der dritten Ordnung diejenigen, worin die Coordinaten drey Dimenſionen haben, und welche alſo ſind:

$$\alpha z^3 + \beta yz^2 + \gamma y^2 z + \delta x^2 z + \varepsilon xz^2 + \zeta xyz + \text{etc.}$$

Zuvörderſt muß man alſo überlegen, ob dieſe Glieder zuſammen genommen, oder das höchſte Glied der Gleichung in einfache Faktoren aufgelöſet werden kann oder nicht. Wenn dieſe Auflöſung nicht ſtatt findet, ſo hat die Fläche einen Kegel der dritten Ordnung zur Aſymptote. Da aber die Natur dieſes Kegels durch das höchſte Glied ausgedruckt wird, wenn man daſſelbe $= 0$ ſetzt, ſo giebt es mehrere dergleichen Kegel der dritten Ordnung, nach deren Verſchiedenheit mehrere Geſchlechter von Flächen entſtehen. Denn obgleich alle Kegel der zweyten Ordnung zu einem Geſchlechte gerechnet werden, indem ſie entweder gerade oder ſchief ſind, ſo findet doch bey der dritten Ordnung eine weit größere Mannichfaltigkeit ſtatt.

45. Nachdem dieſe Geſchlechter aus einander geſetzt ſind, muß man die Fälle betrachten, wo das höchſte Glied in einfache Faktoren, und zwar entweder in reelle oder in imaginäre aufgelöſet werden kann. Es habe daſſelbe zuvörderſt einen und zwar reellen Faktor, ſo hat die Fläche eine ebene Aſymptote. Der andere Faktor giebt, wenn man ihn $= 0$ ſetzt, entweder eine mögliche oder eine unmögliche Gleichung, und es giebt daher entweder eine einzige ebene Aſymptote, oder die Fläche hat zwey Aſymptoten, eine ebene, und einen Kegel der zweyten Ordnung. Sind drey Faktoren einfach, ſo ſind, weil darunter allemahl ein reeller iſt, die beyden übrigen entweder ebenfalls reell oder imaginär, und daher entſpringen wieder zwey neue Geſchlechter. Endlich ergeben ſich, wenn alle drey einfache Faktoren reell ſind, noch daher zwey Geſchlechter, ob davon zwey, oder ob alle drey einander gleich ſind. Zu dieſer Ordnung gehört übrigens keine Fläche, die ſich nicht ohne Ende fort verbreitete.

Eulers Analyſis des Unendl. II. Buch IV. V. K. S. 534. . .

Fläche algebraiſche, ſiehe Fläche 7.

Fläche continuirliche, ſiehe Fläche 6.

Fläche ebene, ſuperficies plana iſt diejenige, in der man durch jede zwey nach Belieben angenommene Punkte eine gerade Linie ziehen kann.

Fläche gebrochne heißt eine ſolche, die aus ebenen Flächen, welche ſich unter gewiſſen Winkeln ſchneiden, zuſammengeſetzt iſt; wie z. B. die Ebene eines eckichten Körpers.

Fläche hohle, ſ. d.

Fläche horizontale, ſiehe Horizontalfläche.

Fläche irreguläre, ſiehe Fläche 6.

Fläche krumme, ſiehe krumme Fläche.

Fläche transcendentiſche, ſiehe Fläche 7.

Fläche, Vertical, Planum verticale wird diejenige genennt, welche auf dem Horizont perpendikulär ſtehet. Sie auf dem Felde abzuſtecken, ſiehe: Linie, gerade auf dem Felde abzuſtecken.

Von ihrem Gebrauche in der praktiſchen Geometrie, ſiehe Linien vertikale, Gebrauch ꝛc.

Fläche berechnen oder ihren Inhalt ſuchen, heißt, aus einigen auf der Fläche gemeſſenen, und in Zahlen angegebenen Linien eine Zahl finden, welche ausdrückt, wie viel Quadratruthen, Quadratfuße u. ſ. w. in der ausgemeſſenen Fläche enthalten ſind.

Flächen auf dem Felde auszumeſſen, ſiehe Feld zu meſſen.

Flächen der erſten und zweyten Ordnung, ſiehe Fläche II.

Flächen, coniſche Aſymptotenflächen, ſiehe Flächen II. (21.)

Flächen paraboliſch-hyperboliſche, ſiehe Flächen II. (40)

Flächen trinomiſche, ſ. d.

Flächen-Inhalt heißt die Größe der Fläche in Zahlen nach Quadratmaße ausgedruckt.

Flächen-Inhalt berechnen, ſiehe Fläche berechnen.

Flächen-Inhalt der Felder zu berechnen, ſiehe Ländereyen, Flächen-Inhalt derſelben zu beſtimmen.

Flächen-Inhalt der krummen Linien, ſiehe Quadratur der krummen Linien.

Flächen-Maß.

1. Das Maß einer Fläche iſt eine Fläche. Man wählt hierzu das Quadrat, und nennet Quadratruthe, Quadratfuß, Quadratzoll u. ſ. w. je nachdem eine Seite eine Ruthe, einen Fuß oder einen Zoll lang iſt. Jedes dieſer Quadrate wird entweder in 100 oder 144 gleiche Theile eingetheilt, je nachdem ſeine Seite entweder in 10 oder 12 gleiche Theile getheilt iſt. Fig 1581.

Ein Quadrat AC, deſſen Seite = 5, in dem die Seite des Quadrats AE = 1 iſt, würde offenbar 5. 5 oder 25 ſolcher Quadrate als AE iſt enthalten, weil $AE : AC = AF^2 : AB^2 = 1^2 : 5^2 = 1 : 25$: Folglich würde ein Quadrat, deſſen Seite = 10 iſt, 100, und ein Quadrat deſſen Seite = 12 iſt, 144 ſolcher kleinen Quadrate enthalten.

Die Bequemlichkeit des Decimallängenmaßes (ſ. d.) findet auch bey dem Quadratmaße ſtatt. Denn da $1F^2 = \frac{1}{100} R^2$, $1Z^2 = \frac{1}{10000} R^2$ u. ſ. w. wenn R die Ruthe, F den Fuß, und Z den Zoll u. ſ. w. bedeutet: ſo kann man ſtatt 37° 24′ 36″ 45‴ auch ſchreiben 37, 243645 Ruthen oder 3724, 3645 Fuß oder 372436, 45 Zoll, oder 37243645 Linien.

Wenn

Wenn das Verhältniß zweyer Quadratfuße $A^2 : B^2$ gegeben iſt, jede Anzahl von Quadratfußen n nach dem erſten Maße, in die zugehörige Zahl x, nach dem andern Maße, zu verwandeln.

Hier iſt offenbahr $B^2 : A^2 = n : x$ folglich $\log x = \log n + 2 \log \frac{A}{B}$. Z. B. 1000 pariſer Quadratfuße, wie viel Rheinländiſche? wo

$$\log x = \log 1000 + 2 \log \frac{14400}{13913}.$$

Das geometriſche Quadratmaß in das Werkmaß zu verwandeln.

Nimmt man hier den Fuß von gleicher Größe an: ſo iſt

$1 \square$ Fuß $= 100\, z^2 = 144\, z^2$

$1 \square$ Fuß $= 10000\, L^2 = 20736\, l^2$

$1 \square$ Fuß $= 1000000\, S^2 = 2985984\, \text{ſ}^2$.

Demnach iſt

1) $100\, z^2 = 144 z^2$, folglich $z^2 = \frac{144}{100} z^2 = z^2 + \frac{44}{100} z^2$. Nun iſt $z^2 = 144\, l^2$, und daher $\frac{40}{100} z^2 = \frac{6336}{100} l^2 = 63 l^2 + \frac{36}{100} l^2$. Folglich $z^2 = z^2 + 63 l^2 + \frac{36}{100} l^2$. Nun iſt $l^2 = 144\, \text{ſ}^2$ und daher $\frac{36}{100} l^2 = \frac{5184}{100} \text{ſ}^2 = 51,84\, \text{ſ}^2$. Folglich iſt

$z^2 = z^2 + 63 l^2 + 51,84\, \text{ſ}^2$.

2) $10000\, L^2 = 20736\, l^2$, folglich $L^2 = \frac{20736}{10000} l^2 = 2 l^2 + \frac{736}{10000} l^2$.

Nun iſt $= \frac{736}{10000} l^2 = \frac{105984}{10000} \text{ſ}^2 = 10,5984\, \text{ſ}^2$.

Folglich $L^2 = 2 l^2 + 10,5984\, \text{ſ}^2$.

3) $1000000\, S^2 = 2985984\, \text{ſ}^2$

folglich $S^2 = 2,985984 \text{ſ}^2$.

Wenn die großen Buchſtaben zum Decimal- die kleinen zum Duodecimalmaße gehören.

Sollte man hiernach $4Z^2 + 9L^2 + 20S^2$ auf Duodecimalmaß bringen: ſo iſt

$$
\begin{array}{lcl}
4Z^2 = (z^2 + 63 l^2 + 51,84 \text{ſ}^2).\,4 & = & 4z^2 + 252 l^2 + 209,32 \text{ſ}^2 \\
9L^2 = (2 l^2 + 10,5984 \text{ſ}^2).\,9 & = & 18 l^2 + 95,38 \text{ſ}^2 \\
20S^2 = (2,985984 \text{ſ}^2).\,20 & = & 59,71 \text{ſ}^2 \\
\hline
4Z^2 + 9L^2 + 20S^2 & = & 4z^2 + 270 l^2 + 362,41 \text{ſ}^2 \\
\text{welches gehörig reducirt} & = & 5z^2 + 128 l^2 + 74,41 \text{ſ}^2.
\end{array}
$$

Das quadratiſche Werkmaß in das geometriſche zu verwandeln. Es iſt

1) $144 z^2 = 100 Z^2$, folglich $z^2 = \frac{100}{144} Z^2 = 0,694444 Z^2$.

2) $20736 l^2 = 10000 L^2$; folglich $L^2 = 0,48..''' = 0,0048..''$

3) $2985984 \text{ſ}^2 = 1000000 \text{ſ}^2$

folglich $\text{ſ}^2 = \frac{1000000}{2985984} \text{ſ}^2 = 0,33^{IV} = 0,000033''$.

Hiernach iſt die Verwandlung leicht geſchehn.

Siehe auch Ackermaß.

Irwinn (Joh.) Schreiben von den verſchiedenen Ausmeſſungen der Ländereyen in Irrland, England und Frankreich; im 2ten Bande des überſetzten Muſeum ruſticum et comm. Leipzig 1765. 8. St. 132.

I. D. Titius — Prg. de linearum atque ſuperficierum ortu naturali et menſura. Wittenb. 1790. 4.

Wahl Pr. über das geometriſche Flächen-Maß, Göttingen 1791. 4.

Flächenriß zu verfertigen (Markſcheider.)

1. Es ſey AB. Fig 1146 eine gerade Linie auf der Ebne GH eines Ganges oder Flözes, EF deſſen Streichlinie durch der AB Anfangspunkt A, und AF der öſtliche Theil dieſer Streichlinie, welcher aber der nördliche ſey, wenn EF in ihrem Streichen mit der Mittags oder Magnetlinie übereinkömmt: ſo iſt der Winkel BAF die Lage der AB gegen die Streichlinie EF.

2. Dieſe Lage zu finden.

Auflöſung. 1) Hierzu muß man das Streichen und Fallen der Ebene des Ganges oder Flözes wiſſen, wozu die Streichlinie EF gehöret; anbey auch das Streichen oder Fallen der auf der Ebene genannter Lagerſtätte gezogenen geraden Linie AB.

Dies vorausgeſetzt hat man zweyerley Auflöſungen.

Erſte: 2) Aus dem Streichen des Ganges oder Flözes GH und der Linie AB, ſuche man den ſöhligen Winkel, den die Streichlinie AF mit der Sohle AC der AB macht.

3) Nehmet den Tafellogarithmus, ſowohl die Cotangente dieſes Winkels (2) als des Coſinus des Fallens der Ganges- oder Flözesebene GH.

4) Addirt dieſe beyden Logarithmen;

5) Ziehet von dieſer Summe 10 ab,

6) Die Differenz iſt der Tafellogarithme, der Cotangente eines Winkels, welcher der verlangten Lage gleichet.

Zweyte Aufl. 7) Man addire 10 zum Tafellogarithmen des Sinus des Neigungswinkels BAC der AB;

8) Und ziehe ab von der Summe den Tafellogarithmen des Sinus der Neigung der Ganges- oder Flözesebene:

9) So erhält man den Tafellogarithmen des Sinus eines Winkels, welcher der verlangten Lage BAF gleich iſt.

In Formeln. 10) Iſt der in (2) gefundene ſöhlige Winkel = δ, der Ganges- oder Flözesebene Streichen = ϕ, der AB Neigungswinkel = ψ und der zu ſuchende Winkel BAF = η; ſo iſt für den ſinus totus = 1

11) $\cot\eta = \cot\delta \times \cos\phi$;

12) $\sin\eta = \dfrac{\sin\psi}{\sin\phi}$

in Logarithmen.

13) $\log\cot\eta = \log\cot\delta + \log\cos\phi$

14) $\log\sin\eta = \log\sin\psi - \log\sin\phi$.

3. Zu beurtheilen, ob der Winkel BAF = η, ſtumpf oder ſpitzig iſt, muß man ſich der erſten Auflöſung oder der Formeln in 9) und 13) vorigen § 2 bedienen, dann aber Acht haben, ob δ (§ 2 in 10) ſtumpf oder ſpitzig iſt.

Denn iſt der Winkel δ ſtumpf, ſo iſt es auch der Winkel η; und wenn δ ſpitzig iſt, ſo muß man auch η ſpitzig nehmen.

4. Einer Linie AB Lage gegen die durch ihren Anfangspunkt A gehende Streichlinie EF iſt poſitiv, wenn AB ſteigt, und alſo auf der Seite der EF lieget,

wo-

wohin zu der Gang oder das Flöz aufſteiget; hingegen iſt der AB Lage gegen EF oder η negativ, wenn AB fällt, und alſo ſich von A aus nach der Gegend des Ganges oder Flözes Fallen zu erſtreckt.

5. Bey einem rechtfallenden ſtehenden und Morgengange, liegt AB dem öſtlichen Theile AF der Streichlinie EF zur Rechten wenn AB ſteigt, aber zur linken in ſofern AB fällt.

2) Fallen erwähnte Gänge widerſinnig: ſo liegt die ſteigende AB rechter Hand, und die fallende linker Hand des öſtlichen Theiles der Streichlinie EF.

3) Bey einem gegen Mittag fallenden Spatgange und gegen Abend fallenden flachen Gange liegt AB gegen AF wie im 2ten Abſatze.

4) Aber wie im erſten, wenn ſich erwähnte Gänge, in ihrem Fallen entgegengeſetzt verhalten.

5) Bey Flözen, die zwiſchen 12^h und 0^h und 6^h ſtreichen, findet der erſte Abſatz ſtatt, wenn ſie gegen Abend oder Mitternacht-Abend fallen; aber der zweyte, ſofern dieſer Flöze Verflächung gegen Morgen oder Mittag-Morgen geſchiehet.

6) Auf Flöze, die zwiſchen 6^h und 12^h oder 0^h ſtreichen, läßt ſich der 3te Abſatz anwenden, wenn ſie nach den daſelbſt genannten Weltgegenden ihre Donlege nehmen; aber der 4te, in ſofern ſie entgegen geſetztes Fallen haben.

6. Auf eines Ganges oder Flözes Ebne GH, deren Streichen β und Fallen φ bekannt iſt, ſind zwey Punkte A und B gegeben.

Man ſoll dieſe auf dem Papiere nach ihrer wahren Lage und ihrem wahren Abſtande von einander verzeichnen; nähmlich ſo, daß auf dem Papiere B gegen A eben die Lage hat, als auf des Ganges- oder Flözes Ebne GH, und B von A nach dem verjüngten Maßſtabe eben ſo weit entfernt iſt, als B von A auf GH nach dem wirklichen.

Aufl. 1) Man nehme einen von dieſen Punkten, A z. E. zum Anhaltpunkte an, und verrichte von demſelben bis B einen Zug, dadurch findet ſich der AB Größe, Streichen und Fallen.

2) Nun ſuche man nach (§ 2. und 3.) der AB Lage gegen die durch A laufende Streichlinie EF des Ganges- oder Flözesebne GH.

3) Ziehe auf dem Papiere eine gerade Linie ef, Fig 1147, die die Streichlinie EF auf GH vorſtellet; nehme in ef einen Punkt a an, der den Anfangspunkt A, und af den öſtlichen Theile der EF abgiebt. Setze an dieſen (a) eine Linie ab die mit ef einen Winkel baf macht, welcher der nach (2) gefundenen Lage der AB gegen EF gleich iſt; ob aber dieſe ab zur rechten oder linken der af kommen muß, entſcheidet ſich nach (§ 5). Mache endlich ab der AB gemäß, ſo iſt geſchehen was man verlangt.

7. A′ B′ C′ D′. . . Fig 1148 ſind auf eines Ganges- oder Flözes Ebne GH gegebene Punkte; man ſoll dieſe auf dem Papiere nach ihrer wahren Lage und ihrem Abſtande zeichnen.

Aufl. Man verrichte von A′ durch B′, C′, D′, u. ſ. w. einen Zug; dadurch erhält man der A′B′, B′ C′, C′D′, ꝛc. Länge, Streichen, Fallen. Nun ſuche man nach (§ 2 und 3) jeder genannten Linie Lage gegen die durch ihren Anfangspunkt laufende Streichlinie der Ebne GH. Hierauf verzeichne nach (§ 6) die beyden Punkte A′ und B′, welche A und B in der 1149 Figur verzeichnet ſeyn mögen. Ziehet durch B eine Linie E′ F′ parallel mit der vorgebildeten durch A gehenden Streichlinie der GH, und finde BC, alſo auch C,

nach (§ 6.) eben ſo wie man B fand. Ziehet man ferner durch C eine Linie ef parallel mit EF oder E′ F′; ſo erhält man auf gleiche Art D. Und das nähmliche Verfahren bey den übrigen Punkten beobachtet, giebt das Verlangte.

8. Wenn man ſo (§ 7.) viel Gränzpunkte der auf einem Gange oder Flöze geführten Baue verzeichnet: ſo macht man von ſelben einen Flächenriß.

9. Der Bergmeiſter Scheidhauer zu Freyberg iſt der erſte geweſen, der ſich des Worts: Flächenriß bedient hat. Die Art ſeines Verfahrens aber iſt von der hier beygebrachten verſchieden. Er bedient ſich dabey ähnlicher Hülfsmittel, wie beym Verzeichnen des Grundriſſes. Um darnach z. B. AB Fig 1150 in Flächenriß zu bringen, muß man eine Linie EF ziehen, welche die Streichlinie der Ebne GH vorſtellt; auf dieſer aus einem beliebigen Punkte A, das Stück AD = AB. Coſ η nehmen; aus D ein Perpendikel DB aufrichten, und dieſes = AB. ſin η nehmen, nachdem man η aus (§. 2) berechnet hat.

10. Aus (8) erhellet, daß auf einem Flächenriſſe die auf einem Gange oder Flöze verführten Baue nach ihrer wahren Lage und Länge dargeſtellt werden, dabey alle Linien, die auf der Ebene dieſes Ganges oder Flözes ſich befinden, zu verzeichnen ſind, z. B. Durchſchnitte überſetzter Gänge, Strecken, u. d. gl.

Das Papier aber, worauf eine ſolche Verzeichnung gemacht wird, ſiehet man als die Hauptebne des Ganges oder Flözes an.

11. Wenn Fig 1150 das Streichen einer auf der Ebne des Ganges oder Flözes GH, gezogenen Linie DB rechtwinklicht iſt: ſo hat dieſe DB gegen die Streichlinie EF erwähnter Ebne eine rechtwinklichte Lage, oder n (§. 2. in 10) 11)) wird in dieſem Falle = 90°, wie es auch ſeyn muß, weil ſo DB die Falllinie iſt.

Da nun die Richtung, in der Schächte auf einem Gange geſunken werden, mit der der Falllinie übereinkommt, ſo ſtehen alſo die Linien, durch die der Schacht angedeutet wird, auf der Streichlinie des Ganges ſenkrecht; auch der Durchſchnitt eines rechtwinklicht ſtreichenden und ſeiger fallenden Ganges; ingleichen die Falllinien der Ebnen der auf dem Gange vollführten Straßenbaues, Fürſtenbaues, Ueberhauen, Ueberſichbrechen. —

12. Die Lage der Linie der Sohle eines Stollens oder Strecke gegen die Streichlinie iſt, wenn man dieſe Sohle auf 100 Lachter, $\frac{1}{8}$ Lchtr anlaufen läßt,

$$\sin \eta = \frac{0,0012500}{\sin \phi}\text{; aber}$$

$$\sin \eta \text{ iſt } = \frac{0,0025000}{\sin \phi},$$

wenn das Anlaufen auf 100 Lchtr $\frac{1}{4}$ Lchtr iſt.

13. Auf einen Flächenriß kommen eigentlich nur die auf einem Gange oder Flöze befindlichen Baue, nach ihren wahren Verhältniſſen gegen einander, daher werden darauf nur die Linien und Punkte verzeichnet, die auf der Ebne des Ganges oder Flözes liegen, deſſen Bau man vorſtellen will. Zuweilen aber kann es auch zur Deutlichkeit der Abbildung nöthig ſeyn, Punkte, die außerhalb der Ebne liegen, mit auf den nähmlichen Flächenriß zu verzeichnen. Und dieſes ſoll in folgendem gelehrt werden.

14. Auf der Ebne GH. Fig 1151 eines Ganges oder Flözes, deſſen Streichen γ und Fallen ϕ bekannt, iſt ein Punkt A gegeben; außer dieſer Ebne aber ein Punkt B; man ſoll deſſen Entfernung BC von der Ebne GH finden.

Aufl. Erſter Fall. Wenn B in der Gegend des Hangenden oder des Daches liegt.

1) Iſt A tiefer als B; da ſuche man der AB Seigerteufe, Sohle und Streichen β; aus γ und β aber den ſöhligen Winkel μ, welcher der Ebne GH Streichlinie FP mit der AB Sohle macht. Und man hat

$$BC = \text{Sg AB. Cof } \phi - \text{S AB. fin } \mu\text{. fin } \phi.$$

2) Iſt B tiefer als A: ſo nimmt man Sgt BA und S. B A, das übrige wie vorhin, da man denn

$$BC = \text{Sg BA. Cof } \phi - \text{S. BA. fin } \mu\text{. fin } \phi$$ erhält.

Zweyter Fall. Wenn B in der Gegend des Liegenden oder der Sohle ſich befindet.

Da hat man für 1). 3) $BC = \text{S AB. fin } \mu \text{ fin } \phi - \text{Sg AB. Cof } \phi$ und für 2).

4) $BC = \text{S BA fin } \mu \text{ fin } \phi - \text{Sg BA. Cof } \phi$

15. Wenn man von A nach dem Punkte C, wo das von B auf die Ebne GH gefällte Loth eintrifft, eine gerade Linie AC ziehet: ſo iſt dieſe, der AB Projektion auf des Ganges oder Flözes Ebne GH.

16. Auf dieſe verzeichnet man eine Linie wie AB (12), wenn dieſer Projektion AC (15) darauf beſtimmt wird.

17. Dies geſchiehet, wenn man der AC (13) Lage CAF gegen die Streichlinie EF (1) und die Größe von AC beſtimmt.

18. Zu finden was (17) verlangt.

Aufl. Erſtlich den Winkel CAF.

Es ſey der AB Neigung $= \alpha$, der ſöhlige Winkel der AB Sohle mit der Streichlinie AF ſey μ, wie in (12). Nun ſuche man den Winkel BAF durch

$$\text{Cof BAF} = \text{cof } \mu\text{. Cof } \alpha.$$

Liegt B in der Gegend des Hangenden: ſo mache man

$$\frac{\text{AB. fin BAF}}{\text{Sg AB. Cot } \phi - \text{S AB. fin } \mu}$$

oder $$\frac{\text{AB. fin BAF}}{\text{Sg BA. Cot } \phi - \text{S BA. fin } \mu}$$

nach dem B höher oder tiefer als A (12. 1) 2)).

Befindet ſich aber B in der Gegend des Liegenden: ſo mache man

$$\frac{\text{AB. fin BAF}}{\text{S. AB. fin } \mu - \text{Sg AB. Cot } \phi}$$

oder $$\frac{\text{AB. fin BAF}}{\text{S BA. fin } \mu - \text{Sg BA. Cot } \phi}$$

nachdem B über oder unter A liegt.

Was man ſo erhält, ſehe man als einen Sinus für den Halbmeſſer = 1 an, und ſuche den ihm in den Tafeln zugehörigen Winkel, welcher = T ſeyn mag. Alsdenn findet ſich

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} \text{ CAF} = \frac{\text{fin } \frac{1}{2} (\phi + T)}{\text{fin } \frac{1}{2} (\phi - T)} \cdot \text{tg } \tfrac{1}{2} (\text{BAC} - \text{BAF})$$

Daraus aber $\frac{1}{2}$ CAF, und daraus 2. $\frac{1}{2}$ CAF = CAF.

Zweytens der Größe von AC. Da ſuche man den Winkel BAC durch

$$\sin BAC = \frac{BC}{AB}$$

und man erhält AC = AB Coſ BAC.

Will man die Quadratwurzel ausziehen ſo findet man

$$AC = \sqrt{(AB^2 - BC^2)}.$$

19. AC kömmt über oder unter EF zu liegen nachdem ſich AB über oder unter EF erſtreckt. Man kann dies auch aus (5) nach der AB Steigen oder Fallen und der Ebene GH Recht oder Widerſinnigfallen beurtheilen.

20. Auf einem Flächenriſſe die Kreuzlinie oder Durchſchnittslinie AB. Fig 1152. zu verzeichnen, die die Ebne MN eines überſetzten Ganges mit der GH des Ganges macht, deſſen Bau man auf den Flächenriß verzeichnet hat, oder noch darſtellen will, muß man den Winkel BAF wiſſen, den dieſe Kreuzlinie AB mit dem öſtlichen Theile AF der Streichlinie EF der Ebne GH begränzt; das heißt: man muß die Lage der Kreuzlinie AB gegen die Streichlinie der Ebne GH des aufgefahrnen Ganges beſtimmen.

21. Die Lage oder den Winkel BAF (20) zu finden.

Aufl. 1) In dieſer Rückſicht muß gegeben ſeyn a) das Streichen β und Fallen ϕ des aufgefahrnen Ganges, und b) das Streichen β' und Fallen ϕ' des überſetzten Ganges;

2) Aus dem Streichen beyder Gänge ſuchet man den ſöhligen Winkel μ ihrer Streichlinien.

3) Und dann findet ſich

$$\text{Cot } AAF = \frac{\sin \phi}{\text{tang } \phi' . \sin \mu} + \text{Cot } \mu . \text{ Coſ } \phi.$$

4) Will man hier die Logarithmen gebrauchen: ſo muß man durch Logarithmen erſtlich die Zahl $\frac{\sin \phi}{\text{tang } \phi' . \sin \mu}$ und dann die Cot μ. Cot ϕ finden, hernach aber beyde ſo gefundene Zahlen addiren, da die Summe die Cotangente von BAF für den ſinus totus = 1 ſeyn wird.

22. Iſt $\phi' = 90°$: ſo iſt Cot BAF = Cot μ. Coſ ϕ;

Für $\phi' = 90°$ iſt $\text{Cot } BAF = \frac{\text{Cot } \phi'}{\sin \mu} = \text{Cot } \phi' . \text{ Coſec } \mu.$

Wäre $\phi' = 45° = \phi$, ſo hat man

$$\text{Cot } BAF = \text{Coſ}\phi \left(\frac{1}{\sin \mu} - \text{Cot } \mu\right)$$

$$= \text{Coſ}\phi \left(\frac{1}{\sin \mu} - \frac{\text{coſ } \mu}{\sin \mu}\right)$$

$$= \text{Coſ}\phi \left(\frac{1 - \text{Coſin } \mu}{\sin \mu}\right)$$

$$= \text{Coſ}\phi \left(\frac{\sin \text{verſ } \mu}{\sin \mu}\right)$$

$$= \text{Coſ}\phi . \text{ tang } \tfrac{1}{2} \mu$$

$$= \text{Coſ } 45° \text{ tang } \tfrac{1}{2} \mu$$

Für $\mu = 90°$ oder $= 6^h$ erhält man

Cot

$$\mathrm{Cot\,BAF} = \frac{\sin\varphi}{\tang\varphi'}$$

und für $\mu = 45°$:

$$\mathrm{Cot\,BAF} = \frac{\sin\varphi}{\tang\varphi' . \sin 45°} + \mathrm{Cof}\,\varphi$$

$$= 0,14142136 . \frac{\sin\varphi}{\tang\varphi'} + \mathrm{Cof}\,\varphi$$

und für $\mu = 45° = \varphi = \varphi'$

$\mathrm{Cot\ BAF} = 0,7070068.$

alſo $\mathrm{BAF} = 35°\ 16' -$

Wenn $\varphi = \mu$, ſo iſt

$\mathrm{Cot\ BAF} = \mathrm{Cot}\,\varphi' + \mathrm{Cot}\,\varphi . \mathrm{Cof}\,\varphi$

Flächen=Schacht abzuſinken (Markſcheider) ſ. Abſinken.

Flächen=Schacht anzugeben. (Markſcheider) ſ. Angabe.

Flächenſchnitte, ſo heißen diejenigen Schnitte der Flächen, die entſtehen, wenn Ebenen durch ſie gelegt werden.

1. So wie ſich Linien in Punkten ſchneiden, ſo thun die Flächen ſolches in Linien, entweder geraden oder krummen. Eine Ebene ſchneidet eine andere Ebene in einer geraden Linie, wenn aber eine Kugel von einer Ebene geſchnitten wird, ſo iſt der Schnitt ein Kreis. Kennt man die Linien, in welchen Flächen von gegebenen Ebenen geſchnitten werden, ſo hat man daran ein Hülfsmittel zur Kenntniß der Flächen ſelbſt; denn man lernt dadurch auf einmal unzählige Punkte der Fläche kennen, da hingegen nach der im Artikel Fläche angegebenen Methode die einzelnen Werthe der veränderlichen Größe z nur einzelne Punkte derſelben zu erkennen geben.

2. Da wir die Flächen auf drey auf einander ſenkrechte Ebenen beziehen, (ſiehe Fläche), ſo müſſen wir vor allen Dingen die Durchſchnittslinien der Flächen mit dieſen drey Ebenen betrachten. Nimmt man alſo zuvörderſt die Ebene APQ, Fig 1132, welche durch die veränderlichen Größen $AP = x$, und $AQ = y$ beſtimmt wird, (indem die dritte veränderliche Größe z die Entfernung der Fläche von dieſer Ebene anzeigt) ſo fällt in die Augen, daß man, wenn man $z = 0$ ſetzt, die Punkte der Fläche finden werde, welche in der Ebene APQ ſelbſt liegen; und es giebt daher die übrig bleibende Gleichung zwiſchen x und y die Linie, in welcher die Fläche von der Ebene APQ geſchnitten wird. Auf ähnliche Art druckt, wenn man $y = 0$ ſetzt, die Gleichung zwiſchen x und z die Durchſchnittslinie der Fläche und der Ebene APR, und wenn man $x = 0$ ſetzt, die Gleichung zwiſchen y und z die Durchſchnittslinie der Fläche und der Ebene AQR aus.

3. Wir haben ſchon im Artikel Fläche berührt, daß die Oberfläche einer Kugel, die den Mittelpunkt in A hat, und deren Halbmeſſer $= a$ iſt, durch die Gleichung $xx + yy + zz = aa$ ausgedruckt werde; und wir wollen daher dieſes Beyſpiel zur Erläuterung gebrauchen. Es ſey alſo $z = 0$, ſo druckt die Gleichung $xx + yy = aa$ den Kugelſchnitt, der von der Ebene APQ erzeugt wird, aus, und man ſieht, daß derſelbe ein Kreis iſt, der den Mittelpunkt in A, und den Halbmeſſer $= a$ hat. Auf ähnliche Art iſt, wenn man $y = 0$ ſetzt, der Kugelſchnitt, welchen die Ebene APR macht, ein Kreis, der durch die Gleichung $xx + zz = aa$ ausgedruckt wird; und wenn man x

= 0 ſetzt, ſo giebt die Gleichung $yy + zz = aa$ einen gleichen Kreis für den durch die Ebene AQR hervorgebrachten Kugelſchnitt. Dies ſind bekannte Dinge, da, wenn eine Kugel von einer Ebene geſchnitten wird, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, der Schnitt allemal ein größter Kreis iſt, der mit der Kugel gleichen Halbmeſſer hat.

4. Nicht ſchwer iſt es, die Durchſchnittslinien zu beſtimmen, welche durch Ebenen gemacht werden, die einer von jenen Haupt-Ebenen parallel ſind. Man denke ſich eine Ebene, die der Ebene APQ parallel ſey, und von ihr um die Weite = h abſtehe; ſo werden alle Punkte der Fläche, deren Entfernung von eben der Ebene APQ, welche Entfernung durch die veränderliche Größe z ausgedruckt wird, = h iſt, in dieſer parallelen Ebene liegen, und alſo eine Durchſchnittslinie bilden. Für dieſe Durchſchnittslinie hat man daher eine Gleichung, wenn man in der Gleichung für die Fläche $z = h$ ſetzt; denn man bekommt dadurch eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten x und y, welche die Natur der Durchſchnittslinie ausdruckt. Auf ähnliche Art laſſen ſich die Schnitte beſtimmen, welche durch Ebenen, welche der APR oder AQR parallel ſind, erzeugt werden.

5. Wenn alſo in der Gleichung für eine Fläche zwiſchen den drey Coordinaten x, y und z eine dieſer Coordinaten z einer beſtändigen Größe h gleich geſetzt wird, ſo entſteht ein Durchſchnitt der Fläche und einer Ebene, welche der Ebene APQ parallel iſt, und von ihr um die Entfernung = h abſtehet. Legt man demnach dem Buchſtaben h nach und nach alle mögliche Werthe, die poſitiven nicht nur, ſondern auch die negativen, bey, ſo erhält man alle Durchſchnittslinien der Fläche und der Ebenen, welche der Ebene APQ parallel ſind; und da die ganze Fläche durch dergleichen parallele Ebenen in unendliche viele Theile getheilt wird, und man auf die gedachte Art alle Durchſchnittslinien kennen lernt: ſo wird man auch durch alle dieſe Durchſchnittslinien mit der Fläche ſelbſt bekannt. Alle dieſe Durchſchnittslinien ſind nähmlich in einer einzigen Gleichung zwiſchen den Coordinaten x und y, die eine unbeſtimmte beſtändige Größe in ſich faßt, enthalten, und es ſind daher alle dieſe Durchſchnittslinien entweder ähnliche oder verwandte in einer Gleichung enthaltene Linien.

6. Es werden alſo alle Schnitte der Fläche, die der Ebene APQ parallel ſind, einander gleich ſeyn, und von den Ebenen APR und AQR auf gleiche Art geſchnitten werden, wenn die Gleichung zwiſchen x und y ſo beſchaffen iſt, daß ſie unverändert bleibt, h mag einen Werth bekommen, was für einen man will. Dies kann aber nicht geſchehen, wofern nicht die veränderliche Größe z, ſtatt welcher h geſetzt worden, in der Gleichung für die Fläche gänzlich fehlt.

Wenn alſo die dritte veränderliche Größe z ganz aus der Gleichung für die Fläche wegfällt, ſo ſind alle der Ebene APQ parallele Schnitte einander gleich, und ihre Natur wird durch die Gleichung für die Fläche ſelbſt ausgedruckt, indem dieſelbe bloß die beyden veränderlichen Größen x und y enthält. Auf ähnliche Art ſtimmen, wenn in der Gleichung für die Fläche entweder x oder y fehlt, alle der Ebene AQR oder APR parallele Schnitte mit einander überein.

7. Eine ſolche Fläche läßt ſich daher nicht nur ſehr leicht denken, ſondern ſelbſt conſtruiren und körperlich darſtellen. Denn angenommen, daß in der Gleichung die veränderliche Größe z fehle, und man alſo bloß eine Gleichung

zwi-

zwiſchen den beyden Coordinaten AP = x, und AQ = PM = y habe, ſo beſchreibe man darnach in der Ebene APQ eine Curve BMD, Fig 1133. Dann ſtelle man ſich vor, daß eine unbegrenzte, auf dieſer Ebene ſenkrecht bleibende gerade Linie nach der Curve BMD ſich bewege, ſo wird dieſelbe bey ihrer Bewegung die Fläche beſchreiben, welche durch die Gleichung ausgedruckt wird. Wenn alſo die Linie BMD ein Kreis iſt, ſo wird die auf dieſe Art entſtande Fläche die Oberfläche eines geraden, wenn aber BMD eine Ellipſe iſt, die eines ſchiefen Cylinders. Wenn die Linie BMD keine continuirliche, ſondern eine aus mehrern geraden und eine geradliniche Figur bildenden Linie zuſammengeſetzte Linie iſt, ſo wird die gedachte Fläche eine prismatiſche.

8. Da dieſe Gattung der Flächen alle cylindriſche und prismatiſche Flächen unter ſich begreift, ſo pflegt man ſie auch die cylindriſche oder prismatiſche zu nennen; die Arten derſelben aber werden durch die ebene Figur BMD beſtimmt, aus welcher ſie auf die beſchriebene Art entſtanden ſind; ſo wie daher auch die Figur BMD die Baſis heißt. So oft daher in der Gleichung für eine Fläche eine von den drey veränderlichen Größen x, y und z fehlt, ſo oft iſt die Fläche, welche durch dieſe Gleichung ausgedruckt wird, entweder eine cylindriſche, oder eine prismatiſche. Wenn aber zwey veränderliche Größen y und z zugleich fehlen, ſo wird x eine beſtändige Größe, und die Linie BMD verwandelt ſich in eine gerade Linie, welche auf der Axe AD ſenkrecht iſt; woher denn die Fläche eine Ebene wird, die auf der Ebene APQ ſenkrecht ſteht.

9. Nach dieſer Gattung der Flächen verdient vorzüglich diejenige bemerkt zu werden, welche man aus den homogenen Gleichungen zwiſchen den drey veränderlichen Größen x, y und z, oder alsdann erhält, wenn dieſe drey veränderlichen Größen allenthalben eine und dieſelbe Anzahl von Dimenſionen haben, wie z. B. wenn $zz = mxz + xx + yy$ iſt. Aus dieſen Gleichungen werden nähmlich alle Schnitte, wenn die ſchneidende Ebene einer von den Hauptebenen parallel iſt, einander ähnliche Figuren. Denn legt man der veränderlichen Größe z einen beſtändigen Werth h bey, ſo iſt offenbar, daß die Gleichung

$$h^h = m^h x + xx + yy$$

wenn man für h nach und nach andere Werthe annimmt, unzählige einander ähnliche Figuren unter ſich begreife, deren Parameter der h gleich oder proportional ſind. Da alſo dieſe Schnitte nicht bloß einander ähnlich ſind, ſondern auch in dem Verhältniſſe der Entfernungen von der Ebene APQ wachſen, ſo ſind die Linien, welche aus dem Punkte A durch die homogenen Punkte der Schnitte gezogen werden, gerade Linien

10 Iſt alſo eine ſolche homogene Gleichung zwiſchen den drey veränderlichen Größen x. y und z gegeben, ſo ertheile man der z den Werth AR = h, und TSsMm, Fig 1134, ſey in einer Ebene, welche der APQ durch den Punkt R parallel gelegt worden, ſo daß ſie durch die Gleichung zwiſchen x und y ausgedruckt werde, und RV = x und VM = y ſey. Iſt nun dieſer eine Schnitt TSsMm beſchrieben, ſo ſtelle man ſich vor, daß ſich durch den Umfang deſſelben eine unbegränzte gerade Linie bewege, die ſtets durch den Punkt A gehe, ſo wird dieſe gerade Linie die Fläche beſchreiben, welche in der Gleichung enthalten iſt. Dabey fällt in die Augen, daß, wenn TSsMm ein Kreis iſt, welcher den Mittelpunkt in R hat, ein gerader, wenn aber R nicht der

Mit-

Mittelpunkt iſt, ein ſchiefer Kegel entſtehen werde; iſt aber jene Figur geradlinich ſo ergeben ſich Pyramiden von allerley Art. Aus dieſem Grunde wollen wir die Flächen, welche in dieſer Art der Gleichungen enthalten ſind, coniſche oder pyramidaliſche nennen.

11. Wenn alſo die Gleichung zwiſchen den drey veränderlichen Größen x, y und z homogen, und alſo die dadurch ausgedruckte Fläche coniſch oder pyramidaliſch iſt, ſo erhellet nicht nur hieraus, daß alle Schnitte, die einer Hauptebene APQ parallel gemacht werden, einander ähnlich ſind, und daß ihre Parameter ſich wie die Entfernungen der Schnitte von dem Scheitel A verhalten, ſondern es werden auch aus gleichem Grunde alle Schnitte, welche entweder der Ebene APR, oder der Ebene AQR parallel ſind, eben dieſe Eigenſchaft haben, daß ſie ähnliche Figuren ſind und daß ſich ihre homologen Seiten wie ihre Entfernungen von A verhalten. Den Artickel Körperſchnitt wird aber gezeigt werden, daß alle Körperſchnitte, die entweder einander oder irgend einer Ebene durch den Scheitel A parallel liegen, auch einander ähnlich, und ihre Parameter den Entfernungen vom Scheitel A proportional ſind.

12. Von einem weitern Umfange iſt die Gattung der Flächen, welche wir jetzt betrachten wollen. Es ſey Z irgend eine Funktion von z, und eine Gleichung zwiſchen den drey veränderlichen Größen x, y und z gegeben. Es werde Z = H, wenn man z = h ſetzt. Da man in dieſem Falle eine homogene Gleichung zwiſchen x, y und H erhält, ſo werden alle Schnitte, die der Ebene APQ parallel ſind, einander ähnlich ſeyn, ihre Parameter aber werden ſich nicht wie die Entfernungen h, ſondern wie die Funktionen davon, H verhalten. Es ſind daher auch die Linien, welche durch die homologen Punkte dieſer Schnitte gezogen werden, keine gerade Linien, ſondern Curven, die von der Funktion Z abhangen. Auch folgt hier nicht, daß die Schnitte, die einer andern Ebene parallel ſind, einander ähnlich ſeyn.

13. In dieſer Gattung ſind die beyden vorhergehenden Arten enthalten. Denn wird Z = z oder Z = αz, ſo entſtehen, weil die Gleichung zwiſchen x, y und z homogen iſt, coniſche Flächen. Eben dieſes geſchiehet, wenn Z = $\alpha + \beta z$ iſt, nur mit dem Unterſchiede, daß die Spitze des Kegels nicht in den Punkt A ſelbſt fällt; iſt nähmlich $Z = \frac{b - z}{b}$, ſo ſteht die Spitze des Kegels von A um die Weite b ab. Setzt man b = ∞, ſo geht die coniſche Figur in eine cylindriſche über, und es wird Z = 1. Es haben daher die Gleichungen für die cylindriſchen Flächen die Beſchaffenheit, daß die veränderlichen Größen x, und y mit der beſtändigen 1 allenthalben dieſelbe Anzahl von Dimenſionen geben. Es mag aber die Gleichung zwiſchen x und y beſchaffen ſeyn, wie ſie will, ſo kann man allemal, wenn z nicht darin vorkommt, durch die Einheit die Homogenität herſtellen, und es druckt daher, wie wir bereits gezeigt haben, jede Gleichung, worin eine veränderliche Größe fehlt, eine cylindriſche Fläche aus.

14. Unter den Körpern, bey welchen alle Schnitte, die einer von den Hauptebenen APQ parallel ſind, einander ähnlich werden, ſind vorzüglich diejenigen zu merken, bey welchen dieſe Schnitte Kreiſe ſind, welche den Mittelpunkt in eben der geraden und auf APQ ſenkrechten Linie AR haben. Dergleichen Körper laſſen ſich drechſeln, und man nennt ſie daher gedrehte Körper. Die allgemeine Gleichung für dieſelben iſt ZZ = xx + yy; denn man mag der

der veränderlichen Größe z, um Z = H zu erhalten, einen Werth beylegen, was für einen man will, ſo bekommt man allemal für den Schnitt, welcher der Ebene APQ parallel iſt, die Gleichung HH = xx + yy, und dies iſt eine Gleichung für einen Kreis, der den Halbmeſſer = H, und den Mittelpunkt in der geraden Linie AR hat. Wenn ZZ = zz iſt, ſo entſtehet ein gerader Kegel; iſt ZZ = aa, Cylinder; und iſt zz = aa — zz, eine Kugel, und dies ſind die vornehmſten Arten der Körper, die ſich durchs Drehen erzeugen laſſen.

15. Nun wollen wir die Körper betrachten, deren auf der Axe AP ſenkrechte Schnitte PTV, Fig 1135, insgeſammt Dreyecke ſind, deren Spitzen T in der Axe AP parallelen geraden Linie DT liegen. Es ſey AVB die Baſis dieſes Körpers, oder ein Schnitt von ihm, der in der Ebene APQ gemacht worden, und irgend eine Curve. Läßt man die Entfernung der geraden Linie DT von der Axe AB, oder AD = C ſeyn, und ſetzt man, wie bisher, die drey veränderlichen Größen AP = x, PQ = y und QM = z: ſo wird PV eine Funktion von x; ſetzt man aber PV = P, ſo iſt wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke VQM und VPT

$$P : c = P - y : z \text{ oder}$$

$$z = c - \frac{cy}{P}$$

Für dieſe Körper iſt daher $\frac{c - z}{y}$ gleich einer Funktion von x; und es unterſcheiden ſich dieſelben von den coniſchen, daß ſie ſich in eine geradlinige Spitze DT endigen, da ſolches die coniſchen in einen Punkt thun. Iſt AVB ein Kreis, ſo entſteht der Körper, den Wallis ausführlich unterſucht, und den kegelförmigen Keil genannt hat.

16. Es ſeyn, wie vorhin, alle auf der Axe AB ſenkrechte Schnitte PTV, Fig 1136, Dreyecke, welche bey P einen rechten Winkel haben, deren Scheitel T aber irgend eine Curve AT bilden, und die Baſis ſey die Figur AVB. Setzt man die drey veränderlichen Größen AP = x, PQ = y und QM = z, ſo iſt in der Curve AVB die gerade Linie PV eine Funktion von x, die wir = P annehmen wollen; und PT ebenfalls eine Funktion von x, die = Q ſeyn mag. Dies vorausgeſetzt, iſt

$$P : Q = P - y : z \text{ und alſo}$$

$$z = Q - \frac{Qy}{P}, \text{ oder } Pz + Qy = PQ \text{ oder}$$

$$\frac{z}{Q} + \frac{y}{P} = 1, \text{ oder eine beſtändige Größe.}$$

Wenn alſo die beyden veränderlichen Größen y und z nirgends mehr als eine Dimenſion ausmachen, ſo gehört der Körper zu der Gattung, welche wir hier beſchrieben haben.

17. Da wir alſo diejenigen Körper betrachtet haben, wobey die Schnitte, die der einen Hauptebene parallel gemacht werden, insgeſamt einander ähnlich ſind: ſo wollen wir uns nun zu ſolchen wenden, wobey dieſe Schnitte wenigſtens mit einander verwandte Figuren, oder ſolche werden, deren Applicaten proportional ſind, wenn man die Abſciſſen homolog nimmt. Es ſeyn die drey Hauptſchnitte eines ſolchen Körpers ABC, ACD und ABD, Fig 1137,

ſo daß alle der ACD parallele Schnitte verwandte Figuren werden. Man ſetze die Grundlinie AC = a und die Höhe AD = b, und dabey ſey, nachdem man die Coordinaten Aq = p und qm = q gemacht hat, q irgend eine Funktion von p. Nun denke man ſich einen parallelen Schnitt PTV, und ſetze die Entfernung AP = x, ſo iſt die Baſis PV eine Funktion von x, die wir = P, und die Höhe PT eine Funktion von x, die wir = Q annehmen wollen. Setzt man daher PQ = y und QM = z, ſo iſt wegen der Verwandſchaft a : p = P : y; und b : q = Q : x oder

$$y = \frac{Pp}{a}; \text{ und } z = \frac{Qq}{b}.$$

18. Wenn alſo alle drey Hauptſchnitte eines Körpers ABC, ACD und ABD gegeben ſind ſo läßt ſich daraus die Natur des Körpers beſtimmen, wenn alle dem ACD parallele Schnitte auch demſelben verwandt ſind. Denn man hat dadurch zuvörderſt P und Q, welches Funktionen von x ſind; und dann iſt q eine Funktion von p, ſo daß durch die beyden veränderlichen Größen x und p die veränderlichen Größen y und z beſtimmt werden. Will man aber eine Gleichung zwiſchen den drey Coordinaten x, y und z haben, ſo ſetze man, da q eine Funktion von p, oder eine Gleichung zwiſchen p und q gegeben iſt, in dieſer Gleichung

$$p = \frac{ay}{P}, \text{ und } q = \frac{bz}{Q}$$

denn dadurch erhält man, da P und Q Funktionen von x ſind, eine Gleichung zwiſchen den drey Coordinaten x, y und z, wodurch die Natur der zu dieſer Claſſe gehörigen Körper beſtimmt wird. Es fällt aber in die Augen, daß, wenn man x = o ſetzt, P = a und Q = b werden muß.

19. Wenn in der Gleichung für die Oberfläche die beyden veränderlichen Größen y und z allenthalben eben dieſelbe Anzahl von Dimenſionen haben, ſo ſind alle auf der Axe AP ſenkrechte Schnitte geradlinichte Figuren. Denn ſetzt man für x irgend eine beſtändige Größe, ſo erhält man eine homogene Gleichung zwiſchen y und z, welche eine oder mehrere gerade Linien anzeigt. Da nun die Anzahl der Dimenſionen, welche die beyden veränderlichen Größen y und z haben, allenthalben dieſelbe, und entweder eine gerade oder ungerade Zahl iſt: ſo haben dieſerwegen die gedachten Körper nach (20. in Art. Fläche) auch je zwey und zwey Theile einander gleich. Es ſind nähmlich die Theile in der erſten und fünften, ferner in der zweyten und dritten Gegend einander gleich, und in Anſehung der übrigen braucht man nur den angeführten (Artikel Fläche 20) zu Rathe zu ziehen.

20. Wir haben bereits mehrere Gattungen von Körpern betrachtet, wobey es unzählige geradlinichte Schnitte giebt, denn es gehören dahin die ſo eben unterſuchten, und dann auch die cylindriſchen und coniſchen Körper. Bey dieſen ſind die Schnitte geradlinicht, welche durch die Axe gehen, jene aber erſtrecken ſich weiter. Es ſey nähmlich AKMP, Fig 1138, ein Schnitt, der auf der Axe unter dem Winkel MPV = φ ſtehe. Setzt man AP = x; PQ = y und QM = z, ſo iſt $\frac{z}{y} = \tan\varphi$, und PM = $\frac{z}{\sin\varphi}$. Soll nun KM eine gerade Linie ſeyn, ſo muß

$$\frac{z}{\sin\varphi} = \alpha x + \beta$$

wer-

werden, wo α und β beſtändige Größen, die von dem Winkel ϕ abhängen, und alſo Funktionen von keiner Dimenſion von y und z ſind. Es ſeyn R und S dergleichen Funktionen, ſo wird

$$x = Rz + S, \text{ oder } x = Ry + S.$$

Oder wenn T eine Funktion von einer Dimenſion, und S eine Funktion von keiner Dimenſion von y und z bedeutet, ſo ſind alle Körper von dieſer Gattung in dieſer allgemeinen Gleichung $x = T + S$ enthalten.

21. Es ſey die Fläche, deren Natur durch eine Gleichung zwiſchen den drey veränderlichen Größen x, y und z beſtimmt worden, beſchaffen wie ſie wolle, ſo iſt es allemal leicht, einen jeden nach der Axe AP gemachten Schnitt zu beſtimmen. Es ſey der Winkel VPM, welchen dieſer Schnitt AKMP mit der Ebene ACVP macht $= \phi$, und die gerade Linie $PM = v$, welches die Applicate des geſuchten Schnitts ſeyn wird; ſo iſt

$$QM = z = v.\ \text{ſin}\ \phi, \text{ und } PQ = y = v\ \text{coſ}\ \phi.$$

Braucht man daher in der Gleichung für die Fläche die Werthe $v.\ \text{ſin}\ \phi$, und $v.\ \text{coſ}\ \phi$ für y und z, ſo erhält man eine Gleichung zwiſchen den beyden veränderlichen Größen x und v, wodurch die Natur des Schnitts AKMP beſtimmt wird. Auf ähnliche Art findet man alle Schnitte, welche nach einer von den beyden übrigen Hauptaxen AQ und AR, Fig 1132, gemacht werden. Denn es laſſen ſich dieſe drey Axen AP, AQ und AR, von welchen die drey veränderlichen Größen x, y und z abhangen, ſo mit einander verwechſeln, daß alles, was von der einen erwieſen worden, auch auf die übrigen angewandt werden kann.

22. Nimmt man alſo die Ebene APQ zur Hauptebene an, um darauf alle Schnitte der Fläche zu beziehen, ſo iſt jeder durch eine Ebene gemachter Schnitt entweder dieſer Ebene parallel oder gegen ſie geneigt, und in dieſem Falle wird die erweiterte Ebene des Schnittes die Ebene APQ irgendwo ſchneiden, und der Durchſchnitt dieſer Ebenen wird eine gerade Linie ſeyn. Im erſten Falle, wenn die Ebene des Schnittes der Ebene APQ parallel iſt, lernt man die Natur dieſes Schnittes kennen, wenn man der veränderlichen Größe z einen beſtändigen Werth ertheilt. Im letzten Falle, wenn die Ebene des Schnittes gegen die Ebene APQ geneigt iſt, kann man die Natur des Schnittes bis jetzt nur dann beſtimmen, wenn entweder die gerade Linie AP, oder die gerade Linie AQ die Durchſchnittslinie der ſchneidenden Ebene und der Ebene APQ iſt. Um alſo alle Schnitte zu finden, muß man auch jeden andern Schnitt jener zwey Ebenen betrachten.

23. Es ſey die gerade Linie ES, Fig 1139, welche der Axe AP parallel iſt, die Durchſchnittslinie der ſchneidenden Ebene und der Ebene APQ und der Neigungswinkel QSM, den die ſchneidende Ebene ESM mit der Ebene APQ macht, $= \phi$; ſo wie Entfernung $AE = f$. Da

$AP = x$; $PQ = y$; und $QM = z$ iſt, ſo wird

$ES = x$, und $QS = y + f$.

Bezieht man demnach den Schnitt auf die gerade Linie ES als auf ſeine Axe, ſo wird die Abſciſſe $ES = x$; und ſetzt man die Applicate $SM = v$, ſo wird, weil der Winkel $QSM = \phi$ iſt,

$QM = z = v.\ \text{ſin}\ \phi$; und

$SQ = y + f = v.\ \text{coſ}\ \phi$ und folglich

$y = v.\ \text{coſ}\ \phi - f$.

Subſtituiret man daher in der Gleichung zwiſchen x, y und z, welche für die Fläche gegeben iſt,

$y = v.\cos\varphi - f$; und $z = v.\sin\varphi$

ſo bekömmt man eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten x und v für den geſuchten Schnitt ESM. Wäre ES ſenkrecht auf der Axe AP, ſo fände man, weil dann ES der andern Hauptaxe in der Ebene APQ parallel wäre, den Schnitt durch Verwechſelung der veränderlichen Größen x und y auf eben die Art.

24. Nun habe der Schnitt ES, Fig 1140, in der Ebene APQ jede willkürlich angenommene Lage, und es begegne ihr die gerade Linie AE, die auf der Axe AP ſenkrecht iſt, in dem Punkte E. Man ziehe ETX der Axe AP parallel, und ſetze AE = f, und den Winkel TES = ϑ; desgleichen, nachdem man die drey veränderlichen Größen AP = x; PQ = y und QM = z angenommen hat, aus Q auf ES die ſenkrechte Linie QS, und endlich MS: ſo iſt der Winkel QSM die Neigung der ſchneidenden Ebene gegen die Ebene APQ. Es ſey QSM = φ und die Coordinaten des geſuchten Schnittes ES = t, und SM = v. Aus S ziehe man nach EX und QP die ſenkrechten Linien ST und SV, ſo iſt

$QM = z = v.\sin\varphi$; $QS = v.\cos\varphi$

$SV = v.\cos\varphi.\sin\vartheta$; $QV = v.\cos\varphi.\cos\vartheta$ und dann auch

$ST = VX = t.\sin\vartheta$; und $ET = t.\cos\vartheta$. Hieraus fließt

$AP = x = t.\cos\vartheta + v.\cos\varphi.\sin\vartheta$ und

$PQ = y = v.\cos\varphi.\cos\vartheta - t.\sin\vartheta - f.$

Subſtituirt man dieſe Werthe für x, y und z, ſo findet man die Gleichung für den geſuchten Schnitt.

25. Iſt alſo eine Gleichung für einen Körper gegeben, ſo kann man daraus eine Gleichung für jeden ebenen Schnitt deſſelben erhalten. Es iſt aber dabey klar, einmal, daß alle Schnitte eines Körpers algebraiſche Curven ſeyn werden, wenn die Gleichung für denſelben zwiſchen den drey Coordinaten x, y und z eine algebraiſche Gleichung iſt. Ferner können t und v in der Gleichung für den Schnitt, da dieſe Gleichung aus der für den Körper entſteht, wenn man darin

$z = v.\sin\varphi$; $x = t.\cos\vartheta + v.\cos\varphi.\sin\vartheta$; und

$y = v.\cos\varphi.\cos\vartheta - t.\sin\vartheta - f$

ſetzt, nicht mehr Dimenſionen bekommen, als die drey Coordinaten x, y und z in jener Gleichung haben. Aber zu einem niedrigen Grade kann die Gleichung für den Schnitt bisweilen gehören, wenn ſich nähmlich die höchſten Glieder nach der Subſtitution aufheben.

26. Haben alſo die drey veränderlichen Größen x, y und z in der Gleichung für die Fläche nicht mehr als eine Dimenſion, ſo daß die Gleichung folgende iſt

$\alpha x + \beta y + \gamma z = a$

ſo ſind alle Schnitte dieſer Fläche gerade Linien. In dieſem Falle iſt aber die Fläche eine Ebene, welches bey einiger Aufmerkſamkeit in die Augen fällt; aus den Elementen aber iſt bekannt, daß jede zwey Ebenen ſich in einer geraden Linie ſchneiden. Auf ähnliche Art ſieht man ein, daß alle Schnitte der Körper, deren Natur durch folgende allgemeine Gleichung ausgedruckt wird

$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \zeta yz + ax + by + cz + ee = 0$

wofern ſie nicht gerade Linien ſind, Linien der zweyten Ordnung ſeyn werden,

den, und daß es dabey keinen Schnitt gebe, der nicht in der Gleichung vom zweyten Grade enthalten ſey.

Euler Anal. d. Unendl. 2. B. 491.

Commentatio de ſuperficiebus geometricis earumque generibus, proprietatibus, complanationibus et ſectionibus, 4 Kilonii 740 6 Bog. ½ Bog. Kupf. 2 gr.

II. Durchſchnitte zweyer Flächen.

1. In dem vorhergehenden iſt bereits die Methode beſchrieben worden, die Natur des Durchſchnitts zu erforſchen, der aus der Durchſchneidung einer Fläche von einer Ebene entſtehet. Da nähmlich die Curve, welche der Durchſchnitt bildet, ganz in der ſchneidenden Ebene liegt, ſo haben wir in dieſer Ebene zwey Coordinaten angenommen, dadurch die Natur des Durchſchnitts beſtimmt und ſo die ganze Unterſuchung aufs bekannte zurück geführet. Wenn aber die ſchneidende Fläche keine Ebene iſt, ſo kann man auch, da alsdenn der Durchſchnitt nicht in eine Ebene fällt, die Natur deſſelben nicht durch zwey Coordinaten ausdrücken, ſondern es iſt eine andere Methode nöthig, um dieſe Durchſchnitte auf die Art durch Gleichungen zu beſtimmen, daß ein jeder Punkt derſelben bekannt ſey.

2. Es kann aber die Lage der Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, beſtimmt werden, wenn man drey auf einander ſenkrechte Ebenen zu Hülfe nimmt, und die Entfernung eines jeden Punkts von dieſen drey Ebenen angiebt. Es ſind daher drey veränderliche Größen nöthig, um die Natur einer Curve, die nicht in einer Ebene liegt auszudrücken, ſo daß bey willkürlicher Annahme der einen die beyden übrigen beſtimmte Werthe bekommen. Hierzu reicht alſo eine Gleichung zwiſchen jenen drey Coordinaten nicht hin, indem dieſe die Natur der ganzen Fläche ausdrücken würde; ſondern man hat zwey Gleichungen nöthig, durch welche, wenn die eine veränderliche Größe einen beſtimmten Werth bekommt, zugleich die Werthe der beyden übrigen beſtimmt werden.

3. Man drückt daher die Natur einer Curve, die nicht in einer Ebene liegt, am bequemſten durch zwey Gleichungen zwiſchen drey veränderlichen Größen x, y und z aus, welche drey auf einander ſenkrechte Coordinaten vorſtellen. Vermittelſt ſolcher zwey Gleichungen können zwey veränderliche Größen beſtimmt werden durch die dritte, in dem ſowohl y als z einer Funktion von x gleich ſeyn wird. Auch kann man nach Gefallen eine von den veränderlichen Größen eliminiren, und alſo drey Gleichungen machen, deren jede nur zwey veränderliche Größen enthält, eine nähmlich zwiſchen x und y, die andere zwiſchen x und z die dritte zwiſchen y und z. Von dieſen drey Gleichungen ergiebt ſich die dritte aus den beyden übrigen von ſelbſt, ſo daß man, wenn man die Gleichungen zwiſchen x und y und zwiſchen x und z hat, die dritte zwiſchen y und z durch die Elimination von x findet.

4. Es ſey alſo eine krumme Linie, die nicht in eine Ebene falle, gegeben, und M, Fig 1293, ſey ein Punkt in ihr. Man nehme nach Belieben die drey auf einander ſenkrechten Axen AB, AC und AD an, ſo daß dadurch die drey auf einander ſenkrechten Ebenen ABC, BAD, und CAD beſtimmt werden. Ferner fälle man aus dem Punkte der Curve M auf die Ebene BAC die ſenkrechte Linie MQ herab, und ziehe aus dem Punkte Q auf die Axe AD die gerade Linie QP ſenkrecht, ſo ſind AP, QP und QM, die drey Coordinaten. durch welche die Curve beſtimmt iſt, wenn man dazwiſchen zwey Gleichungen

 hat,

hat. Es ſey AP = x, PQ = y und QM = z, und aus den beyden zwiſchen x und y und z gegebenen Gleichungen mache man durch die Elimination eine Gleichung, welche bloß x und y enthalte, ſo wird dieſe Gleichung die Lage des Punktes Q in der Ebene BAC beſtimmen, und alle auf die beſchriebene Art aus dem Punkte M entſtandenen Punkte Q werden die Curve EQF geben, deren Natur durch die Gleichung zwiſchen x und y ausgedruckt wird.

5. Auf dieſe Art läßt ſich die Natur der Curven EQF aus zwey zwiſchen den drey Coordinaten gegebenen Gleichungen leicht erkennen; es entſtehet aber dieſe Curve, wenn man aus den Punkten M der geſuchten Curve die ſenkrechten Linien MQ auf die Ebene BAC herabfällt, und man pflegt dieſe die Projektion der Curve GMH in der Ebene BAC zu nennen. So wie aber die in der Ebene BAC entworfene Projektion gefunden wird, wenn man die veränderliche Größe z eliminirt: ſo kann man auch die Projektion eben dieſer Curve in der Ebene BAD oder CAD finden, wenn man entweder y oder x wegſchafft. Eine Projektion reicht indeſſen nicht hin, die Natur der Curve GMH zu erkennen; wenn man aber für jeden Punkt Q die ſenkrechten Linien QM = z kennt, ſo läßt ſich die Curve GMH ſehr leicht aus der Projektion EQF conſtruiren. Hierzu wieder fordert, daß man auſſer der Gleichung zwiſchen x und y auch eine Gleichung zwiſchen z und x, oder zwiſchen z und y, oder auch zwiſchen x, y und z habe, um daraus die Länge des Perpendikels QM = z für einen jeden Punkt Q zu erkennen.

6. Da die Gleichung zwiſchen z und x die Projektion der Curve GMH in der Ebene BAD, die Gleichung zwiſchen z und y aber die Projektion in der Ebene CAD, und die Gleichung zwiſchen x, y und z die Fläche ausdrückt, in welcher die Curve GMH lieget: ſo erhellet einmal, daß durch zwey Projektionen der Curve GMH in zweyen Ebenen dieſe Curve ſelbſt bekannt werde. Ferner iſt klar, daß ein gleiches ſtatt finde, wenn außer der Fläche, in welcher die Curve liegt, noch eine Projektion derſelben in einer Ebene gegeben iſt. Denn errichtet man aus den Punkten der Projektion die ſenkrechten Linien QM, ſo giebt ihr Durchſchnitt mit der Fläche die geſuchte Curve GMH.

7. Nach dieſen allgemeinen Bemerkungen über die Erforſchung der Natur einer jeden Curve, die nicht in einer Ebene liegt, iſt es nicht ſchwer, den Durchſchnitt jeder zwey Flächen zu beſtimmen. Denn ſo wie der Durchſchnitt zweyer Ebenen eine gerade Linie iſt, ſo iſt der Durchſchnitt zweyer Flächen überhaupt, entweder eine gerade oder eine krumme Linie, und dieſe liegt entweder in einer Ebene oder nicht. Er mag indeſſen beſchaffen ſeyn wie er wolle, ſo gehören alle ſeine Punkte zu beyden Flächen, und er muß dahero in den Gleichungen für beyde Flächen enthalten ſeyn. Wenn alſo beyde Flächen durch Gleichungen zwiſchen drey Coordinaten ausgedruckt werden, die auf eben dieſelben drey auf einander ſenkrechte Hauptebenen oder auf eben dieſelbe drey auf einander ſenkrechte Axen AB, AC, AD bezogen werden: ſo drucken dieſe beyden Gleichungen zuſammen die Natur des Schnittes aus.

8. Sind alſo zwey Flächen gegeben, welche ſich ſchneiden, ſo muß man die Natur einer jeden durch eine Gleichung zwiſchen drey Coordinaten ausdrukken, welche auf einerley Hauptaxen bezogen werden, wodurch man zwey Gleichungen zwiſchen x, y und z von der Art bekommt, daß die Gleichung, welche man daraus durch die Elimination der einen dieſer veränderlichen Größen erhält, die Projektion des Durchſchnitts in der Ebene ausdruckt, welche die beyden übrigen veränderlichen Größen enthält. Auf dieſe Art läßt ſich daher

auch

auch der Schnitt einer jeden Fläche von einer Ebene erforſchen. Denn da die allgemeine Gleichung für die Ebenen $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$. iſt, ſo bekommt man, wenn man den Werth von z', der aus dieſer Gleichung entſpringt, oder $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ in die Gleichung für die Fläche bringt, eine Gleichung für die Projection des Schnittes in der Ebene der Coordinaten x und y. Es giebt aber auch zugleich die Gleichung $z' = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ die Größe des Perpendikels QM für einen jeden Punkt Q.

9. Ereignet ſich daß die Gleichung für die Projektion unmöglich wird, wie z. B. wenn man $xx + yy + aa = 0$ fände: ſo iſt dieſes ein Kennzeichen daß die beyden Flächen ſich nirgends ſchneiden. Wenn aber die Gleichung auf einen Punkt führt, oder die Projektion in einem Punkte verſchwindet: ſo iſt auch der Durchſchnitt ein Punkt, und es berühren ſich daher beyde Flächen in einem Punkte welchen man alſo aus der Gleichung kennen lernen kann. Es giebt aber außerdem auch eine Berührung in einer Linie, wenn ſich beyde Flächen in unzähligen Punkten berühren, und dieſe Berührungs-Linie iſt entweder gerade oder krumm. Jenes findet ſtatt, wenn eine Ebene einen Cylinder oder einen Kegel berührt, da hingegen der gerade Kegel von einer Kugel innerhalb in einem Kreiſe berührt wird. Dieſe Berührungslinie erkennt man aus der Gleichung, wenn man daraus für die Projektion eine Gleichung erhält, welche zwey gleiche Wurzeln hat, weil die Berührung nichts anders iſt, als das Zuſammenfallen zweyer Durchſchnitte.

10. Um dieſes deutlicher zu machen, wollen wir annehmen, daß eine Kugel von einer Ebene geſchnitten werde. Ferner ſey die Gleichung für die Kugel, nach dem Mittelpunkte eingerichtet,

$$zz + yy + xx = a^2$$

und die Gleichung für die Ebene in jeder Lage,

$$\alpha z + \beta y + \gamma x = f.$$

Da aus dieſer letzten Gleichung $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ wird, ſo erhält man folgende Gleichung zwiſchen x und y für die Projektion:

$$0 = ff - \alpha^2 a^2 - 2\beta f y - 2\gamma f x + (\alpha^2 + \beta^2) y^2 + 2\beta\gamma xy + (\alpha^2 + \gamma^2) xx$$

woven erhellet, daß ſie eine Gleichung für eine Ellipſe iſt, wenn ſie reell iſt. Wird ſie imaginär, ſo wird die Kugel nirgends von der Ebene berührt; und verſchwindet die Ellipſe in einen Punkt, ſo berühren ſich die Kugel und die Ebene. Um dieſen Fall zu finden, ſuche man

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha \sqrt{(a^2(\alpha^2 + \beta^2) - f^2 + 2\gamma f x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, xx)}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

wo es weder einen Berührungspunkt noch einen Durchſchnitt giebt, wenn f einen ſolchen Werth hat, daß die Wurzelgrößen nicht reell werden können.

11. Setzt man $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$, ſo wird

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha x \sqrt{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \mp \alpha\gamma a \sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

und

und dieſe Gleichung kann nicht reell ſeyn, wofern nicht

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \text{ und } y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

iſt. Iſt daher $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$ ſo berührt die Ebene, welche durch die Gleichung $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ ausgedrückt wird, die Kugel, und man findet den Berührungspunkt, wenn man

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}};\ y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}},$$

und $z = \frac{\alpha a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$ nimmt.

Hieraus läßt ſich eine allgemeine Regel herleiten, durch welche man in den Stand geſetzt wird, zu beurtheilen, ob eine Fläche von einer Ebene, oder einer andern Fläche berührt werde oder nicht. Hat man nähmlich aus beyden Gleichungen eine veränderliche Größe weggeſchafft, ſo muß man unterſuchen, ob die dadurch erhaltene Gleichung in einfache Faktoren aufgelöſet werden kann oder nicht. Denn hat ſie zwey einfache imaginäre Faktoren, ſo giebt es einen Berührungspunkt, welchen man kennen lernt, wenn man jeden Faktor $= 0$ ſetzt. Hat ſie hingegen zwey reelle und einander gleiche Faktoren, ſo berühren ſich die Flächen in einer geraden Linie. Hat ſie endlich zwey nicht einfache gleiche Faktoren, oder iſt ſie durch ein Quadrat theilbar, ſo giebt ihre Wurzel, $= 0$ geſetzt, die Projektion der Linie, welche durch die Berührung entſteht. Hieraus erhellet auch, daß ſich die Flächen, wenn die gedachte Gleichung vier imaginäre Faktoren hat, in zwey Punkten berühren.

13. Und dieſes deutlicher zu machen, wollen wir die Berührung eines Kegels und einer Kugel unterſuchen, deren Mittelpunkt in der Axe des Kegels liegt. Es iſt aber die Gleichung für die Kugel:

$$zz + yy + xx = aa$$

und die für den Kegel, wenn man den Scheitel des Kegels um f von dem Mittelpunkte der Kugel entfernt annimmt:

$$(f - z)^2 = mxx + nyy.$$

Schafft man y weg, ſo wird

$$(f - z)^2 = naa - nzz + (m - n) xx.$$

Die Gleichung für die Projektion des Durchſchnitts in der Ebene der Coordinaten x und z. Es ſey zuvörderſt der Kegel ein gerader, oder $m = n$, ſo wird

$$z = \frac{f \pm \sqrt{(n\ (1 + n)\ aa - nff)}}{1 + n}.$$

Wenn alſo $f = a\sqrt{(1 + n)}$ iſt, ſo iſt zwiefach $z = \frac{a}{\sqrt{(1 + n)}}$, und es giebt eine Berührungslinie, nähmlich den Kreis, deſſen Projektion in der Ebene, welche durch die Axe geht, eine gerade auf der Axe ſenkrechte Linie iſt.

14. Für den ſchiefen Kegel, wo m und n ungleich ſind, ſcheint die Gleichung allemahl einen Durchſchnitt zu geben, da doch öfters keiner ſtatt findet. Denn wenn m größer iſt als n, ſo erhält man zwar allezeit eine reelle Glei-

chung

Gleichung für die Projektion, allein die Realität der Projektion zieht nicht immer die Realität des Durchſchnitts nach ſich. Denn ſoll der Durchſchnitt reell ſeyn, ſo iſt dazu nicht genug, daß bloß die Projektion, ſondern es müſſen auch die von der Projektion nach dem Durchſchnitte gezogenen Perpendikel reell ſeyn. Ob alſo gleich jede reelle Curve reelle Projektionen hat, ſo darf man doch nicht von der Realität der Projektion auf die Realität der geſuchten Curve ſchließen. Dieſe Regel muß man ſtets vor Augen behalten, damit man von der Realität der Gleichungen für die Projektionen keinen falſchen Gebrauch mache.

15. Man vermindert dieſe Unbequemlichkeit, wenn man die Projektion in der Ebene der Ordinaten x und y ſucht. Denn da in dieſer Ebene kein Punkt iſt, dem nicht ein Punkt in der coniſchen Fläche zugehörte: ſo wird, wenn die Projektion reell iſt, auch allemal der Durchſchnitt reell. Da alſo

$$z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$$

iſt, ſo wird aus der andern Gleichung

$$f - \sqrt{(aa - xx - yy)} = \sqrt{(mxx + nyy)} \text{ oder}$$

$$aa + ff - (1 + m)\,xx - (1 + n)\,yy = 2f\sqrt{(aa - xx - yy)}$$

und ferner

$$\left.\begin{array}{l} (aa - ff)^2 \left.\begin{array}{l} - 2aa - ff) \\ - 2(aa - ff)\,m \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} - 2aa - ff) \\ - 2aa - ff)\,n \end{array}\right\} y^2 + \\ (1 + m)^2 x^4 + 2(1+m)(1+n)\,x^2 y^2 + (1+n)^2 y^4 \end{array}\right\} = 0$$

und daher wird

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{aa - ff + n(aa + ff) - (1 + m)(1 + n)\,xx}{(1+n)^2} \\ \pm \dfrac{2f}{(1 + n)^2}\sqrt{(n(1+n)\,aa - nff + (m - n)(1 + n)\,xx} \end{array}\right\} = y^2 \text{ und}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{aa - ff + m(aa + ff) - (1 + m)(1 + n)\,yy}{(1 + m)^2} \\ \pm \dfrac{2f}{(1 + m)^2}\sqrt{(m(1+m)\,aa - mff + (n - m)(1 + m)\,yy} \end{array}\right\} = x^2.$$

16. Soll alſo die gefundene Gleichung Faktoren haben, ſo muß

$$ff = (1 + n)\,aa; \text{ oder } ff = (1 + m)\,aa$$

ſeyn. Im erſten Falle wird

$$yy = \frac{naa - (1 + m)\,xx}{1 + n} \pm \frac{2fx\sqrt{(m - n)}}{(1 + n)\sqrt{(1 + n)}},$$

wo, wenn m kleiner als n iſt, nothwendig

$$x = 0;\ y = \pm\, a\sqrt{\frac{n}{1 + n}},\ \text{und } z = \frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$$

ſeyn muß. Es giebt alſo zwey Berührungspunkte, die von der Axe des Kegels auf beyden Seiten gleichweit entfernt ſind. Wenn aber m größer als n iſt, ſo muß man die andere Gleichung

$$xx = \frac{maa - (1 + n)\,yy}{1 + m} \pm \frac{2fy\sqrt{(n - m)}}{(1 + m)\sqrt{(1 + m)}}$$

nehmen, die nicht reell ſeyn kann, wenn nicht $y = 0$ iſt, in welchem Falle $x = \pm a \sqrt{\frac{m}{1+m}}$, und $z = \frac{a}{\sqrt{(1+m)}}$ wird. Alsdann giebt es zwey andere Berührungspunkte; indem die Berührung in dem Theile des Kegels geſchieht, wo dieſe Punkte am nächſten zuſammenfallen. Auf ähnliche Art läßt ſich die Berührung in allen einzelnen Fällen beurtheilen.

17. Die leichteſte Art aber, die berührenden Ebenen jeder Art der Flächen zu finden, läßt ſich aus der Methode, die Tangenten der Curven zu finden, herleiten. Es ſey die Natur der Fläche, deren Berührungs-Ebenen geſucht werden, durch eine Gleichung zwiſchen den drey Coordinaten $AP = x$; $PQ = y$; und $QM = z$, Fig 1294, ausgedruckt, und daraus die Lage der Ebene, welche die Fläche in dem Punkte M berührt, zu beſtimmen. Wird die Fläche von irgend einer durch M gehenden Ebene geſchnitten; ſo muß die Tangente des dadurch entſtandenen Schnittes für den Punkte M in der berührenden Ebene liegen. Wenn man alſo die Tangenten zweyer ſolcher Schnitte für den Punkt M gefunden hat, ſo muß die Ebene, welche durch dieſe beyden Tangenten beſtimmt wird, auch die Fläche in dem Punkte M berühren.

18. Es werde alſo zuvörderſt die Fläche von einer auf der Ebene APQ ſenkrechten Ebene geſchnitten, und zwar nach der geraden der Axe AP parallelen Linie QS. Ferner ſey auf ähnliche Art ein Schnitt durch M ſenkrecht auf die Ebene APQ, aber nach der Linie QP, welche auf der Axe AP perpendikulär iſt; oder es ſey der erſte Schnitt auf der Axe AB, und der andere auf der Axe AP ſenkrecht. Es ſey EM der erſte Schnitt, deſſen Tangente MS, welche der QS in dem Punkte S begegnet, geſucht werde, ſo daß QS die Subtangente ſey. Der andere Schnitt ſey die Curve FM, ſeine Tangente MT, und die Subtangente QT. Hat man dieſe gefunden, ſo wird die Ebene SMT die Fläche in dem Punkte M berühren. Zieht man alſo die ST, ſo giebt dieſelbe den Durchſchnitt der berührenden Ebene mit der Ebene APQ; und wenn man aus Q auf ST die ſenkrechte Linie QR zieht, ſo verhält ſich QR zu QS wie der Radius zur Tangente des Winkels MRQ, unter welchem die berührende Ebene gegen die Ebene APQ geneigt iſt.

19. Angenommen, daß die Subtangenten $QS = s$, und $QT = t$ gefunden ſeyn; ſo wird

$$PT = t - y;\quad PX = s - \frac{sy}{t};\ \text{und alſo}$$

$$AX = x + \frac{sy}{t} - s.$$

Man lernt alſo hierdurch den Punkt X kennen, in welchem die gerade Linie ST die Axe AP ſchneidet, und da $AXS = TSQ$ iſt, ſo iſt die Tangente dieſes Winkels $= \frac{t}{s}$, und dadurch wird die Lage des Schnitts der berührenden Ebene APQ bekannt. Da ferner $ST = \sqrt{(ss + tt)}$ iſt, ſo wird $QR = \frac{st}{\sqrt{(ss + tt)}}$, und dividirt man damit die QM, ſo bekommt man die Tangente des Neigungswinkels $MRQ = \frac{z\sqrt{(ss + tt)}}{st}$. Zieht man außerdem MN ſenkrecht

auf

auf MR, ſo iſt dieſe Linie ſowohl auf der berührenden Ebene als auf der Fläche ſelbſt in dem Punkte M ſenkrecht, und man erkennt ihre Lage aus $QN = \frac{zz\sqrt{(ss+tt)}}{st}$. Man ziehe aus N auf die Axe AP die NV ſenkrecht, ſo wird, weil QNV = QST iſt, $PV = \frac{zz}{t} = QW$; und $NW = \frac{zz}{t}$. Wenn daher auf dieſe Art die Lage des Punktes N in der Ebene APQ beſtimmt wird, ſo ſteht die gerade Linie NM auf der Fläche ſenkrecht.

20. Wie der Durchſchnitt zweyer Flächen durch Projektionen erforſcht werden müſſe, iſt bereits oben gezeigt worden; jetzt wollen wir unterſuchen, zu was für einer Ordnung die Projektion gehöre, wenn ſolche nach der Ordnung der Fläche beſtimmt werden ſoll. Zuvörderſt alſo geben zwey Flächen der erſten Ordnung oder zwey Ebenen für den Durchſchnitt und ſeine Projektion eine Linie der erſten Ordnung. Dann haben wir auch geſehen, daß dieſe Projektion nicht über die zweyte Ordnung auſſteigen kann, wenn die eine Fläche zur zweyten, die andere zur erſten Ordnung gehört. Eben ſo iſt offenbar, daß eine Projektion nicht zu einer höhern, als der dritten Ordnung gehören werde, wenn die eine Fläche eine Fläche der dritten, und die andere eine Fläche der erſten Ordnung iſt, u. ſ. w. Wenn aber beyde Flächen zur zweyten Ordnung gehören, ſo wird die Projektion des Durchſchnitts entweder zur vierten oder zu einer niedrigern Ordnung gehören, und überhaupt iſt die höchſte Ordnungs-Zahl der Projektion mn, wenn die Ordnungszahl der einen Fläche m, und die der andern n iſt.

21. Wenn keine von den ſich ſchneidenden Flächen eine Ebene iſt, ſo iſt ihr Durchſchnitt meiſtens eine Curve, die nicht in einer Ebene liegt; doch kann auch der ganze Schnitt in einer Ebene ſich befinden, und dieſes geſchiehet, wenn die Gleichungen beyder Flächen zuſammengenommen eine Gleichung, wie $\alpha z + \beta y + \gamma z = f$ in ſich enthalten. Um zu beurtheilen, ob dieſes ſeyn werde, beſtimme man aus beyden Gleichungen die beyden veränderlichen Größen z und y durch die dritte x, und dabey werde $z = P$, und $y = Q$, wo P und Q Funktionen von x ſind. Dann überlege man, ob es eine Zahl n gebe, wobey ſich in $P + nQ$ alle Poteſtäten von x bis auf die erſte x und die beſtändigen Glieder einander aufheben. Iſt dieſes, und iſt $P + nQ = mx + k$, ſo liegt der Schnitt in einer Ebene, und dieſe Ebene wird durch die Gleichung $z + ny = mx + k$ ausgedruckt.

22. Es ſeyen z. B. zwey Flächen der zweyten Ordnung, ein gerader Kegel, $zz = xx + yy$, und eine elliptiſch hyperboliſche Fläche des zweyten Geſchlechts $zz = xx + 2yy - 2ax - aa$ gegeben. Da hieraus $xx + 2yy - 2ax - aa = xx + yy$ wird, ſo iſt $y = \sqrt{(2ax + aa)}$ und $z = x + a$; und dieſe letzte Gleichung zeigt ſchon an, daß der ganze Schnitt in einer Ebene liegen werde, deren Lage durch die Gleichung $z = x + a$ beſtimmt wird. Auf dieſe Art laſſen ſich eine Menge von Aufgaben, die Natur der Flächen betreffend, auflöſen.

Flächen-Körper-Zahl, Numerus plano ſolidus. Eine Flächen-Körper-Zahl wird genannt, die durch Multiplication aus 5 Zahlen in einander entſtehet. Nähmlich 2 Zahlen in einander, geben eine Flächen-Zahl, drey Zahlen in einander multipliciret aber eine Körper-Zahl, und das Produkt aus einer Flächen-Zahl in eine Körper-Zahl iſt eine Flächen-Körper-Zahl. Z. E. 6 iſt

eine Flächen-Zahl, deren Seiten 2 und 3 ſind, hingegen 120 eine Körper-Zahl, deren Seiten 4, 5 und 6 ſind: wenn man nun 120 durch 6 multipliciret, ſo kommt die Flächen-Körper-Zahl 720 heraus.

Flächenwinkel. Weil jede drey Punkte in einer Ebene liegen, ſo müſſen auch zwey gerade Linien, die in einem Punkte zuſammen kommen, ſich jedesmal in einer Fläche befinden. Daher nennt man den Winkel, den zwey in einem Punkte zuſammen kommende grade Linien bilden, einen Flächenwinkel, und ſetzet ihn dem ſphäriſchen oder Kugelwinkel und dem körperlichen Winkel entgegen.

Flächen-Zahl, Numerus planus, iſt eine Zahl, welche aus der Multiplication zweyer anderer in einander entſtehet. Dergleichen iſt 20, denn dieſe Zahl entſtehet, wenn man 4 durch 5 multipliciret. Die beyden Faktoren heißen die Seiten der Flächenzahl. Die Nahmen ſind von der Vergleichung dieſer Operation mit der Berechnung des Inhaltes eines Rechtecks hergenommen.

Flächen-Zahl doppelte, Numerus plano planus, wird genannt, die durch Multiplication von vier Zahlen in einander entſtehet. Dergleichen iſt 120, denn dieſe Zahl kommt heraus, wenn man 2. 3. 4. 5 in einander multipliciret.

Fliche, ſiehe Jacobsſtab.

Fließende Größen, ſo nennen die Engländer die Integralien.

Flötz, ſein Streichen und Fallen durch geometriſche Verzeichnung und durch Rechnung zu finden, ſiehe Streichen und Fallen ꝛc.

Flur eines Dorfes oder Stadt zu vermeſſen, ſiehe Vermeſſung einer Feldmark.

Fluß zu meſſen, Fig 1153.

1. Kann man nahe genug längſt den Ufern fortgehen, und meſſen, ſo läßt ſich die Krümmung des Stromes nach der bekannten Art durch Abſciſſen und Ordinaten verzeichnen.

2. Läßt ſich eine bequeme Standlinie annehmen, aus der ſich die merklichſten Wendungen eines Fluſſes beſtimmen laſſen, ſo gehet die Arbeit noch geſchwinder von ſtatten. — Zum Behuf derſelben gehet ein Fahnenträger längſt des Stromes fort, bleibt, wo ſich eine merkliche Krümmung befindet, mit ſeiner Fahne einige Zeit ſtehen, und läßt daſelbſt ein Zeichenſtäbchen mit einer Nummer zurück. Bey A oder am Standorte des Meßtiſches werden alsdenn allemal nach jedem Standpunkte des Fahnenträgers Viſirlinien gezogen, und nach der Ordnung mit den Zahlen 1, 2, 3, u. ſ. w. nach welchen auch der Fahnenträger ſeine Nummern abgeſteckt haben muß, bezeichnet.

3. Nachdem der Fahnenträger eine ſolche Strecke längſt den Ufern fortgegangen iſt, daß die Viſirlinien bey A mit der Standlinie AB anfangen gar zu ſpitzige Winkel zu machen, ſo wird ihm ein Zeichen gegeben, ſtille zu halten, bis man den Meßtiſch über B gebracht hat. Alsdann gehet der Fahnenträger wieder nach der Ordnung der abgeſteckten Nummern zurück, und bleibt bey jeder wieder einige Zeit ſtehen, bis abermals aus B die Viſirlinien gezogen, und deren Durchſchnitte mit denen aus A gezogenen Viſirlinien beſtimmt worden ſind. Der Fahnenträger muß aber dafür ſorgen, ja keine Nummer vorüber zu gehen, welches denn bey gehöriger Aufmerkſamkeit auf das Einſammeln der Nummern, welches nach eben der Ordnung nach der ſie abgeſteckt worden ſind, rückwärts geſchehen muß, keine Schwierigkeit haben wird.

Bey B wird alsdenn zur fernern Aufnahme des Ufers eine neue Standlinie BC abgeſteckt.

4. Hat

4. Hat man bey B noch einen Beobachter mit einem Meßtiſche, der während daß der Gehülfe bey A die Viſirlinie nach jedem Standpunkte des Fahnenträgers R ziehet, ebenfalls nach dem Fahnenträger viſiret, ſo hat R nicht nöthig, Nummern an ſeinen gehabten Stationen zurück zu laſſen, ſondern bey jeder nur ſo lange zu verweilen, bis bey A und B die Viſirlinien gezogen ſind.

Dieſe bey A und B gemeinſchaftlich nach jedem Stande des Fahnenträgers gezogenen Viſirlinien müſſen aber doch mit Zahlen bezeichnet werden, die ſich auf den Stand des Fahnenträgers beziehen, damit man nachher wiſſen kann, welche Viſirlinien zuſammen gehören. Daher ſchreiben beyde Gehülfen bey A und B auf die Linien, nach dem erſten Stande des Fahnenträgers die Zahl 1, nach dem 2ten Stande die Zahl 2, u. ſ. w.

Um nun die einzelnen Stationen des Fahnenträgers z. B. R zu beſtimmen, ſo werden die bey B obſervirten Winkel mit der Standlinie BA z. B. ABR auf den Meßtiſch über A, an den Punkt b der verjüngten Standlinie bA getragen, und die Durchſchnitte r zuſammen gehöriger Linien aus A und b bemerkt, welche nachher zuſammen gehängt, die Krümmungen des Fluſſes darſtellen.

Das Abtragen der Winkel auf dem Meßtiſche bey B auf dem bey A, mag man hier etwa durch gezogene Kreisbogen zwiſchen den Schenkeln dieſer Winkel, und deren Chorden bewerkſtelligen.

5. Anſtatt eines Meßtiſches bedient ſich Herr Helſenszrieder in ſeiner Geodäſie §. 270. eines Aſtrolabii, womit die Winkel, wie ABR u. ſ. w. bey B wirklich gemeſſen, und der Perſon bey A durch Zurufen vermittelſt eines Sprachrohrs, oder wenn es die Entfernung nicht verſtattete, durch andere verabredete Zeichen gemacht werden ſollen.

Letzteres ließe ſich etwa auf folgende Art bewerkſtelligen.

Geſetzt, die Perſon bey B habe den Winkel 43°. 50′ beobachtet.

Um ihn dem Gehülfen bey A kund zu machen, ſo laſſe B zum Beyſpiel eine Meßfahne ſo oft auf den Boden nieder, als es nach der Ordnung die bey obigem Winkel vorkommenden Ziffern 4. 3, 5, 0, andeuten.

A ſchreibt alsdenn die einer jeden Ziffer 4, 3, 5, 0, entſprechende und beobachtete Menge von Senkungen der Fahne auf, und giebt jedesmal dem Gehülfen B ein Zeichen, wenn die Ziffer aufgeſchrieben iſt und er ihm eine neue andeuten ſoll.

Um die 0 anzuzeigen, kann B z. B. die Fahne in einen Kreis horizontal herumſchwingen.

Hat nun A nach der Ordnung die Ziffern 4350 aufgeſchrieben, ſo wird er leicht beurtheilen, daß ſie nichts anders als 43°. 50′ bedeuten können.

Wäre der Winkel 3° 27′ geweſen, ſo muß ihn der Gehülfe bey B durch 0327 andeuten, damit der Winkel nicht mit 32°. 7′ verwechſelt werde. Sollte 32°. 7′ angezeigt werden, ſo müſte es durch die Ziffern 3207 geſchehen. Ein Winkel von 123°. 5′ müſte durch 12305, einer von 40° durch 4000 angezeiget werden, und ſo wird leicht erhellen, wie in andern Fällen zu verfahren wäre.

Den jedesmal kund gemachten Winkel z. B. ABR trägt A alsdann auf den Meßtiſch an den Punkt b der verjüngten Standlinie bA, und beſtimmt auf der nach dem Fahnenträger R hingezogenen Viſirlinie Ap den gedachten Stand deſſelben, r.

Wir wiſſen aber nicht, ob der Gebrauch des Aſtrolabii bey B und die Anzeige der bey B obſervirten Winkel nicht mehrere Zeit erfordert, als wenn

man bey B die Winkel vielmehr mit dem Meßtiſche aufnähme. Indeſſen haben wir doch bey dieſer Gelegenheit zeigen wollen, wie man einem in einer gewiſſen Ferne befindlichen Gehülfen einen gemeſſenen Winkel bekannt machen könne; welches denn zu andern Abſichten unterweilen gebraucht wird.

Herr Helfenszrieder bedient ſich dazu eines Verfahrens, das von dem unſrigen unterſchieden iſt, und im a. B. §. 260. ſelbſt weiter nachgeleſen werden kann.

6. Befinden ſich längſt den Ufern eines Stromes Deiche oder Dämme, abc Fig 1153, ſo kann man darauf oft bequeme Standlinien annehmen, die Krümmungen des Stroms zu entwerfen; natürlich nimmt man ſie ſo groß als möglich.

7. Wenn von dem Deiche aus Abzugsgräben m, m, bis an das Ufer gehen, die dem Fortgehen des Fahnenträgers hinderlich ſind, ſo muß der Fahnenträger jemanden mit einem Brete mit ſich führen, das man über die Gräben legt, die ſich nicht überſchreiten laſſen.

8. Wenn das Vorland zwiſchen dem Deiche und dem Strome, wie es häufig geſchiehet, ſo weich iſt, daß der Fahnenträger nicht im Stande iſt, längſt den Ufern fortzugehen, ſo muß er ſuchen auf einem Kahne längſt des Ufers hinabzufahren, wo ſich bequeme Standpunkte nehmen laſſen, oder mit dem Kahne ſtille zu halten, und die Fahne in die Höhe zu richten. In dieſem Falle wird man das Verfahren (4) beſonders bequem finden, weil das Zurückfahren mit dem Kahne, und das Abſtecken der Nummern, welches ſonſt nach (3) geſchehen müſte, dadurch vermieden wird.

9. Wenn an den Ufern Gebüſche vorhanden ſind, ſo muß man bey den Hauptkrümmen hohe Stangen mit Strohwiſchen aufrichten, und das Gebüſch wegräumen ſo viel ſich thun läßt.

10. Inſeln, Sandbänke, u. dgl. werden ohngefähr nach dem Augenmaße gezeichnet, wenn ihre größte Länge vw und Breite xy nebſt einigen andern Punkten aus der Standlinie AB oder ab feſtgelegt worden ſind.

11. Wenn längſt den Ufern ſteile und felſigte Anhöhen fortgehen, ſo kann man vieles nach dem Augenmaße zeichnen, weil ſich die Krümmungen des Stromes von der Anhöhe gut überſehen laſſen. — In dieſem Falle arbeite man längſt der Anhöhe fort, als wenn man eine Figur aus der Peripherie aufnehmen wollte, und beſtimme die Beugungen des unten fließenden Stromes, indem man dahin gehenden Ordinaten, nach dem Augenmaße ſchätzt. — In ſolchen Fällen kömmt es ohnehin ſelten auf eine gar zu große Genauigkeit an.

12. Uebrigens müſſen die an den Strömen etwa befindlichen Bühnen, Packwerke, Schleuſen, Wehren, Mühlen, Brücken u. dgl. auch mit in den Riß kommen. — Wer ſchon auf dem Felde zu meſſen geübt iſt, dem wird es keine Schwierigkeit machen, auch die Gränze längſt des Stromes zu entwerfen, wie weit ſich etwa bey Ueberſchwemmungen das Waſſer erſtrecken möchte, oder die Inundationslinie λμν zu verzeichnen. —

M. ſ. a. Krumme Linien auf dem Felde.

Grubers (T) Art kleine Flüſſe zu meſſen, und ihre Charten zu verfertigen; in den Abh. einer Privatgeſellſchaft in Böhmen V. 263.

Dieſe Methode iſt nicht ganz geometriſch, aber für die Umſtände, für welche man eine Flußkarte verlangt, hinreichend.

Das Längenmaaß welches hierbey gebraucht wird, wird durch die Zeit beſtimmt, in welcher das Schiff von einem Punkt bis zu einem gegebenen fort fließt, und dabey angenommen, daß in gleichen Zeiten auch gleiche Räume von demſelben durchlaufen werden.

Zu Abnehmung des Streichen des Flußes, oder zur Beſtimmung ſeiner Serpentionen dient die Bouſſole, die hier ganz ſo wie gewöhnlich gebraucht wird.

Müller L. Anweiſung wie man die Breite und Tiefe der Flüße aus gemeinen Landcharten erforſchen könne. Berlin 1784. Stehet auch im berl. genealogiſchen Kalender fürs Jahr 1785.

Fluß ſeine Breite vermittelſt eines Stabes zu meſſen, ſiehe: Entfernungen unzugängliche, vermittelſt der Stäbe zu meſſen 8.

Fluxio Differenzial=Rechnung nennt M. Fontaine ſeine in den Memoir. de l'acad. roy. de Paris 1734 angewendete Methode, die *curva tavtochrona* allgemein, das Mittel, worin die Bewegung geſchiehet, widerſtehe in welcher Verhältniß es will, zu berechnen, wobey er zugleich x und dx als zweyerley bedeutend gebrauchet.

Fluxionen=Rechnung nebſt Uebereinſtimmung mit der Differential=Rechnung. Von Karſten.

1. Was Herr von Leibniz Differenzen veränderlicher Größen, und im beſondern Fall, wenn ſie verſchwinden ſollten, Differentialien nannte, das nannte Herr Newton dem Sinne nach eben ſo: er nannte ſie Incrementa, und decrementa, und in dem beſondern Fall wenn ſie verſchwinden ſollten, ſo ſetzte er das Wort momentanea hinzu. Oft ſagt er kurz; momenta anſtatt incrementa oder decrementa momentanea. In ſeiner bekannten Abhandlung: Methodus fluxionum et ſerierum infinitarum. (Newtoni Opuſcula Mathematica Philoſophica et Philogogica, Lauſane et Geneve 1774. Opuſculum II) welche ſchon im Jahr 1671 ſoll ausgearbeitet ſeyn, nennt er dieſe Momenta, bald indefinite parva, bald infinite parva. Ein incrementum momentaneum der veränderlichen Größe x ſetzt er xo, und in dem Beweiſe des I. Problems a. a. O. T. II. p. 60 heißt es: cum autem finxerimus o quantitatem infinite parvam, vt ei ponere poſſet quantitatum momenta, termini in eam ducti pro nihilo poſſunt haberi cum aliis collati, eos igitur negligo. Wenn man das und mehrere ähnliche Stellen mit der Leibnitziſchen Art des Vortrages zuſammen hält; ſo darf man wohl um ſo weniger an demjenigen zweifflen, was Newton in dem berühmten Scholion (Phil. Nat. Princip. Math. Lib. II. Sect. II.) ſelbſt bezeuget; reſcripſit Vir clariſſimus (Leibnitius) ſe quoque in ejus modi methodum incidiſſe, et methodum ſuam communicavit a mea vix abludentem praeter quam in verborum et notarum formulis.

2. In dem angezogenen Lemmate II. ſind die Wörter momenta, mutationum velocitates auch zuweilen das Wort incrementa gebraucht, und Newtons eigene Erklärung darüber iſt dieſe: quantitates vt indeterminatas et inſtabiles et *quaſi* motu fluxione perpetuo creſcentes vel decreſcentes hic conſidero, et eorum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo -- Cave tamen intellexeris particulas finitas -- intelligenda ſunt principia jam jam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum ſed *prima naſcentium proportio*. Eodem recidit ſi loco momentorum vſur-

vſurpentur, *velocitates incrementorum ac decrementorum* (quas etiam motus, mutationes et *fluxiones* quantitatum nominare licet) vel finitae quaevis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Am deutlichſten ſtehen dieſe Gründe von dem allen im 1 Buche in den erſten Lehnſätzen des 1ſten Abſchnitts, und vornehmlich im Scholio beym Lemmate XI. Die vielerley Namen welche hier vorkommen, rühren nur daher, weil die Sache neu war, und Newton ſie gern ſo viel möglich einleuchtend machen wollte. Nach Art der Alten wollte er nicht alle Beweiſe einkleiden, weil das allerdings ſeinen Vortrag ſehr umſtändlich gemacht haben würde: er wollte aber auch verhüten, daß man nicht glauben möchte, ſeine Art zu ſchließen ſey einerley mit Cavallerie Methode des Untheilbaren, daher kömmt die Vorſtellung der ſtetigen geometriſchen Größen, der Linien, Flächen und Körper, als entſtünden ſie durch Bewegung eines Punkts, einer Linie, einer Fläche, daher die Erinnerung, daß man auch loco momentorium velocitates incrementorum et decrementorum verſtehen, daß man die Namen motus, mutationes, fluxiones quantitatum brauchen könne. Newtons momenta ſind alſo mit den Leibnitziſchen Differentialien ſo vollkommen einerley, daß es ſehr wahrſcheinlich iſt, man habe nach der Zeit in England vornehmlich nur um deswillen den Namen fluxiones gewählt, damit es um ſo mehr das Anſehn haben ſolle, Newtons neue Analyſis, welche eben darum auch den Namen Fluxionenrechnung erhielt, ſey was anders als Leibnitzens Differential-Rechnung. Newton ſelbſt hatte ſie ſonſt methodum rationum primarum et vltimarum genannt, und das war der beſte der Sache ſelbſt am meiſten angemeſſene Name.

3. Newtons Meynung iſt alſo wohl nicht geweſen, daß man beym ſyſtematiſchen Vortrage der ganzen Theorie die Begriffe von Bewegung, Zeit und Geſchwindigkeit der Bewegung zum Grunde legen ſollte. Dieſes ſcheint ſehr deutlich aus ſeinem Vortrage in der ſchon oben angeführten Abhandlung: Methodus fluxionum et ſerierum infinitarum zu erhellen (a. a. O. p. 54.) Er will nicht, daß man den gewöhnlichen Begriff verſtehen ſoll, wenn er das Wort Zeit braucht, es ſoll nichts anders als eine gleichförmig wachſende veränderliche Größe bedeuten. Die Geometer waren zum Theil ſchon durch Cavallerii Methode an die Vorſtellung gewöhnt, man könne ſich die geometriſchen Größen als aus untheilbaren Theilen zuſammengeſetzt vorſtellen, er wollte ſie wiederum an die Vorſtellung ſtetiger Größen gewöhnen, und als ein Exempel dazu, ſchien ihm der Begriff von dem was man Zeit nennet, am geſchickteſten. Man ſolte ſich eine veränderliche Linie eben ſo wie die Zeit, als ein continuum denken. Er ſagt ausdrücklich: Tempus *formaliter* non conſidero, ſed ſuppono, quod una ex propoſitis quantitatibus homogenea cum aliis creſcat aequabili fluxu, ad quam ceterae, tanquam ad tempus referuntur, quae ideo *per analogiam* non inconcinne dici poteſt *tempus*. Quoties igitur vox tempus in ſequentibus invenietur, hoc verbum ſumendum eſt, non quaſi tempus intellexiſſem in ſuo *formali* ſignificatione, ſed tanquam ſignificans quantitatem illam a *tempore diverſam*, cujus aequabili incremento vel fluxu tempus exponitur et menſuratur. In dem Beweiſe am angeführten Orte pag. 59. 60 iſt auch gar nicht die Rede von Vergleichung der Geſchwindigkeiten, womit x und y wachſen, ſondern davon wie ſich die Gleichung zwiſchen x und y ändert, wenn x + xo anſtatt x und y + yo anſtatt y geſetzt wird, xo, yo heißen auch hier quantitatum momen-

menta, und werden wie die Leibnitziſchen Zeichen dx, dy, bey der Rechnung gebraucht. Zwey veränderliche Größen x und y hängen hier nach einem gewiſſen Geſetze von einander ab, das die Gleichung zwiſchen beyden ausdrückt, und es wird daraus eine andere Gleichung zwiſchen xo und yo, als zwiſchen incrementis momentaneis der Größen x und y vollkommen hergeleitet, wie man es macht, wenn man nach Leibnitzens Art rechnet. Ob man dx, dy, anſtatt xo, yo ſchreiben will, iſt wohl ſehr gleichgültig. Demnach darf man kühn behaupten, Newtons Fluxionen-Rechnung, und Leibnitzens Differentialrechnung, ſey nicht allein in Anſehung der Rechnungsregeln ſelbſt, ſondern auch in Anſehung der Gründe, worauf beyde beruhen, vollkommen einerley: nur hat Newton die Gründe beſſer, deutlicher und völlig mathematiſch richtig angegeben.

4. Die Begriffe von Bewegung, Zeit und Geſchwindigkeit, welche Newton nur zur Erläuterung ſeines Vortrages brauchte, gehören gar nicht hieher. Wenn alſo Herrn Maclaurins weitläuftiges Werk Treatiſe of Fluxions Edinb. 1742, wovon wir auch eine franzöſiſche Ueberſetzung haben: Traité des fluxions par le R. P. Rezenas, a Paris 1749 nicht ſonſt allerley lehrreiche Unterſuchungen enthielte, und als ein gutes mathematiſches Repertorium diente; (ein ordentliches Syſtem darf man darinnen nicht ſuchen) ſo wäre es ſehr entbehrlich. Daß bey den ungleichförmigen Bewegungen, wenn ein Punkt in der Zeit t, den Weg x zurücklegt, und in dieſem Augenblick die Geſchwindigkeit v erlangt hat, $v = \frac{dx}{dt}$ ſey, und daß dieſer Ausdruck den Weg bezeichne, der in einer Zeitſecunde, oder jeder andern für Eins angenommenen Zeit würde zurückgelegt werde, wenn mit dem letzten Augenblick der Zeit t die Bewegung gleichförmig zu werden anfinge; das läßt ſich auf ein paar Oktav-Seiten völlig ins Licht ſetzen. Die Gleichung zwiſchen t und x ſey welche ſie wolle, ſo kann auch t die Abſciſſe, x die Ordinate einer geraden oder krummen Linie vorſtellen, nachdem es einfache oder höhere Gleichung iſt. Nur im erſten Falle können gleiche dx mit gleichen dt zuſammen gehören, alsdann wächſt x und t gleichförmig und es iſt $\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt}$ das Increment oder Decrement, um welches ſich x ändert, wenn t um ein Increment $= 1$ wächſt. Im andern Falle, iſt die Gränze des Werthes $\frac{dx}{dt}$ das Increment oder Decrement um welches ſich x, wenn die fernere Aenderung nun gleichförmig bliebe, ändern würde, wenn ſich x um das Increment $= 1$ änderte. Demnach kann man allemal $\frac{dx}{dt}$ als die Geſchwindigkeit betrachten, womit ſich die Funktion x, der veränderlichen Größe t ändert, wächſt oder abnimmt, wenn t Aenderungen leidet. Wer das weiß, der überſiehet ohne alle Umſtände, daß es einerley ſey, ob man lieber von Fluxionen und Geſchwindigkeiten ſprechen, oder geradezu Incremente, Momente, Differentiallen ſagen will. Der Name Differential Verhältniß, iſt ſo gut als der Name erſtes oder letztes Verhältniß, oder Gränze des Verhältniſſes. Die Begriffe von Bewegung, Zeit, und Geſchwindigkeit zum Grund ſetzen, daraus analytiſche Rechnungsregeln und geometriſche Lehrſätze herleiten, das heißt die Ord-

nung umkehren. Man muß die Grundlehren der Mechanik, aus analytiſchen und geometriſchen Grundlehren, nicht dieſe aus jenen herleiten.

5. Will man vollends die allerbekannteſten Dinge auf ſynthetiſch = geometriſche Art nach der Exhauſtions Methode der Alten beweiſen, alle ſpecielle Fälle haarklein aufzählen, die man überaus leicht überſiehet, wenn man nur nach den bekannten Regeln der Buchſtaben Rechenkunſt, ein Zeichen in das entgegengeſetzte verändert; ſo verliehrt die Wiſſenſchaft den ganzen Vorzug wieder, wodurch ſie ſich von den Methoden der Alten auszeichnen ſollte, die Gedult des Lernenden, dem es vornehmlich darum zu thun iſt, die Rechnungs- und Erfindungsregeln, mit ihren Gründen kennen zu lernen, wird ohne Zweifel ſehr ermüdet, wenn er auf den Weg geführet wird, denn Herr Maclarin vorgezeichnet hat. Er legt ſeinem Leſer einen ganzen Quartanten, und noch die Hälfte eines andern von eben der Stärke vor, und führet ihn beynahe durch das ganze Gebiet der Mathematik herum, ohne ihm einen Leitfaden zu geben, woran er ſich halten kann, den er doch in dem Buche vornemlich ſuchte, um den kürzeſten Weg zu finden: allererſt in der Mitte des zweyten Quartanten macht er ihn mit den allerleichteſten Rechnungsregeln bekannt, wo doch Newtons Gränzen der Verhältniſſe wieder vorkommen, die vorhero ebenfalls hier und da eingemiſcht waren, auch nicht vermieden werden konnten, weil die ganze Sache davon abhängt, das heißt doch wohl die Sache ganz auſſerordentlich erſchweren, und über alle maßen ins weitläuftige ziehen. Newtons Erfindung ſollte ja eben eine ſo ermüdende Weitläuftigkeit des Vortrags zu vermeiden dienen: er ſelbſt ſagt in dem Scholion beym Lemmate IX. a. a. O. Praemiſi haec lemmate ut effugerem taedium deducendi perplexas demonſtrationes more veterum Geometrarum ad abſurdum. Die Wiſſenſchaft hat das Schickſal erfahren, das ſo häufig bey menſchlichen Angelegenheiten beobachtet wird; man hält ſelten eine geſchickte Mittelſtraße. Die deutſchen und franzöſiſchen Mathematiker wollten alles, auch ſogar die Elementar = Geometrie abgekürzt haben, und blieben nicht ſehr um die Gründlichkeit des Vortrags beſorgt. Die Engländer wollten nichts von der Gründlichkeit verlieren, auch der Schein ſollte wegfallen, als wäre ihr Vortrag weniger gründlich, als der Vortrag der alten Geometer: darüber verfiel man in eine größere weit mehr ermüdende Weitläuftigkeit als die war, zu deren Vermeidung die neuern analytiſchen Rechnungsmethoden, die vortreflichſten Hülfsmittel hätten abgeben ſollen. Die nun weiter folgenden wenigen Bemerkungen, werden das alles, worauf es bey der Fluxionsmethode ankömmt, hinlänglich ins Licht ſetzen.

6. Die Geſchwindigkeit der gleichförmigen Bewegung wird durch die Größe des Weges beurtheilt, welcher in bekannter Zeit, die man für Eins annimmt, zurück geleget wird; Geſchwindigkeit für eine Stunde, eine Minute, eine Secunde, iſt der in einer Stunde, in einer Minute oder Secunde zurückgelegte Weg. Wenn S den in der Zeit T, mit der ungeänderten Geſchwindigkeit C zurückgelegte Weg bezeichnet: ſo iſt $C = \frac{S}{T}$. Wenn ferner in der folgenden Zeit dT, der Weg dS zurückgelegt wird, ſo bleibt $C = \frac{dS}{dT}$, da dann dT, dS ganz unbeſtimmte Werthe ſind, die in einerley Verhältniß bleiben, es mag dT ſo groß man will angenommen werden. Bey der Berechnung in

Zah-

Zahlen muß man T oder dT, in Secunden, Minuten oder Stunden nehmen, nachdem man C für eine Sekunde, Minute oder Stunde wiſſen will. Weiß man daß die Bewegung ungleichförmig, alſo ihre Geſchwindigkeit, nach Verlauf eines jeden noch ſo kleinen Zeittheilchens ſchon größer oder kleiner ſey, als ſie im Anfang deſſelben war; ſo ſind auch die in jeden zwey auf einander folgenden gleich großen Zeittheilchen zurück gelegten Wege ungleich groß. Man kann indeſſen doch fragen: wie groß der mit dem folgenden Zeittheile dT zuſammen gehörige Weg dS ſeyn würde, wenn mit dem letzten Augenblicke der Zeit T alle fernere Beſchleunigung oder Verzögerung der Bewegung aufhörte? Setzt man voraus, daß dS den Weg bezeichne, welcher unter dieſer Bedingung während des Zeittheiles dT würde zurück gelegt werden, ſo iſt auch $\frac{dS}{dT}$ das Maß der Geſchwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung für den letzten Augenblick der ſchon verfloſſenen Zeit T.

7. Bey der beſchleunigten Bewegung iſt der in jedem folgenden Zeittheile zurückgelegte Weg größer, als er im nächſtvorhergehenden eben ſo großen Zeittheile war. Man nehme an, daß zwiſchen T und S eine Gleichung gegeben ſey, ſo kann aus dieſer Gleichung der mit der Zeit $T - t$ zuſammengehörige Wege $S + s$ gefunden werden. Iſt nun C die Geſchwindigkeit im letzten Augenblick der Zeit T, ſo iſt $C > \frac{\sigma}{t}$ und zugleich $C < \frac{s}{t}$, es mag t ſo groß oder ſo klein als man will angenommen werden. Kann man alſo einen Werth angeben, der größer iſt, als jeder Werth $\frac{\sigma}{t}$, und kleiner als jeder Werth $\frac{s}{t}$, ſo iſt das der geſuchte Werth C. Wenn demnach $\frac{s}{t} = P + X$ und $\frac{\sigma}{t} = P - Y$ gefunden wird, alsdenn aber X und Y ſolche Funktionen von t ſind, die mit t zugleich verſchwinden; ſo muß $P = C$ ſeyn, und C iſt die Gränze des Werthes $\frac{s}{t}$. Uebrigens ſiehet man leicht, daß bey der verzögerten Bewegung $C < \frac{\sigma}{t}$ und zugleich $C > \frac{s}{t}$ ſeyn müſſe, und daß ebenfalls C die Gränze des Werthes $\frac{s}{t}$ bliebe.

8. Es ſey $S = AT^2$, ſo iſt

$$S + s = A.T^2 + 2A.T.t + A.t^2$$
$$S - \sigma = A.T^2 - 2A.T.t + A.t^2$$

mithin $\frac{s}{t} = 2A.T^2 + At$, $\frac{\sigma}{t} = 2AT - At$. Dieſe Gleichungen zeigen, daß 2A.T größer, als jeder Werth $\frac{\sigma}{t}$ aber zugleich kleiner als jeder Werth $\frac{s}{t}$ ſey: mithin iſt $2A.T = C$. Wenn nun wie es in der Differen-

r.nzialrechnung gewöhnlich iſt, dS anſtatt s, dT anſtatt t geſchrieben wird ſo heißt das, es ſey die Gränze des Werthes $\frac{dS}{dT} = C$. Würde nun die Bewegung nicht weiter beſchleuniget, ſo würde in jeder folgenden endlichen Zeit dT der Weg dS = C. dT zurück geleget werden.

Wäre S = A. T — B T², ſo hätte man

$$S + s = A(T + t) - B(T^2 + 2T.t + t^2),$$
$$S - \sigma = A(T - t) - B(T^2 - 2T.t + t^2),$$
alſo $s = (A - 2B.T)\,t - B.t^2$
und $\sigma = (A - 2B.T)\,t + B.t^2$.

Die Bewegung wäre alſo nun eine verzögerte, keine beſchleunigte Bewegung. Indeſſen bliebe ſonſt alles wie vorhin, nur hätte man $C < \frac{\sigma}{t}$ und zugleich $C > \frac{s}{t}$, übrigens bliebe doch C = der Gränze des Werthes $\frac{s}{t} = A - 2B.T.$

9. Die Gleichung zwiſchen S und T ſey welche ſie wolle, ſo kann man ſie als eine Gleichung anſehen, welche die Natur einer graden oder krummen Linie ausdrückt, wenn T die Abſciſſe, und S die rechtwinklichte Ordinate vorſtellet. Alsdenn muß man T in Füßen, Zollen oder ſonſt einem willkührlichen gewählten Längenmaße ausdrücken. Wenn eine Linie, wie die Abſciſſe T, beſtändig um gleiche Differenzen t wächſt oder abnimmt, ſo kann man ſagen, ſie wachſe oder ſie vermindere ſich gleichförmig. Wenn alſo S = A. T iſt, mithin die Gleichung für eine gerade Linie gehört, ſo wächſt auch die Ordinate S mit der Abſciſſe gleichförmig: in dem Fall S = A — B. T. würden gleichförmige Verminderungen der Ordinate mit gleichförmigen Vermehrungen der Abſciſſe zuſammen gehören. Ueberhaupt kann man gleichförmige Aenderungen ſagen, ſo bedarf es deſſen nicht, daß man jene beyden Fälle unterſcheide. Verminderung iſt alsdenn negative Aenderung, wenn Vermehrung als poſitive Aenderung betrachtet wird. Nun läßt ſich die mit einer bekannten für Eins angenommenen Aenderung der Abſciſſe zuſammengehörige Aenderung der Ordinate eben ſo, wie die mit einer bekannten für Eins angenommenen Zeit zuſammen gehörige Geſchwindigkeit der Bewegung meſſen. Man kann fragen: um wie viel ändert ſich die Ordinate, wenn ſich die Abſciſſe um einen Fuß, oder um einen Zoll ändert? Wofern ſich nun S allemal gleichförmig ändert, ſo iſt die Aenderung $= \frac{dS}{dT}$, vorausgeſetzt, daß ſich S um dS ändere, wenn ſich T um dT ändert. Die Formel giebt die Aenderung der Ordinate für einen Zoll oder einen Fuß Aenderung der Abſciſſe, nachdem man dT in Fußen oder Zollen ausdrückt. Will man die Vorſtellung zum Grunde ſetzen, dS werde durch Bewegung eines Punkts in ſo vielen Zeitſecunden oder Zeitminuten beſchrieben, als Zolle oder Fuße die Länge der Linie dT ausmachen; ſo iſt $\frac{dS}{dT}$ die Geſchwindigkeit dieſer Bewegung. Demnach kann man ſich auch $\frac{dS}{dT}$ als die Geſchwindigkeit der Aenderung der Ordinate für jeden

den

den Zoll oder für jeden Fuß Aenderung der Abſciſſe vorſtellen, und das heiß Fluxion der Ordinate.

10. Wenn die Gleichung zwiſchen S und T nicht einfach iſt, ſo können mit gleichen Aenderungen der Größe T nicht gleiche Aenderungen der Funktion S zuſammengehören. Die Funktion S ändert ſich nun ungleichförmig, für gleiche nach einanderfolgende Werthe dS ſeyn würde, wenn die Aenderung für größere Werthe T gleichförmig bliebe? Um die Antwort auf dieſe Frage zu finden, ſchließt man wie im 7, wenn man für jeden Werth der Zeit T die Geſchwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung finden will, nachdem während der Zeit T ſchon der Weg S iſt zurückgelegt worden. Die mit der gleichförmigen Fluxion der veränderlichen Größe T zuſammengehörige Fluxion der Funktion S ſuchen heißt alſo nichts anders, als die Gränze des Verhältniſſes $\frac{dS}{dT}$ ſuchen. Demnach ſind nicht allein die Regeln der Fluxionenrechnung mit den Regeln der Differentialrechnung, ſondern auch die Gründe jener Regeln mit den Gründen dieſer Regeln einerley. Man hätte alſo vormahls der Wiſſenſchaft einen ungemein viel wichtigern Dienſt geleiſtet, wenn man anſtatt der nichtsbedeutenden Streitigkeit über die Frage, wer der erſte Erfinder der neuern Analyſis ſey? die wahren Gründe davon völlig ins Licht geſetzt, und ſich über einen der Sache am beſten angemeſſenen Sprachgebrauch gemeinſchaftlich verglichen hätte.

11. Will man die völlige Aehnlichkeit des Begriffes von Geſchwindigkeit der Bewegung und Geſchwindigkeit der Aenderung einer Funktion S für jeden Werth der veränderlichen Größe T, wovon S abhängt, beybehalten; ſo muß man noch bemerken, daß T eine Zahl, keine Linie ſey, wenn von Bewegung die Rede iſt. Wenn alſo T und S Abſciſſe und Ordinate einer krummen Linie ſind, alſo $\frac{dS}{dT}$ die Fluxion von S in dem eben erwähnten Sinne vorſtellen ſoll; ſo muß dT als eine Zahl durch eine bekannte Einheit V ausgedrückt werden, und $\frac{dS}{dT}$ ſtellet eine Linie vor, um welche S gleichförmig wachſen würde, wenn T um einen Zoll, einen Fuß größer werden ſollte. Die Linie $\frac{dS}{dT}$ würde nun in eben dem Maß durch eine Zahl ausgedrückt gefunden werden. Soll dagegen S eine Fläche, einen Körper, einen Winkel als eine Funktion von der veränderlichen Linie T abhängt, bedeuten; ſo iſt auch $\frac{dS}{dT}$ eine Fläche, ein Körper, oder ein Winkel, und in allen Fällen muß dT als eine Zahl, nicht als eine Linie betrachtet werden.

12. Wenn x, y Grundlinie und Höhe eines rechtwinklichten Dreyecks ſind und $y = nx$ iſt; ſo iſt ſeine Fläche $z = \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} nx^2$. Mit dem Werthe dx gehört der Werth $dz = nx\,dx + \frac{1}{2} ndx^2$ zuſammen, aber dieſe Werthe dz ſind für gleiche dx nicht gleich groß, ſondern deſto größer, je größer x angenommen wird. Wenn nun für $x = a$, und $y = na = b$ die Ungleichförmigkeit der Aenderung der Werthe dz aufhörte, ſo müſte nun $dz = nadx = bdx$ werden. Das heißt, für jeden unbeſtimmten Werth x oder y iſt dz

= ydx. Man will den vollſtändigen Werth dz nicht wiſſen, ſondern nur den Theil davon, welcher ſich wie dx verhält, wenn x alſo auch y unverändert bleiben. Die Fluxion von z iſt aber eigentlich $=\frac{V}{dx}$. ydx, (11) alſo eine Fläche, die in Quadratzollen oder Quadratfußen gefunden wird, nachdem man die Linien in Längenzollen oder Längenfußen ausdrückt. Stellt man ſich anſtatt der Hypothenuſe dieſes rechtwinklichten Dreyecks eine krumme Linie vor, zwiſchen den Endpunkten der Ordinate y und einer andern Ordinate im Anfangspunkt der Abſciſſen: ſo iſt z eine Fläche zwiſchen der Abſciſſe, den beyden Ordinaten in ihrem Anfangs und Endpunkte, und der krummen Linie zwiſchen den Endpunkten dieſer Ordinaten. Ferner bleibt dz = ydx, wie auch y von x abhängen mag, und das erhellet unmittelbar aus denſelben Gründen, woraus es folgt, wenn z ein geradlinichtes Dreyeck iſt: auch wäre eigentlich die Fluxion von $z=\frac{V}{dx}$ ydx.

23. Bey wirklichen Bewegungen verhalten ſich die Geſchwindigkeiten wie die Wege, welche von einer gegebenen Gränze angerechnet gleichförmig in einerley gegebener Zeit würden zurück gelegt werden, ohne daß es eben nöthig iſt, dieſe Zeit für eins anzunehmen; man kann dieſe beſchriebenen Wege anſtatt der Geſchwindigkeiten ſelbſt verſtehen. Die Fluxionen der Funktion z einer veränderlichen Größe x verhalten ſich für verſchiedene Werthe x wie die mit gleichen Incrementen dx zuſammengehörigen Incremente oder Decremente dz, um welche ſich die Funktion z ändern würde, wenn dieſe Aenderungen nicht weiter ungleichförmig blieben. Dieſerwegen kann man die ſo entſtehenden Incremente oder Decremente ſelbſt verſtehen, wenn von Fluxionen der Funktion z die Rede iſt. In dieſem Sinne iſt alſo dz = ydx die Fluxion der Fläche z. So macht Maclaurin ſeine Fluxionen vorſtellig, und ſo betrachtet, ſind ſie nichts weiter, als Incremente oder Decremente, kurz Differenzen, um welche z wachſen oder abnehmen würde, wenn nur diejenigen Theile dieſer Differenzen verſtanden werden ſollen, die mit dx in einerley Verhältniß bleiben. Eben das und nicht anders findet man, wenn man die Gränze des Werthes $\frac{dz}{dx}$ ſucht, wie Maclaurin ſelbſt an mehr Orten in ſeinem oben angeführten Werke beweiſet: alſo iſt das ein unnöthiger Umweg, durch den man geführt wird, wenn man ſich an die Begriffe von Fluxionen gewöhnen ſoll. Der Begriff von Geſchwindigkeit iſt nur der Mechanik eigenthümlich, und in der Geometrie ein fremder Begriff: es läßt ſich nicht ſo ganz kurz und doch einleuchtend genug zeigen, was Geſchwindigkeit der Vermehrung oder Verminderung einer Funktion, beſonders wenn die Aenderung ungleichförmig iſt, eigentlich ſeyn ſoll, wenn man nämlich mit dieſen Begriffen die Wiſſenſchaft anfangen, und ſie Anfängern vortragen will. Maclaurin fühlt das ſelbſt, und getrauet ſich nicht einmal eine Erklärung von Geſchwindigkeit zugeben, verfällt gar dabey in ganz unnöthige der Sache gar nicht angemeſſene halbmetaphyſiſche Speculationen. (a. a. O. Tom. I. Art. 5-6.) Dagegen ſind die Begriffe von dem, was Gränze eines Verhältniſſes, Gränze einer Summe ſey, ganz ungemein einleuchtend, und einem jeden vollkommen faßlich, der nur aus den Anfangsgründen die nöthigen Vorkenntniſſe mit-

mitbringt. Ich möchte wohl mit dem alten Stiefel, der ſich bey Beurtheilung gewiſſer unnöthigen Umſtändlichkeiten beym Vortrage der praktiſchen Rechenkunſt ſo ausdrückt, (Arithmetica Integra Authore Mich. Stiefelio. Norimb. 1544.) hinzuſetzen, daß mir die vielerley Vorſtellungsarten von Fluxionen, Incrementen, Differentialien, unendlich kleinen Elementen u. ſ. f. nichts als vexationes populi zu ſeyn ſcheinen. Wie viel vergebliches Leſen hätte man nicht den Liebhabern der Mathematik erſparen können, wenn man bey den ſo leicht faßlichen vollkommen einleuchtenden Vorſtellungsarten der Newtonſchen Gränzen der Verhältniſſe und Summen geblieben wäre. Newtons Vorſtellungen von Fluxionen konnten für ſolche, die in der Wiſſenſchaft ſchon einige Uebung erlangt hatten, ganz gute Erläuterungen bleiben: aber Grundbegriffe, um die ganze Wiſſenſchaft darauf zu bauen, hätte man daraus nicht machen ſollen.

14. Wenn man Schriftſteller vergleicht, die ihre Werke nicht lange vor Newtons und Leibnitzens Zeitalter verfaſſet haben, ſo wird man aufs vollkommenſte überzeugt, daß der Name Fluxionen und die damit verwandten Redensarten von der Unvollkommenheit der ehemaligen Erfindungsmethoden und der Armuth einer noch nicht ausgebildeten Sprache beym Vortrage mathematiſcher Lehren herrühren. Man hatte die algebraiſche Analyſin noch bey weiten nicht in der heutigen Vollkommenheit; man wuſte mit den Gleichungen und Formeln noch nicht recht umzugehen, wenn es nicht ſo ſehr darauf ankam, aus bekannten Größen, die alle ihre beſtimmten Werthe hatten, etwa nur einen oder einige wenige Werthe einer unbekannten Größe zu finden, als vielmehr darauf, daß man ganz allgemeine Geſetze finden ſollte, nach welchen zwey oder mehr veränderliche Größen von einander abhängen. Was man dem Verſtande durch algebraiſche Formuln noch nicht recht einleuchtend zu machen wuſte, das ſuchte man durch Zeichnungen zugleich dem Auge ſinnlich darzuſtellen. Zahlen und ihre Verhältniſſe gegen einander ſtellte man durch Linien vor, beſonders wenn es auf Irrationalverhältniſſe ankam. Die Bemerkung war leicht zu machen, daß man ſich vorſtellen könne, eine Linie entſtehe durch Bewegung eines Punkts, weil wir ja auf die Art Striche als Bilder von Linien ziehen, und nun konnte es auch leicht jemanden, der lateiniſch ſchrieb, einfallen zu ſagen, die Linie entſtehe fluxu puncti, da es ja bekannt iſt, daß das Wort fluere bey lateiniſchen Schriftſtellern ſehr allgemein, und nicht eben von Bewegung flüſſiger Dinge allein gebraucht wird. Eben darum konnte auch Neper in ſeinem bekannten Werke: Mirifici Canonis Logarithmorum Deſcriptio leicht darauf verfallen, ſo zu reden: übrigens aber finde ich nicht ſo viele Aehnlichkeit des Vortrages beym Neper mit dem Vortrage nach der Fluxionen oder Differentialrechnung, wie es ſcheint, daß Herr Maclaurin will gefunden haben (a. a. O. I. B. VI. Cap. Art. 151.) Wenn gleich Neper von Geſchwindigkeit der Bewegung zweyer Punkte redet, welche die Linien beſchreiben ſollen, wovon die eine Reihe in geometriſcher Progreſſion abnehmender Zahlen, die andere ihre Logarithmen vorſtellen ſoll; ſo vergleicht er doch dieſe Geſchwindigkeiten keinesweges auf eine allgemeine Art, wie man nachher die ſogenannten Fluxionen zu vergleichen angefangen hat. Dieſe Redensarten ſind bey ihm nichts weiter als Beweiſe von der damaligen Armuth der Sprache. Man wuſte ſich beym Vortrage der Gründe neu erfundener Theorien im Ausdruck noch nicht zu helfen, ſo wie es auch leicht zu erachten iſt, daß die Gründe der Theorien ſelbſt ſich nicht allemal gleich

an-

anfangs in ihrem ganzen Lichte dem Verſtande des Erfinders darſtellten. Wenn Neper jetzt lebte, und mit dem gegenwärtigen Zuſtande der Wiſſenſchaft ſo bekannt wäre, wie er es mit dem damaligen war; ſo würde er eine beſſere Definition vom Logarithmen geben, und weder Bewegung noch Geſchwindigkeit hineinbringen. Die Art, wie Neper ſeine Rechnungen einleitet, und die Theorie davon vorträgt, bleibt übrigens allemal ſehr ſinnreich, ſie iſt der Art, wie man damals bey ſolchen Unterſuchungen zu verfahren gewohnt war, ſehr wohl angemeſſen: wer mit den nöthigen Vorkenntniſſen verſehen iſt, wird Nepers beyde hieher gehörige Werke, beſonders das nach ſeinem Tode von ſeinem Sohne herausgegebene Opus poſthumum: Mirifici Canonis Logarithmorum Conſtructio, nicht ohne Vergnügen leſen.

Karſtens mathematiſche Abh. Halle 1786.

Wir haben im 1. Bande S. 51, das Verſprechen gethan, den Leibnitzigen erſten Schritt zur Differential zu liefern, und wir glauben daß dieſes hier der ſchicklichſte Ort ſey.

Neue Methode zum Größten und Kleinſten, desgleichen zu den Tangenten, welche weder durch gebrochene noch irrationale Größen aufgehalten wird, und eine eigene Art des Calculs für dieſelben, von G. G. L. (Gotl. Wilh. Leibnitz). Fig 1586.

Die Axe ſey AX, und mehrere Curven, als VV, WW, YY, ZZ, deren Ordinate mit der Axe perpendikular als VX, WX, YX, ZX, welche in Beziehung auf ſie v, w, y, z genannt werden mögen; und AX ſelbſt, die Abſciſſe von der Axe heiße x. Tangenten mögen ſeyn VB, WC, YD, ZE, welche die Axe in den Punkten B, C, D, E berühren. Nun nehme man irgend eine gerade Linie dx willkührlich an, und eine gerade Linie welche ſich zu dx verhalte, wie v (oder w, oder y, oder z,) ſich zu VB verhält, (oder zu WC, oder YD, oder ZE) und nenne ſie dv (oder dw, oder dy oder dz) oder die Differenz derſelben v (oder derſelben w, oder y, oder z). Nach dieſer Vorausſetzung werden die Regeln des Calculs folgende ſeyn:

Wenn a eine gegebene beſtändige Größe iſt, wird da gleich o ſeyn, und dax gleich adx: wäre y gleich v (oder jede Ordinate der Curve YY, gleich einer jeden Ordinate die der Curve VV entſpricht) ſo wird dy gleich dv. Nun die Addition und Subtraction: wenn z — y + w + x gleich wäre v, ſo wird dz — y + w + x oder dv gleich ſeyn dz — dy + dw + dx. Multiplication: $dxv = xdv + vdx$, oder $y = vx$ angenommen, wird $dy = xdv + vdx$ werden. Denn es iſt willkührlich, ob man die Formel als xv, oder der Kürze wegen für dieſelbe einen Buchſtab, als y brauchen will. Es iſt zu bemerken, daß x und dx auf eben die Weiſe in dieſem Calcul traktirt wird wie y und dy, oder irgend ein anderer unbeſtimmter Buchſtab mit ſeinem Differentialien. Auch iſt zu merken, daß es nicht immer einen Regreß von der Differentialgleichung giebt, als nur mit einiger Behutſamkeit, wovon anderswo. Ferner Diviſion: $d\frac{v}{y}$ oder $(z = \frac{v}{y})$ angenommen, wird

$$dz = \frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$$ ſeyn.

Was

Was die Zeichen anbetrifft, ſo hat man wohl zu ſmerken, daß, wenn im Calcul anſtatt des Buchſtaben blos der Differentialbuchſtab deſſelben geſetzt wird, zwar eben dieſelben Zeichen beybehalten werden, und anſtatt + z, dz geſchrieben wird, und für — z, — dz, wie aus der kurz vorher angeſetzten Addition und Subtraction erhellet; aber daß es dann, wenn man zur Exegeſe der Werthe kommt, oder wenn man das Verhältniß des z ſelbſt zu x betrachtet, erhellt, ob der Werth des dz ſelbſt eine bejahende Größe, oder eine um nichts kleinere oder negative iſt: wenn dieſes letztere geſchieht, alsdenn wird die Tangente ZE von dem Punkte Z nicht nach H, ſondern nach den entgegengeſetzten Theilen oder unterhalb X gezogen, das heißt, alsdenn wenn die Ordinaten ſelbſt z abnehmen indem die x zunehmen. Und weil die Ordinaten v ſelbſt bald zunehmen, bald abnehmen, wird dv bald eine affirmative, bald eine negative Größe werden, und im erſtern Falle wird die Tangente 1V 1B nach H gezogen; im letztern 2V 2B nach der entgegen geſetzten Seite. Keins von beiden aber geſchieht in der Mitte um M, in welchem Punkte die v ſelbſt weder zu- noch abnehmen, ſondern im Stehen ſind, und dv wird alſo = 0, wo es gleichviel iſt ob die Größe affirmativ oder negativ iſt, denn + 0 = — 0: und an dem Orte iſt v ſelbſt, nähmlich die Ordinate LM am größten (oder wenn ſie ihre Wölbung der Axe zukehrt, am kleinſten) und die Tangente der Curve in M wird weder über X hinaus zu den Theilen A gezogen, und nähert ſich daſelbſt der Axe, noch unterhalb X zu den entgegengeſetzten Theilen, ſondern iſt der Axe parallel. Iſt dv unendlich in Beziehung auf dx ſelbſt, ſo iſt die Tangente zur Axe gerade, oder ſie iſt die Ordinate ſelbſt. Iſt dv = dx, ſo macht die Tangente einen halben rechten Winkel zur Axe. Wenn beym Zunehmen der Ordinaten v, auch ihre Größen oder Differenzen dv zunehmen; (oder wenn die dv affirmativ genommen auch ddv die Differenzen der Differenzen affirmativ, und in negativen negativ ſind), ſo kehrt die Curve der Axe ihre Höhlung; ſonſt die Wölbung zu: wo aber der Zuwachs am größten oder kleinſten iſt, oder wenn die Incremente aus den abnehmenden zunehmende oder das Gegentheil werden, da iſt der Punkt der entgegengeſetzten Krümmung, und die Höhlung und Wölbung verwechſeln ſich unter einander, wenn anders nicht auch die Ordinaten daſelbſt aus zunehmenden abnehmende werden, oder das Gegentheil, denn alsdenn würde die Höhlung oder Wölbung bleiben: unmöglich aber iſt es, daß die Zunahmen fortfahren zu, oder abzunehmen, die Ordinaten aber aus zunehmenden abnehmende werden, oder das Gegentheil. Der Punkt der entgegengeſetzten Krümmung findet alſo ſtatt, wenn weder v noch dv in dem 0 exiſtirt, dennoch ddv, 0 iſt. Daher hat auch das Problem der entgegengeſetzten Krümmung nicht zwei gleiche Wurzeln wie das Problem der Größten, ſondern drey. Und zwar hängt alles dieſes von dem rechten Gebrauche der Zeichen ab.

Zuweilen aber müſſen zweideutige Zeichen gebraucht werden, wie vorher in der Diviſion, ehe nemlich bekannt iſt wie ſie erklärt werden müſſen. Und zwar wenn, indem die x wachſen, $\frac{v}{y}$ wachſen (abnehmen), müſſen die zweideutigen Zeichen in $d\frac{v}{y}$ oder in $\frac{+ vdy \mp ydv}{yy}$ ſo erklärt werden, daß dieſer Bruch eine affirmative (negative) Größe werde. Das $\mp$ bedeutet aber das

das Gegentheil des $\pm$, daß wenn dieſes +, jenes —, iſt, oder das Gegentheil. Es können auch in eben dem Calcul mehrere Zweydeutigkeiten vorkommen, die ich durch Parentheſen unterſcheide, z. B. $\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v} = w$, wäre, ſo würde $\frac{\pm\, vdy \mp\, ydv}{yy} + \frac{(\pm)\, ydz\, (\mp)\, zdy}{zz} + \frac{((\pm))\, xdv\, ((\mp))\, vdx}{vv} = dw$ ſeyn, ſonſt würden die Zweideutigkeiten, die aus den verſchiedenen Summen entſtehen, verwirrt werden. Wobey anzumerken iſt, daß ein zweydeutiges Zeichen in ſich ſelbſt multiplicirt, + giebt, in ſein Gegentheil —, in ein anderes zweideutiges eine neue Zweideutigkeit hervorbringt, die von beiden abhängt.

Die Potenzen $dX^a, = a.\ X^{a-1}dx$, z. Beyſpiel $d, X^3 = 3X^2\, dx$ $d\frac{1}{X^a} = -\frac{a\,dx}{X^{a+1}}$ zum Beyſpiel, wenn $w = \frac{1}{X^3}$ wäre, wird $dw = -\frac{3dx}{X^4}$ werden.

Wurzeln: $d, \sqrt[b]{X^a} = \frac{a}{b}\sqrt[b]{X^{a-b}}$. (Daher $d\sqrt[2]{y} = \frac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$, denn a iſt in dem Falle 1, und b iſt 2; alſo $\frac{a}{b}\sqrt[b]{X^{a-b}}$ iſt $\frac{1}{2}\sqrt[2]{y^{-1}}$ and nun iſt y^{-1} eben das was $\frac{1}{y}$ aus der Natur der Exponenten der geometriſchen Progreſſion und $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ iſt $\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$ $d\frac{1}{\sqrt[b]{X^a}} = \frac{-\,bdx}{a\sqrt[b]{X^{b-a}}}$. Die Regel der unveränderten Potenz wäre aber ſchon hinreichend geweſen, ſowohl die Brüche als die Wurzeln zu beſtimmen, denn die Potenz wird ein Bruch wenn der Exponent negativ iſt, und wird in eine Wurzel verwandelt, wenn der Exponent gebrochen iſt, aber ich habe lieber dieſe Conſequenzen ſelbſt ableiten wollen, als ſie andere ableiten laſſen, da ſie ſehr allgemein ſind, und oft vorkommen, und es in einer an ſich verwickelten Sache beſſer iſt für die Leichtigkeit Sorge zu tragen.

Wenn man dieſen Algorithmus dieſes Calculs, den man einen Differentialcalcul nennen könnte, verſtanden hat, ſo können alle andern Differentialgleichungen gefunden, und die größten und kleinſten, nebſt den Tangenten erhalten werden, ſo daß es nicht nöthig iſt die gebrochenen oder irrationalen aufzuheben, oder andere Hinderniſſe, wie man nach den bis jetzt bekannt gemachten Methoden thun mußte. Für einen Geübten wird der Erweis aller leicht ſeyn, und wenn er dieſes einzige, das bis jetzt noch nicht genug erwogen iſt, betrachtet, ſo wird er finden, daß man die dx, dy, dv, dw, dz, eben ſo wie ihre Differenzen x, y, v, w, z, (einer jeden nach ihrer Folge) oder auch ihre augenblickliche Zu- und Abnahme, im Verhältniß haben kann.

Hier

Hieraus folgt, daß man bey jeder aufgegebenen Gleichung ihre Differentialgleichung hinſetzen kann, welches geſchieht, wenn man für jedes Glied (d. i. Theil, welcher mit bloßer Addition oder Subtraction zur Regulierung der Gleichung beyträgt) gerade zu die Differentialgröße des Gliedes, für eine andere Größe aber (die nicht das Glied ſelbſt iſt, ſondern zur Hervorbringung des Gliedes beyträgt) ihre Differentialgröße zur Formirung der Differentialgröße des Gliedes ſelbſt gebraucht, und zwar nicht gerade zu, ſondern nach dem bis jetzt vorgeſchriebenen Algorithmus. Aber die bis jetzt herausgekommenen Methoden haben keinen ſolchen Uebergang, denn ſie gebrauchen mehrentheils eine gerade Linie wie DX, oder eine andere dergleichen, aber nicht die gerade dy, welche von der DX, XY, dx die vierte Proportionale iſt, wodurch alles geſtöhrt wird; hierauf verordnen ſie, daß die gebrochenen und irrationalen (die ſie anfänglich als unbeſtimmte nehmen) zuvor aufgehoben werden ſollen. Es iſt auch offenbar, daß ſich unſere Methode auf die transcendenten Linien erſtreckt, die nicht auf den algebraiſchen Calcul gebracht werden können, oder die von keiner gewiſſen Lage ſind, und zwar auf die allgemeinſte Art, ohne einige partikulare Suppoſitionen die nicht immer gelingen, wenn man nur überhaupt weiß, daß die Tangente finden ſo viel heißt, als eine gerade Linie ziehen, welche die zwey Punkte der Curve die einen unendlich kleinen Abſtand haben, vereinigt, oder die gezogene Seite eines Vielecks von unendlich vielen Winkeln, welches uns für eine Curve gilt. Jene unendlich kleine Diſtanz aber läßt ſich allezeit durch irgend ein Differentialzeichen wie dv, oder durch eine Beziehung auf dieſelbe ausdrücken, das iſt, durch irgend ein Tangentenzeichen. Auf den Fall, wenn y z. B. eine transcendente Ordinate einer Cycloide wäre, welche calculirt werden ſollte, ſo daß vermittelſt dieſes Calculs Z ſelbſt die Ordinate der andern Curve beſtimmt wäre, und man ſuchte dZ oder durch ſie die Tangente dieſer letztern Curve, ſo müßte allerdings dz durch dy beſtimmt werden, und dieſe dy würde man haben, weil man die Tangente der Cycloide hat. Die Tangente der Cycloide ſelbſt aber, würde man, wenn man ſich vorſtellte, daß man ſie noch nicht hätte, gleichfalls aus der gegebenen Eigenſchaft der Tangenten des Cirkels, durch den Calcul finden können.

Ich will ein Beyſpiel von einer Berechnung herſetzen, wobey man ſich merken muß, daß ich die Diviſion auf dieſe Weiſe bezeichne, x: y, welches ſo viel iſt als x dividirt durch y oder $\frac{x}{y}$. Die erſte Gleichung oder Aufgabe ſey, x: y + a + bxc — xx: quadr. ex + fxx + ax √ gg + yy + yy: √hh + lx + mxx = o, welches das Verhältniß zwiſchen x und y oder zwiſchen AX und XY ausdrückt, angenommen daß a, b, c, e, f, g, h, l, m gegeben ſind; es wird eine Weiſe geſucht, aus einem gegebenen Punkte Y, YD zu ziehen, welche die Curve berühren ſoll, oder es wird das Verhältniß einer geraden Linie DX zu einer gegebenen geraden Linie XY verlangt. Der Kürze wegen wollen wir für a + bx, n ſchreiben; für c — xx, p; für ex + fxx, q; für gg + yy, r; für hh + lx + mxx, s. ſo wird x: y + np: gg + ax √r + yy: √s = o. Welches die zweite Gleichung iſt. Es erhellt ſchon aus unſerer Berechnung daß d,x: y iſt ± xdy + ydx: yy; und eben ſo d, np: qq iſt (±) 2npdq (∓) qndp + pdn,: q^3 und d, ax √ r iſt

$-axdr : 2\sqrt{r} + adx\sqrt{r}$; und $d, yy : \sqrt{s}$ iſt $((\pm))\ yyds\ ((\mp))\ 4ysdy, : 2s\sqrt{s}$, welche alle Differentialgrößen $ad, x : y$ bis zu $d, yy : \sqrt{s}$ zuſammen addirt, zu o machen werden, und auf dieſe Weiſe eine dritte Gleichung geben werden, denn ſo werden für die Glieder der zweiten Gleichung ihre Differentialgrößen geſetzt. Nun iſt dx, bdx, und dp iſt $-2xdx$, und dq iſt $edx + 2fxdx$, und dr iſt $2ydy$, und ds iſt $ldx + 2mxdx$. Wenn man dieſe Werthe in der dritten Gleichung ſubſtituirt, wird man die vierte Gleichung haben, wo die Differentialgrößen, welche allein noch übrig ſind, nähmlich dx, dy außer den denominatoribus und vinculis allezeit gefunden werden, und jedes Glied wird entweder durch dx oder durch dy gemacht, mit beſtändiger Beobachtung des Geſetzes des Gleichartigen ſo weit es dieſe beiden Größen betrifft, die Rechnung mag ſo verwickelt ſeyn, als ſie will; daher kann man immer den Werth von $dx : dy$ ſelbſt, oder des Verhältniſſes von dx zu dy, das iſt DX, das zu der gegebenen XY geſucht worden iſt, welches Verhältniß in dieſer unſerer Rechnung (dadurch daß man die vierte Gleichung in eine Analogie verwandelt) wie $\pm x : y + 2xy : \sqrt{r}\ ((\pm))\ 2y : \sqrt{s}$ zu $\mp\ 1 : y\ (\pm)$

$$2npe + 2fx : q^3\ (\mp) - 2nx + nb : qq + a\sqrt{r}\ ((\pm))\ yyl + 2mx : 2s\sqrt{s}.$$

x und y aber ergeben ſich aus dem gegebenen Punkt Y. Auch die oben geſchriebenen Werthe der Buchſtaben n, p, q, r, s, ergeben ſich durch x und y. Man hat alſo das geſuchte. Und wir haben dieſes ſo verwickelte Exempel blos um deswillen beygeſetzt, um die Art und Weiſe zu zeigen wie man die obigen Regeln auch in einer ſchwerern Rechnung gebrauchen kann. Nun wollen wir den Gebrauch an leichter zu verſtehenden Exempeln zeigen.

Es ſeyen zwei Punkte C und E, und die gerade Linie SS auf einer Ebene mit ihnen gegeben, man ſucht den F der auf der geraden Linie SS ſo genommen werden muß, daß die Verbindung von CF, FE ein Aggregat von Rechtecken ſey, CF zu der gegebenen h, und FE zu der gegebenen r, des kleinſten unter allem was möglich iſt, das heißt, wenn SS die Trennerin der mittleren, und h die Dichtheit der mittleren vorſtellte, wie des Waſſers, von Seiten C und r die Dichtheit des mittleren wie der Luft, von Seiten E, es wird ein ſolcher Punkt F geſucht, daß der Weg von C zu E durch F der leichteſte unter allen möglichen ſey. Wir wollen alle dieſe möglichen Aggregate der Rechtecke, oder alle Schwierigkeiten der möglichen Wege ſo annehmen, daß ſie durch die KV, Ordinaten der Curve VV die mit der geraden Linie GK nach einen rechten Winkel laufen, welche wir ω nennen wollen, vorgeſtellt werden, und daß man die kleinſte unter denſelben NM ſuche. Weil ſich die Punkte C und E ergeben, ſo werden ſich auch die Perpendikularen zu SS, nähmlich CP, (die wir c nennen wollen) und EQ (welche e) und überdies PQ (welches p) ergeben, QF ſelbſt aber, welches GN ſelbſt (oder AX) gleich ſeyn ſoll, wollen wir x nennen, und CF, f; und EF, g; ſo wird FP, $p - x$; und $f = \sqrt{cc + pp - 2px + xx}$, oder kurz $\sqrt{l}$, und $g = \sqrt{ee + xx}$ oder kurz $\sqrt{m}$ werden. Wir haben alſo $\omega = h\sqrt{l} + r\sqrt{m}$, welcher Gleichung ihre Differentialgleichung (angenommen daß $d\omega$, o iſt im Fall der kleinſten) iſt $o = -hdl : 2\sqrt{l} - rdm : 2\sqrt{m}$ die durch die Regeln unſers Calculs gelehrt ſind; dl nun iſt $-2dx - p + x$, und dm iſt $2xdx$, alſo wird: $hp - x : f = rx : m$. Wenn nun dieſes zur Dioptric angewandt wird, und f und m, oder

CF

CF und FE gleich geſetzt werden, weil die nemliche Brechung in dem Punkte F bleibt, die Länge der geraden Linie CF mag ſeyn ſo groß ſie will, ſo wird $hp - x = rx$, oder $h : r :: x : p - x$ oder h zu r wie QF zu FP, das iſt die Sinus der Winkel des Einſchneidens und der Brechung FP und QF werden wechſelſeitig wie r und h, die Dichtheiten der mittlern ſeyn, in welchen die Einſchneidung und Brechung geſchieht. Doch dieſe Dichtheit iſt nicht in Anſehung unſerer ſondern in Anſehung des Widerſtandes den ſie den Stralen des Lichts machen, zu verſtehen. Und ſo hat man den Beweis der Rechnung, die ich anderswo in dieſen Acten ſelbſt ausgeſtellt habe, als ich den allgemeinen Grund der Optik, Catoptrik, und Dioptrik auslegte. Andere gelehrte Männer haben das auf langen Umwegen erreicht, was ein in dieſer Rechnung erfahrner mit drei Zeilen ins künftige leiſten wird. Ich will dieſes noch in einem andern Beyſpiele lehren. Die Curve 133 ſey von einer ſolchen Natur, daß die von jedem Punkte derſelben als 3 zu 6 feſten auf der Axe geſetzten Punkten, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gezogenen Linien, die 6 geraden Linien 34, 35, 36, 37, 38, 39 zugleich addirt, der gegebenen geraden Linie g, gleich ſind. Die Axe T ſey 14526789, und 12 ſey die Abſciſſe, 23 die Ordinate, es wird die Tangente 3T geſucht, ſo wird ſich T2 zu 23 wie $\frac{23}{34} + \frac{23}{35} + \frac{23}{36} + \frac{23}{37} + \frac{23}{38} + \frac{23}{39}$ ſich verhält zu $- \frac{24}{34} - \frac{25}{35} - \frac{26}{36} + \frac{27}{37} + \frac{28}{38} + \frac{22}{39}$ ſich verhalten. Man wird nach eben dieſer Regel verfahren können, bloß daß man die Glieder fortzuſetzen hat, wenn nicht 6 ſondern 10 oder mehrere feſte Punkte angenommen würden, welche nach den bis jetzt bekannten Methoden die Tangenten durch Rechnung herauszubringen, nachdem die irrationalen aufgehoben ſind, die ekelhafteſte und oft unüberwindlichſte Arbeit ſeyn würde, als wenn z. B. die ebenen oder körperlichen Rechtecke nach allen möglichen Binionen oder Ternionen, die aus jenen geraden Linien zuſammengeſetzt ſind, einer gegebenen Größe gleich gemacht werden ſollten. In allen dieſen Fällen, ja in noch weit verwickeltern hat unſere Methode eine weit größere und ſeltene Leichtigkeit. Und dieſe ſind nur der Anfang von einer gewiſſen weit höheren Geometrie, die zu den ſchwerſten und ſchönſten Aufgaben auch der vermiſchten Matheſis gehört, die ohne unſern Differential- oder einen ähnlichen Calcul nicht leicht jemand mit gleicher Leichtigkeit behandeln wird. Zum Anhange will ich noch eine Auflöſung einer Aufgabe hinzufügen, die Carteſius, als ſie ihm von Beau aufgegeben war, im 3ten Bande ſeiner Briefe verſucht, aber nicht aufgelöſet hat. Eine Linie WW zu finden, die ſo beſchaffen iſt, daß wenn die Tangente WC zur Axe gezogen iſt, XC immer der unveränderlichen geraden Linie a gleich ſey. Nun verhält ſich XW oder w zu XC oder a, wie dw zu dx: wenn alſo dx (welche nach Willkühr angenommen werden kann) als eine beſtändige oder immer dieſelbe bleibende, nähmlich b, angenommen würde, oder wenn die x ſelbſt oder AX gleichförmig zunähmen, ſo wird $W = \frac{a}{b} dw$, und die W ſelbſt werden Ordinaten ſeyn, die mit den dw, ihren Incrementen oder Differenzen proportional ſind, das heißt, wenn die x von einer arithmetiſchen Progreſſion ſind, ſo werden die w von einer geometriſchen Progreſſion ſeyn, oder wenn die w Zahlen ſind, werden die x Logarithmen ſeyn: alſo iſt die Linie WW eine logarithmiſche.

Acta Erud. d. A. 1684. p. 467.

Focus, ſiehe Brennpunkt.

Foreſtaff, ſiehe Jacobsſtab.

Formuln (Algebra), heißen ſolche Gleichungen welche General-Auflöſungen der Aufgaben enthalten: da ſie die allgemeine Methode an die Hand geben, alle mögliche Aufgaben aufzulöſen, welche gleiche Bedingungen haben.

Forſtbeſchreibung. Die Nutzbarkeit der Forſtbeſchreibung in Verbindung mit der Forſtkarte, welche man durch Vermeſſung des Forſtes erhält, iſt außer Zweifel. Die Gegenſtände, von welchen die Forſtbeſchreibung Nachricht geben ſoll, ſind folgende: Die Lage, Größe und Gränzen des Forſtes, und ſeiner einzelnen Theile. Ob der Forſt eine warme oder kalte, hohe oder niedrige Lage habe, und welches in deren Anſehnng die herrſchenden Winde ſeyn. Wie viel der Forſt ſowohl überhaupt, als nach Abzug der Blöſſen, Wieſen, Wege u. ſ. w. an Juchtarten enthalte. Wie viel der Antheil, den die Unterthanen an dem Forſte haben, überhaupt und insbeſondere betrage. Ob die Gränzen vollkommen berichtiget ſeyn. Ob und was für Gränzzeichen da ſeyn. Ob und wie ſie nach gewiſſen Jahren beſichtiget und berichtiget worden. Ob der Forſt von den angränzenden Eigenthümern nicht geſchmälert werde, und in wiefern man dagegen geſichert ſey. Wenn die Gränzen ſtreitig ſind, ob das ſtreitige Stück Land von ſo großem Belange ſey, daß die Eintheilung des Forſtes verſchoben werden müſſe. Wie und von wem das ſtreitige Stück genützt worden ſey. Beſchaffenheit des Bodens. Von welcher Art die oberſte Erdfläche ſey. Ob ſie verſchieden, oder in dem ganzen Forſte einerley ſey. Welche Erdart am häufigſten vorkomme. Ob der gute Boden flach- oder tiefgründig ſey. Wie tief die obere gute Erde gehe. Die Holzarten. Ob ihre Natur der Beſchaffenheit des Bodens entſpreche, und ob nicht andere auf demſelben Boden mit beſſerm Erfolg gebauet werden könnten. Welche Holzarten in vermiſchen Oertern die herrſchenden ſeyn. Wenn ſie mit Vortheil gefället werden dürften. Ob ſie bisher in ordentlichen Schlägen abgetrieben worden oder nicht. Auf welche Weiſe ſie bisher fortgepflanzet worden. Ob und wie lange die jungen Schläge gehäget worden, und wie alt ſie ſchon ſeyn. Ob auch ſchlechte Sträucher und Forſtunkräuter da ſeyn. Der Holzbeſtand. Wie groß derſelbe ſey, im Ganzen und einzelnen Theilen, an hartem und welchem Holz, an Brenn-Bau-Nutz-Blockholze, gut, mittelmäßig oder ſchlecht. Der jährliche Abſatz und Zuwachs. Die Feldwege. Ob ſie alle nothwendig ſeyn. Ob nicht mehrere Dörfer an einerley Feldwege angewieſen werden könnten. Die Flüſſe, Bäche, Seen und Weyher. Von welcher Beſchaffenheit dieſe Gewäſſer ſeyn. Wem das Recht zu fiſchen, und mit welchen Bedingungen oder Einſchränkungen, zugehöre. Ob die Flüſſe und Bäche einzureichendes Gefäll haben, etwa eine Maſchine in Bewegung zu ſetzen. Ob ſie flößbar ſeyn, oder wenigſtens es werden könnten. Die Städte, Flecken, Dörfer und einzelne Häuſer welche in oder an dem Forſte liegen. Welche und wie viele Holzarbeiter ſich in demſelben befinden. Wie viele Klafter-Holz von demſelben jährlich verbraucht werden. Die verſchiedenen Werke, die in dem Forſte befindlich ſind. Wem ſie gehören. Was ſie vermöge ihrer Privilegien oder Contracte, an Holz. Kohlen u. dgl. zu empfangen haben. Was ſie dafür geben an Geld oder Naturalien, oder was ſie ſonſt leiſten müſſen. Die Landesherrlichen Rechte, Jagd, Maß, Fiſcherey, Floßweſen u. dgl. Die Rechte der Angränzer. Ob ſie wirklich, oder nur vorgeblich ſeyn, und wie fern ſie mit dem landesherrlichen Intereſſe beſtehen mögen. Die Beholzungs-

zungsgerechtigkeit. Wem ſie zuſtehe, aus welchen Gründen und auf welche Weiſe. Das Beſoldungsholz. Wer es zu beziehen habe, und wie viel Klaftern, ganz forſtfrey oder nicht. Wer es fällen und verführen müſſe. Die Huth und Trift. Bey welchen Dörfern ſie Rechts oder Herkommens ſey, mit Einſchränkung auf eine Zahl und Gattung Vieh, oder nicht, täglich oder nur zu gewiſſen Tagen in der Woche, frey oder gegen Geld, oder nur eine Fruchtabgabe. Der Holzverkauf. Wie die gewöhnlichen Käufer ſeyn. Wornach die Taxen eingerichtet werden. Welche Holzarten am meiſten geſucht werden, und welche am einträglichſten ſeyn. Ob der jährliche Abſatz den Zuwachs nicht überſteige. Steinbrüche, Thongruben, Leimgruben, Torf. Ob und wo ſie ſich vorfinden. Wie ſie genützet werden. Ob nicht ein größerer Vortheil, und welcher aus ſelben zu ziehen wäre.

Forſtcharte heißt die zu Papier gebrachte geometriſche Vermeſſung eines Waldes, auf welcher die Gränzen, die Entfernung der Grenzſteine, die angrenzenden Beſitzungen, mit dem Namen ihrer Eigenthümer, die Lage nach den Himmelsgegenden, die Holzarten nach ihrer verſchiedenen Beſchaffenheit, in Anſehung des Alters, der Güte und der Menge, die Straßen, Wege und Fußſteige nach ihren Richtungen, die Aecker, Wieſen, Blöſen und Huthungen, Berge und Thäler, Bergwerke, Stein und Torfbrüche, Flüſſe, Bäche, Moräſte, Seen und Teiche nebſt den Gegenden, die den Ueberſchwemmungen ausgeſetzt ſind, die eigenen und fremden Dienſtbarkeiten, und die Abtheilung der Waldungen in Reviere, nebſt den ihnen beygelegten Namen enthalten ſeyn müſſen. Alle dieſe Dinge werden durch Zeichen ausgedrückt. Die Zeichen und Farben, welche die gewöhnlichen Gegenſtände auf einer Forſtcharte anzudeuten dienen, ſind folgende: die Hauptgränzen werden ſtark zinnoberroth, die Specialgränzen einzelner Reviere ſchwach zinnoberroth, die Grenzen verſchiedener Abtheilungen des Forſtes, welche ſich in Anſehung der Holzarten, ihres Wachsthums und Alters ergeben, ſchwarz punktirt; die ſtreitigen Gränzen werden bis zur Entſcheidung, nach der Angabe der ſtreitenden Theile, doppelt angemerkt, und die eine blaßgelb, die andere ſehr ſchwach zinnoberroth punktirt. Die Gränzſteine werden durch kleine Quadrate, die Gränzhügel durch kleine Kreiſe, die Grenzbäume durch eben ſolche Kreiſe mit dem darüber ſtehenden Zeichen eines Baumes angedeutet, und mit Zahlen, der Ordnung nach, bezeichnet. Die Lage nach den Weltgegenden zu beſtimmen, wird auf der Karte die wahre Mittagslinie aufgetragen, und durch den Punkt gelegt, aus dem ſie durch vor- und nachmittägliche gleichlange Schatten gefunden worden iſt. Die Holzarten kann man auf die leichteſte und verſtändlichſte Weiſe durch die erſten zwey oder drey Buchſtaben der Wörter, die ſie bezeichnen, anzeigen, und zwar mit groſſer Frakturſchrift, wenn ſie auf Stammholz, mit kleiner, wenn ſie auf Schlagholz betrieben werden. Stehen auf einem Platze mehrere Holzarten bey einander, ſo ſetzt man von allen dieſen die Zeichen hin. Den guten Holzbeſtand kann man durch zwey, denn mittelmäßigen durch einen Strich, den man unter das Zeichen der Holzart macht, andeuten. Den ſchlechten Beſtand zeigt das Zeichen der Holzart, worunter kein Strich befindlich an. Die Wege werden überhaupt bräunlich angelegt; Straßen werden durch zwey parallel laufende Linien angezeigt, wovon die mittlern weiter von einander, als von den beyden äußern abſtehen: Poſtwege durch zwey Parallellinien, Feldwege durch zwey an einander gelegte Linien, deren eine punktirt, die andere ordentlich

lich ausgezogen iſt. Hohlwege werden auf beyden Seiten ſchrafirt. Die Fußſteige werden durch eine punkirte Linie; die Wildbahnen durch eine gerade und eine in Zickzack gezogene Linie angedeutet. Werke und Gebäude werden nach gehöriger Umfaſſung mit Carmin angeleget und mit einem ſchicklichen Zeichen verſehen. Aecker werden durch gelbliche Furchenſtriche angezeiget. Wieſen werden grasgrün, Huth und Weiden blaßgrün angelegt. Blöſſen werden nicht illuminirt. Berge werden mit der Feder ſchrafirt. Flüſſe und Bäche werden längſt ihren durch Tuſchlinien verzeichneten Ufern mit blaßgrüner Farbe angeleget, und mit ganz zarten bläulichten, geſchlängelten Linien ſchrafirt, die nach der Mitte zu ſich verlieren. Die Ueberſchwemmungslinie wird punktirt. Moräſte werden durch feine kurze Parallelſtriche und darauf gezeichnete Pünktchen angedeutet. Die Seen und Teiche werden nach ſchwarz ausgezogenen Uferlinien mit ſtammenweiſe gezogenen Parallelſtrichen entworfen und blasblau illuminirt.

Weſentlicher Inhalt des königl. Preußiſchen Reglements für die Ingenieurs, zu Vermeſſung der Forſten. Dato Berlin d. 10. April 1787.

1. Wenn vom Forſtdepartement die Vermeſſung eines Forſtreviers feſtgeſetzt iſt, ſo muß der Oberingenieur den Ingenieur vorſchlagen, dem die Vermeſſung comittirt werden ſoll, und wenn derſelbe von dem Forſtdepartement approbirt iſt; wird davon der Kammer ſowol, als dem Oberforſtmeiſter und Forſtmeiſter Nachricht ertheilt, und hat der Ingenieur ſich insbeſondere bey beyden letztern und dem Revierforſtbedienten zu melden, ſich bey ſelbigen von allen Umſtänden des Forſts und der Gränzen zu unterrichten, und ſo ſeine Arbeit anzufangen.

2. Alles, was zur Richtigkeit der Arbeit gehöret, auch ausdrücklich die Richtigkeit der Kette und Inſtrumente iſt des Ingenieurs Sache, indem bey Reviſion der Arbeit auf keine Entſchuldigungen, ſie mögen Namen haben wie ſie wollen, attendiret wird. Die Vermeſſungen geſchehen übrigens in ſämtlichen königl. Landen nach Magdeburger Morgen zu 180 Rheinländiſchen □ Ruthen, und die Ruthe zu zehn Decimalfuß.

3. Bey der Vermeſſung iſt es des Ingenieurs Sache, die Auftragung gut und richtig zu beſorgen; es liegt ihm aber ob, auf dieſe Weiſe, oder wenn die erſte Auftragung nicht reinlich genug ausfällt, eine reine Karte auf ſtarkes Realpapier, welches vorhero auf Leinwand gezogen wird: und zwar nach dem Maasſtabe von 50 Ruthen auf den Decimalzoll anzufertigen und einzureichen.

4. In ſämtlichen Karten wird die Lage ſo genommen, daß Norden oben komme, und damit allezeit bei etwanigen Reviſionen über kurz oder lang die Bouſſolen rektificirt werden können, iſt die wahre Mittagslinie, wie ſie nach dem Schatten der Sonne ausgemittelt wird, aufzutragen; und der feſte Punkt, woraus ſie geſucht und gezogen iſt, genau und richtig auf der Karte zu legen.

5. Da es höchſt nöthig iſt, die Gränzen eines Forſts ſicher und richtig zu beſtimmen, ſo müſſen nicht nur ſämtliche Gränzzeichen ordentlich bemerkt und numeriret werden, ſondern es muß auch ein Gränzregiſter beigefüget, und ein Gränzprotocoll aufgenommen werden, deſſen rechtliche Erforderniſſe der dazu adhibirte Juſtizamtmann beſorget. Abſeiten des Forſtamtes darf die Unterſchrift des Oberforſtmeiſters, des Amtmanns und Revierforſtbedienten, auch

auch des Ingenieurs nie ermangeln, und iſt dieſes in allen Fällen (auch wenn nicht der mindeſte Gränzſtreit iſt) zu beobachten.

6. Wenn Gränzen ſtreitig ſind, muß der Unterſchied gemacht werden: ob der Ort ſo ſehr beträchtlich ſey, ſo, daß die ganze Eintheilung des Forſt dadurch behindert und unregelmäßig werden würde; oder ob der Ort von ſo geringem Belange ſey: daß die daran ſtoßenden Schläge jeder etwa nur einige Morgen größer oder kleiner, als die Schläge der übrigen Forſt werden würden. Im letztern Fall iſt die Eintheilung nie aufzuhalten, und die ſtreitige Gränze wird, wenn die Vereinigung vorhero nicht geſchiehet, auf der Karte punktiret: dergeſtalt, daß die Karte mit dieſen Bemerkungen abgeliefert wird. Ereignet ſich hingegen der erſte Fall, ſo muß die Vermeſſung gar nicht angefangen, ſondern erſt die ſtreitige Gränze berichtiget werden; weshalb es zu des Ingenieurs Pflicht gehöret, ehe und bevor er zur Arbeit ſchreitet, ſich nach den Umſtänden des Forſts gründlich zu erkundigen, und wenn ſtreitige Gränzen ſich finden, mit Einſendung eines Situationsplanes anhero zu berichten.

7. Daß die Hügel und Gränzmahle auf der Karte mit Nummern bemerket werden müſſen, verſtehet ſich von ſelbſt: und das Gränzregiſter giebt ſolches ſchon hinlänglich zu erkennen. Es muß aber auch, damit man ſich aus der Karte beſſer vernehmen könne, an den Gränzen rund umher angedeutet werden: ob die heranſtoßende Gegend — Wald oder Feld ſey; und hauptſächliche Oerter oder merkwürdige Gegenſtände in der Nähe, werden gleichfalls angedeutet.

8. In den Forſten ſelbſt kömmt es darauf an, daß nichts ausgelaſſen werde, was die dermalige Größe und Beſchaffenheit des Reviers betrifft, und daß die Einrichtung der Karten und Regiſter dergeſtalt gemacht werde, daß mit leichter Mühe, die zum Forſthaushalt gehörigen Veränderungen darinnen nachgetragen werden können, und alſo die Karten und Regiſter wenigſtens eine lange Reihe von Jahren über, brauchbar bleiben.

Dieſerhalb iſt nothwendig, in den Karten anzudeuten:

a) Die Holzarten.
b) Die Blöſſen und Kämpe in den Forſten, Sandſchollen u. dgl.
c) Die Schonungen, Pflanzungen ꝛc.
d) Die Hütungsgränzen, Wildzäune ꝛc.
e) Die Brache, Wieſen, Seen, Teiche; und darf kein Bruch, welcher einen Magdeburgiſchen Morgen Inhalt hat, ausgelaſſen werden.
f) Die Alleen, Wege, Fußſteige, Geſtelle, Abtheilungen.
g) Alle Flüſſe, Bäche, Brücken und Schleuſen.
h) Wohnungen, Gärten, Theerofen, Glashütten, Schmelzen, und alles was ſich in dem Forſt befindet, und auf Forſt und Jagd Bezug hat; wie denn auch die merkwürdigſten Berge nicht auszulaſſen ſind.

9. Damit alle Karten nach einer Art ausgearbeitet werden, ſind ſie ſämtlich, ſowohl die Brouillons als die reduzirten Karten, genau zu zeichnen und zu koloriren, und müſſen die angenommenen Zeichen und keine andere durchgehends gebraucht werden. Bey melirten Holzarten wird allezeit der Grund nach der dominirenden Holzart angelegt, und alsdann werden die darin melirten Arten, mit der dazu beſtimmten Farbe angedeutet. Wenn aber das Melirte nicht von Importanz iſt, und einen Einfluß in die Holzwirthſchaft haben kann, wird ſolches gänzlich übergangen.

10. Da die Karten nach der bemerkten Art blos ſchwach angeleget ſind, ſo iſt es leicht, mit ſtärkerer Tuſche diejenigen Schläge und Oerter einzufaſſen die ſucceſſive in Schonung geleget werden; wobei das Jahr des Zuſchlages ſchwarz: und das Jahr wenn ſie wieder aufgegeben werden, roth eingeſchrieben wird. Da es auch zuweilen geſchiehet, daß die Holzarten ſich beim Anwuchs ändern, und das Nadelholz das Laubholz verdränget, oder ſich wenigſtens ſehr damit meliret: ſo werden die Schonungen in ſolchem Fall mit der Farbe der entſtehenden Holzart überleget, oder darin angedeutet, welches bey dieſer Art, die Karten zu koloriren, leicht möglich iſt.

11. So wie der Forſt vermeſſen und berechnet iſt, muß der Ingenieur wegen Eintheilung des Forſt, mit dem Oberforſtmeiſter, Forſtmeiſter und Revierförſter conferiren, das Project dazu anfertigen, und zwar mit Tuſche ausziehen, weil die Bleylinien zu leicht verlöſchen: und daſſelbe nebſt dem Brouillon mit ſeinem Berichte an den Oberingenieur ſo einſenden: worauf der Oberingenieur die Vermeſſung in loco revidiret, und wenn er ſie richtig befunden, das Eintheilungsproject geprüft, und mit Zuſtimmung des Oberforſtmeiſters und Forſtmeiſters, auch Revierförſters (indem jeder ſeine Meinung darüber ſchriftlich abzugeben befugt und ſchuldig iſt) gut gefunden hat: ſeinen gutachtlichen Bericht an das Forſtdepartement erſtattet, welches ſodann die Eintheilung feſtſetzt, und dem Ingenieur dazu die Inſtruktion ertheilet.

12. Ehe und bevor die Approbation des Forſtdepartements erfolget iſt, darf nie zur Eintheilung geſchritten werden. Was aber die Unterſuchung der Vermeſſung ſelbſt, durch den Oberingenieur oder den von ihm dazu autoriſirten Reviſor betrifft: ſo iſt zwar die Art, wie ſie gehalten wird, demſelben als einem Kunſtverſtändigen zu überlaſſen: doch iſt er ſchuldig, ſeinem gutachtlichen Berichte an das Forſtdepartement, jederzeit das Reviſionsprotocoll beizulegen, in welchem die Diagonallinien, die Winkel und die Figuren, welche er revidiret hat, benennt und wie ſie getroffen haben, oder abſtimmig geweſen ſind, genau angezeiget werden müſſen: welches Protocoll vom Oberforſtmeiſter, wenn er irgend zugegen ſeyn kann, ohne Ausnahme aber, vom Forſtmeiſter und Revierförſter mit unterſchrieben werden muß.

Sollte die Vermeſſung unrichtig befunden werden, ſo ſind die Fehler entweder von der Art, daß ſie verbeſſert werden können, und alsdann iſt der Ingenieur ſchuldig, ſolches ſogleich unentgeldlich zu bewerkſtelligen; oder ſie ſind ſo beſchaffen, daß die Arbeit ganz verworfen werden muß. Im letztern Falle wird darauf beim Forſtdepartement angetragen, welches darüber, nach vorheriger Superreviſion des Oberbaudepartements ohne alle andere Weitläuftigkeit entſcheidet, und iſt jeder Ingenieur durch Uebernehmung der Arbeit in die Bedingung geſetzt, daß er ſich, ohne weitere Umſtände, Klagen und Proceſſe anzuſtellen, dieſem Deciſo unterwerfen müſſe; wovon jederzeit die Folge iſt, daß er ſeiner Gebühren verluſtig gehet, und die Koſten zu erſtatten ſchuldig iſt.

13. Wenn ſich Forſten finden, welche Ueberſchwemmungen ausgeſetzt ſind, ſo muß der Ingenieur die Linien, wie weit die Ueberſchwemmungen in gewöhnlichen oder zum äußerſten in auſſerordentlichen Jahren gegangen ſind, bemerken; wo aber Flüſſe, Kanäle und Schleuſen ſich befinden, muß er das Gefälle, den Waſſerſtand, und bei den Schleuſen die Höhe ihres Grundbalkens am Rande der Karten an einer bequemen Stelle genau andeuten; welches auch jederzeit bei Mühlen, die mit den Forſten, und daran gelegenen

Wieſen Konnexion haben, zu beobachten iſt; dergeſtalt, daß die Höhe des Fachbaumes, Tempels hervorgehe, wobei wegen des Anerkenntniſſes, und daß die Karte Beweiskraft habe, der Verordnung gemäß, mit Zuziehung der Intereſſenten und Direction einer kompetirenden Gerichtsperſon procediret werden muß.

14. Wenn die Brouillonkarte auf dieſe Art völlig fertig, und die Eintheilung in loco vom Ingenieur berichtiget iſt, die Hauptgeſtelllinien eine Ruthe breit durchgeſchlagen, auch die Nummer und Linienpfähle gehörig bezeichnet, numeriret und geſetzt ſind, werden die Forſtregiſter, und zwar in den beſonders dazu gedruckten Tabellen, (wovon die hinreichende Anzahl auf gutes Schreibpapier dem Ingenieur jederzeit zugeſtellt wird), angefertiget; nähmlich

A) Das verordnete Gränzregiſter.

B) Das Generalforſtregiſter, bei welchem am Ende eine Specialdeſignation der eigenthümlichen und Erbpachtgrundſtücke (daß man ſie leicht bei einander überſehen könne) beigefüget wird.

C) Die Specialtabelle der Schläge und Schonungen.

D) Die Hütungs- und Holzungsbeſchreibung; und endlich, jedoch nur wenn es beſonders befohlen wird.

E) Die Specialregiſter der Holzbeſtände, bei welchen tüchtige und erfahrne Taxatores und Holzkenner zugezogen werden müſſen.

Uebrigens wird auch auf den Karten, allezeit an der Seite, wo ſich immer unbezeichnete ledere Flecken finden, eine Generalrekapitulation des Generalforſtregiſters angebracht, um gleich die Hauptobjecte nachſehen zu können.

15. Wenn auf ſolche Art die ganze Vermeſſung und Eintheilung beendigt iſt, muß der Ingenieur das Brouillon und die Regiſter beim Oberingenieur einreichen, und das Atteſt von der vollendeten Arbeit durch Unterſchrift des Oberforſtmeiſters, Forſtmeiſters, Oberingenieurs und Revierförſters beim Forſtdepartement beibringen: worauf die völlige Abzahlung der vom Oberbaudepartement revidirten Liquidation erfolgt. Damit wegen der Bezahlung alle Zweifel gehoben werden, iſt dabei nach beiliegender Taxe zu verfahren, und muß gleich anfänglich die zu vermeſſende Heyde ohngefähr nach Morgenzahl überſchlagen und abgeſchätzt werden: damit man ohngefähr die Vermeſſungskoſten wiſſen könne, wovon bei Anfang der Arbeit ein Viertel, bei Ablieferung des Brouillons das zweite Viertel, bei der gehaltenen Reviſion das dritte Viertel, und bei Beendigung der Arbeit die ganze Rechnung accurat zugelegt und abgethan wird.

16. Von den abzuliefernden reinen Brouillons zu 50 Ruthen auf den Decimalzoll, werden reducirte Karten verfertiget, und nach den Umſtänden vom Oberingenieur, entweder demſelben Ingenieur, der die Vermeſſung gemacht hat, oder einem andern geſchickten Zeichner aufgetragen; da das Aufmeſſen der Forſten und das Reduciren der Karten ſehr wohl getrennt werden kann.

Von jedem Forſt werden dergleichen reducirte Karten drei Stück verfertiget, nähmlich

a) für das Forſtdepartement zur Kartenkammer;

b) für den Oberforſtmeiſter;

c) für den Revierforſtbedienten.

Die Art der Zeichnung dieſer Karten iſt in allen Stücken einförmig, eben wie das Brouillon auch auf feine Leinwand gezogen wird, und ihre Richtig-

keit iſt vom Oberingenieur zu atteſtiren. Die Forſtregiſter werden dreimal abgeſchrieben, und jedes Exemplar muß förmlich vidimiret werden.

Die Größe der reducirten Karten aber — wird dergeſtalt beſtimmt: daß zweihundert und funfzig Ruthen auf einen Decimalzoll geben, und die Karten nach rheinländiſchen Duodecimalmaſſe, 2 Fuß 11 Zoll Breite, und 1 Fuß 10 Zoll Höhe, ohne Rand haben ſollen; iſt nun der Forſt von der Größe, daß er ſich nicht ganz auf einen ſolchen Bogen bringen läßt, ſo muß das Uebrige auf einen zweiten ſolchen Bogen gezeichnet werden; doch muß der reducirende Ingenieur ſo viel wie möglich iſt, hiebei unnütze Sectionen, worauf wenig ſtehet, vermeiden; dagegen aber die Figur auf eine geſchickte Weiſe — daß der ganze Forſt wo möglich auf einen Bogen zu ſtehen komme, zu wenden ſich bemühen, indeſſen dabei nicht von der Regel abgehen: daß Norden nach oben komme, wenn gleich die Nordlinie nicht juſt perpendiculär, ſondern etwas geſchoben auf der Karte erſcheinen kann; wie denn auch zuweilen, um nicht ganze Sectionen unnützer Weiſe zu machen, Klappen angebracht werden können.

17. Endlich wird hiermit jeder Ingenieur ausdrücklich dahin angewieſen, nie eine alte Karte unterm Vorwand der Rectificirung, Reviſion und dergleichen zum Grunde einer neuen Karte zu legen, und dieſe als eine neue Karte einzureichen: ſondern wenn dergleichen nach vorheriger Unterſuchung ihrer Brauchbarkeit, zum Grunde einer Eintheilung geleget werden, ſo wird die Anfertigung der Karte blos wie eine Kopie, die Eintheilung aber nach der Taxe bezahlet. Indes ſollen dergleichen alte Karten ohne vorherige Reviſion und ohne beſondern Bericht des Oberingenieurs nie gebraucht, ja nicht einmal unter dem Vorwand einer Erleichterung der Vermeſſung u. dgl., dem Ingenieur mit getheilet werden; indem unter dem Anſchein der Erſparung gemeiniglich nichts als unrichtige und doppelte Arbeiten entſtehen.

Forſtgeometrie.

Die Geometrie iſt in der Forſtwiſſenſchaft ein ſehr nothwendiger Theil; ohne dieſelbe erhält der Förſter nie eine ſichere Kenntniß weder von dem Innern ſeines Forſtes, noch von deſſen Gränzen; ohne dieſelbe läßt ſich kein Wald gehörig eintheilen, kein Morgen Wald, ja nicht einmal ein einzelner Baum mit möglichſter Gewißheit ſchätzen. Höhen, und Körpermeſſung ſind dem Förſter ſo unentbehrlich als dem Tuchhändler das Ellenmaß. Alle einzelnen Stämme ſollten nach dem Cubikſchuh verkauft werden. Es iſt ein Fehler, wenn in einigen Ländern die Verſteigerung zur allgemeinen Regel gemacht wird. Alles Nutzholz wird dadurch meiſtens unter ſeinem Werth verkauft. Die Körperrechnung iſt für den Förſter auch in Bezug auf das Brennholz ein weſentlicher Theil; wie will er ſonſt Klaftern in Malter oder Stecken, und letztere in erſtere reduciren? oft kömmt in einem Lande der Fall vielmal vor. Zum Glücke erweitert ſich die Erkenntniß von der Nothwendigkeit der Geometrie im Forſtweſen. Man erſchreckt, wenn man mit ſtolzer Zuverſicht nicht nur einzelne Bäume, ſondern ſogar ganze Diſtricte nach dem bloßen Augenmaße ſchätzen ſieht, und dabey überlegt, daß die leichtſinnigſte Linnenhändlerin es nicht wagt, ein einziges Stück Tuch ohne wirkliche Ausmeſſung zu verkaufen, wenn ſie es bis auf eine Elle ſchätzen könnte. Der Werth des Holzes iſt zu groß, als daß man ſich auf das trügende Augenmaß verlaſſen ſollte. Der junge Förſter hat wenig oder keines, und mit zunehmenden Alter werden ſeine Sehnerven ſchwächer; alſo in dem kurzen Mittelalter ſeines

Dien=

Dienſtes wäre er allein der Mann, dem die Uebung das ſinnliche Maß in ſeinem Auge ſo ziemlich berichtiget hätte. Auch mit dieſer Fähigkeit will man heutiges Tages nicht mehr vorlieb nehmen. Man veranſtaltet für die Beamten und Jäger öffentliche Vorleſungen, um bey den letztern die vorausgegangene Practik durch Theorie zu unterſtützen, und den erſtern ein gutes Fundament zu legen, auf welches ſie die nachfolgende Practik bauen können.

Die hierher gehörigen Schriften ſind folgende.

Der ſicher- und accurate, Gränz- Land- und Forſt-Renovator, von Ge. Chph. Rieckherrn. Stuttg. 1734. 2 B. m. K.

Geißlers Sendſchreiben von geometriſcher Vermeſſung und Eintheilung der Forſten im 15 B. der ök. Nachr. Leipz. 1763 8. S. 152-179.

L'Arpenteur foreſtier, ou methode nouvelle de meſurer, calculer et conſtruire toutes ſortes de figures, ſuivant les principes geometriques et trigonometriques avec un traité d'arpentage, appliqué a la reformation des forêts, trèsutile tant aux Arpenteurs et geographes qu' aux Marchands et proprietaires de boi. Par M. *Gniſt* a Paris 1765. 8. 179. S.

Oettels, Carl Chriſtoph, praktiſcher Beweis, daß die Matheſis bey dem Forſtweſen unentbehrliche Dienſte thue. Eiſenach Griesbach 1765. 8. 9½ B. 1 B. K. rec. ADB 2 B. 2 St. 278. 2te Aufl. 1768.

Mathematiſche Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie, in ſofern ſolche denjenigen, die ſich dem höchſtnöthigen Forſtweſen auf eine vernünftige und gründliche Weiſe widmen wollen, zu wiſſen nöthig ſind, herausgegeben von Joh. Ehrenfr. Vierenklee. Leipz. 1767. 8. 12½ B. m. 11 Kupfert.

Etwas aus der Förſter Rechenkunſt von I. C. B. Stehet im XII B. des allgemeinen Forſt-Magazins Frkf. u. Leipz. gr. 8. 1769. S. 161-174.

Deutliche Anweiſung zum Feldmeſſen, für einen Forſtgerechten Förſter m. K. Göttingen 1773. 12 gl. 108. S. 3. 7 Ktf. ADB. XXIII. 541.

Fehler einiger Forſtleute bey mathematiſchen Aufgaben. 81 Stück des hannoveriſchen Magaz. und 45 Stück der göttinger gemeinnützlichen Abh. 1773.

Werner (G. H.) mathematiſcher Unterricht in Verbeſſerung des Forſtweſens zu Kameral- und allgemeinen Benutzungen, mit Kupf. Bayreuth 1780 ADB. XXXXVI. 448.

Hennert (K) Beyträge zur Forſtwiſſenſchaft aus der praktiſchen Geometrie, mit Kupf. Leipz. 1783. gr. 8.

Ign. Pickel praktiſcher Unterricht, wie man ſich bey Meſſung, Aufzeichnung und Berechnung großer Wälder zu verhalten habe, mit 4 Kpfſtſ. gr. 8. Augsb. 1785 ADB. 66 B. 125 (10 Bog.)

Gruneberger. G. Lehrbuch für die Pfalzbayriſchen Förſter 1r Theil, welches die Anfangsgründe der Rechenk. und Meßk. enthält. München 1788. 8.

von Krechting A. I. Mathematiſche Beyträge zur Forſtwiſſenſchaft. M. K. Gieſſen 1788. 8. ADB. 95 B. 507. ALZ. 1788. I. 831. Ob d. Z. 1788. 402. Goth. g. Z. 1788 I. 393.

Tätzl (G. A.) praktiſche Anleitung zur Forſtwiſſenſchaft, beſonders zur Vermeſſung, Taxierung und Eintheilung der Wälder München 1788. 8. m. 4 K.

Hennert. Anweiſung zu einigen geometriſchen Hülfsmitteln, welche den Forſtbedienten in ſolchen Forſten die in Schläge eingetheilet ſind, bey verſchiedenen

Fällen, nützlich und nothwendig ſeyn können; m. K. Berlin und Stettin 1789 ADB. 87 B. 479. ALZ. 1790. 693 III.

Schreiben an den Verfaſſer der Forſt= und Jagdbibliothek 1789 3. St. N. 9. Enthält Scrupel über planimetriſche Eintheilung der Forſten.

von Oppen Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie für diejenigen, welche ſich dem Forſtweſen widmen. M. Kupf. gr. 8. Berlin G. A. Lange 1792 N. ADB. VI. 255.

Die Geometrie in ihren Grundſätzen und Ausübungen mit beſonderer Anwendung auf Landeskultur und Forſtwiſſenſchaft 1793. Mit Kupfer. München Lindauer.

Wieſenhavers, Anleitung zu der neuen auf Phyſik und Mathematik gegründ. Forſtſchätz. und Forſtflächeneintheil. in jährl. proport. Schläge durch einige auf dieſe Weiſe regulirte Reviere der königl. pr. Forſten Schleſiens, nebſt 3 illum. Kpf. gr. 4. Breslau, Korn d. ält. 1795.

Forſtgrenzzeichen. Bey Gränzbeziehungen werden die Merkmahle, ſo man auch Verſteinerungen und Markſteinſetzen nennt, bald an kenntlichen Bäumen gemacht, bald Gränzpfähle, Gränzſteine u. ſ. w. eingegraben, numerirt und dem Gränzprotokoll beygefüget. Indeß ſind außer Streit die Markſteine die ſicherſten und dauerhafteſten Gränzzeichen; man unterſcheidet ſie durch beliebige kennbare Merkmahle; und ermangelt niemahls, durch mancherley Unterlagen, unter welchen Holzkohlen die beſten und dauerhafteſten ſind, ihre Glaubwürdigkeit zu erhöhen.

Forſtrechenkunſt ſiehe Rechenkunſt (Forſt).

Forſt=Taxation, von Grünberger (Forſtgeom. S. 575).

Wenn bey dem Verkauf von Landgütern Ueberſchläge gemacht werden, ſo kommen ganz natürlich hiebey vorzüglich auch die Waldungen mit in Anſchlag, wenn deren einige vorhanden ſind. Selbſt den Eigenthümern der Wälder iſt daran gelegen, den geſammten Holzbeſtand ihrer Wälder ſo viel möglich zu kennen. Dieſes führt auf die Frage, wie Wälder taxirt oder in Anſchlag gebracht werden ſollen, und wie man den geſammten Holzbeſtand der ſchlagbaren Hölzer ohngefähr erfahren könne. Sind die Wälder ſchon in ordentliche Gehaue gelegt, und forſtmäßig bewirthſchaftet, und man kennt den mittlern Ertrag der Gehaue von mehreren Jahren, ſo thut man am beſten, wenn man dieſen mittlern Ertrag als ein Intereſſe anſiehet, und das dieſem Intereſſe zugehörige Kapital ſucht, und es für den Werth der Waldung annimmt. Das Verhältniß des Intereſſe zum Kapital müſſen die Umſtände des Orts, der Zeit, oder die wechſelſeitige Uebereinkunſt der Käuſer oder Verkäuſer beſtimmen. Um den ganzen Holzbeſtand eines Waldes zu erkennen, verlangen einige eine Durchzählung aller ſchlagbaren Holzſtämme. Eine Art und Weiſe, wie dieſes zu bewerkſtelligen wäre, beruhet ohngefähr auf Folgendem. Man theilt die Stämme z. B. ihrer Größe nach in Rüſtſtangen, Rohr Schindel Sparrenhölzer ꝛc. oder deutlicher zu reden, in 6 bis 9zollige, 9 bis 12zollige, 12 bis 15zöllige, u. ſ. w. ein. Man vergißt aber dabey nicht die verſchiedenen Holzſorten zumal des Nutzholzes beſonders aufzuzeichnen. Zu dieſem Ende läßt man ſich 4 Zoll lange und eines kleinen Fingers dicke hölzerne Nägel verfertigen, ſelbige verſchiedentlich färben, und braucht zur Bezeichnung der Rüſtſtange z. B. die weißen, der Rohrhö zer die ſchwarzen Nägel ꝛc. Wenn man Hand an das Werk ſelbſt legt, ſo wird das abzuzählende Revier mit einem Bindfaden umfangen, die mit den Nägeln verſehenen Förſter aber,

wel=

welche ſich in das eingeſchloſſene Revier begeben, ſtecken z. B. in die Rüſtſtangen weiße, in die Rohrhölzer ſchwarze ꝛc. Nägel. Iſt man mit einem Revier fertig, und weis man ſeinen Vorrath von Nägeln, ſo darf man nur den übriggebliebenen Theil jeder Abtheilung zählen, um die Anzahl der eingeſteckten zu erfahren. Andere, welche zu dieſem Geſchäfte gebraucht werden, und jenen nachgehen, ſehen, theils ob keine Stämme überſehen worden ſind, theils ſammeln ſie die eingeſteckten Nägel wieder ein, wo es gut iſt, wenn alle Nägel auf die Seite geſteckt werden, wo die Einſammler derſelben herkommen. Auf der Seite, an welcher die noch nicht taxirten Reviere ſtoßen, wird der Faden gelaſſen, auf den andern Seiten aber los gemacht, um neue Reviere damit einzuſchließen. Auch können andere Merkmale, als z. B. Anpletzen der Bäume hier mit zu Hülfe genommen werden. Auf dieſe Art verfährt man den ganzen Wald durch, bis man zu Ende iſt. Die Förſter aber, welche taxiren, ſollen zugleich mit auf die verſchiedene Höhe der in den Revieren befindlichen Stämme ſehen, und nach Beſchaffenheit derſelben mit anmerken, wie viel von jeder Sorte zu einer gewiſſen Anzahl von Klaſtern erfordert werden möchten, damit man ſich in der ſogenannten taxmäßigen Berechnung des Forſtes darnach richten könne. Man ſehe hierüber beſonders Vierenklee S. 479. Wenn man endlich für jede Abtheilung der Stämme eine gewiſſe mittlere Dicke und Höhe annimt, ſo laſſen ſie ſich wie Zylinder berechnen, und weil man die Anzahl aller Stämme von jeder angenommenen mittlern Dicke und Höhe kennt, auch die Summe ihrer körperlichen Inhalte leicht finden. Nimmt man die Summe der Kubikinhalte aller Abtheilungen zuſammen, ſo ſoll dieſes den geſammten Holzbeſtand ſo ziemlich hinlänglich in Kubikfußen geben, die man ſodann ganz leicht auf Klafter reduciren kann. Daraus erkennt man, nach der Meinung einiger Forſtverſtändigen, nicht allein den geſammten Holzbeſtand wie er zur Zeit der Durchzählung iſt, ſondern man kann auch vermittelſt eines angenommenen jährlichen mittlern Zuwachſes denſelben für künftige Jahre beſtimmen, und angeben, wie viel jährlich forſtmäßig geſchlagen werden könne.

Wenn man die Eichen, die Bauſtämme, das Well- und Blochholz, die vorzüglicheren Nutzholzſtämme in einem Walde abzählt, um hievon ſeinen Vorrath ohngefähr zu kennen, ſo kann es nicht übel gethan ſeyn. Allein um zu wiſſen, wie viel Klafter der geſammte ſtehende Holzbeſtand betrage, ſcheint dieſes Verfahren wenigſtens nicht mehr zu leiſten als andere, die wir ſogleich anführen werden. Wir wollen hier nichts von den Koſten bey ſehr großen Waldungen reden, welche eine ſolche Durchzählung erfordern würde, auch kein Mißtrauen in die Aufmerkſamkeit der Förſter ſetzen, welche auf dieſe Art taxiren. Allein es muß zu vieles dem Gutdünken und bloßen Augenmaße mehrerer Taxatoren überlaſſen werden, wenn man anders nicht Stamm für Stamm die Umfänge, und Höhen meſſen will. Giebt man auch zu, daß die Schatzung der Stämme aus ihrem Umfange und Höhe bey Nadelhölzern ſo ziemlich leidentlich ausfallen dürfte, ſo ſcheint dieſes doch bey den Laubholzarten mehr Schwierigkeit zu haben. Geſetzt aber, daß man auch auf dieſe Art den geſammten Holzbeſtand genau kennen ſollte, ſo beſtimmt ja dieſes bey dem Kauf und Verkauf den Werth der Wälder nicht allein; es fragt ſich dabey noch, z. B. ob die Gränzen ſtreitig oder nicht, ob und welches Jagdrecht der Beſitzer genießet, welche Gerechtſame die Unterthanen, die Eingeförſteten haben, ob der Boden gut oder ſchlecht, ob eine beſſere Kultur möglich, und welche

che Schwierigkeiten dabey obwalten, wie der Wald in Rückſicht des Transportes, des Abſatzes gelegen ꝛc.

Nach Herrn Oettelt verfährt man bey der Taxation auf folgende Art §. 96. Seite 80, dritte Auflage. „Man meſſe den Forſt aus. Bey der Ausmeſſung e. g. eines Nadelforſtes meſſe man jeden Theil deſſelben beſonders. Man meſſe nähmlich 1. Die ſchlagbaren Hölzer, 2. Die Mittelhölzer, 3. Die gereinigten Hölzer, 4. Die Stangenhölzer, 5. Die jungen Dickigten, 6. Den jungen Wuchs, 7. Schläge ſo zum Wiederanflug Hofnung geben, 8. Die leeren Schläge aus. Bey jeden merke man an, wie er beſtanden, ob z. B. die ſchlagbaren Hölzer wohl beſtanden, geſund und wohl geſchloſſen ſind, oder ob ſie anbrüchig ſchlecht geſchloſſen, dünne ꝛc. ſtehen, ob ſie ſchlank, ſchäftig und hoch, oder ob ſie kürzer ſind, und einen ſchlechten Wuchs haben. Bey jedem Stück nehmen wir Erfahrung und Ueberzeugung zu Hülfe, und bringen es in Anſchlag. Finden wir z. B. eine Gegend ſolcher ſchlagbaren Hölzer, die wohl gebauet und geſchloſſen ſind, finden wir, daß von dergleichen Hölzern 80 Aecker da ſind, wiſſen wir aus der Erfahrung, daß auf einem Acker von dergleichen Hölzern 80 Klafter geſchlagen werden können, ſo machen wir den Ueberſchlag, und rechnen 80mal und 80 machen 6400 Klafter. So viel ſtehen alſo auf dieſen 80 Äckern wohlbeſtandene geſchloſſene Hölzer. — Und auf dieſe Weiſe verfahren wir bey jeder Sorte von Hölzern, und bey jeder Gegend, die wir antreffen, und bringen alles, was wir gefunden, in eine ordentliche Tabelle. Hiebey iſt aber auch zu beobachten, ob wir bey den Hölzern, die wir ausgemeſſen, vieles Werkholz haben, z. B. Blochbäume, die höher ins Geld getrieben werden können, — Noch ferner ziehen wir in Betrachtung, zu was für einem Gebrauch wir nach der Beſchaffenheit der Lage dieſer oder jener Hölzer ſolche verſilbern können. Z. B. auf den Hinterbergen des Thüringerwaldes könnten wir öfters die ſchönſten Bauhölzer fällen. Aber wer kauft ſie ab? Die ſchönſten Bauhölzer müſſen öfters verkohlt werden. Auch dieſes müſſen wir in Betrachtung ziehen. Die Lage einer Waldung hat daher einen ungemeinen Einfluß in den Werth derſelben — laßt uns ſetzen, wir haben einen Acker Holz, ſo ſchlagbar zu nennen, und auf welchem man nach Beſchaffenheit des darauf beſtandenen Holzes 60 Klafter Scheiter, 30 Schocke Reiſig, und 20 Klafter Stöcke ſchlagen kann. Laßt uns ferner ſetzen, die Klafter Holz in ſolcher Gegend wird nach Abzug des Holzmacherlohns vor 1 Reichsthaler 9 gute Groſchen, das Schock Reiſig vor 6 Groſchen, und die Klafter Stöcke von 12 Groſchen verkauft, ſo wird folgen, daß der gedachte Acker Holz 100 Reichsthaler werth ſey. Haben wir nun 20 Acker von dergleichen Hölzern, ſo können wir ſie auf 2000 Thaler taxiren. Den Werth der ſchlagbaren Hölzer legen wir bey der Taxation der übrigen Sorten von Hölzern zum Grunde. Denn die verſchiedenen Sorten von Hölzern ſtehen nach dem verſchiedenen Alter mit einander in einem Verhältniſſe, ſie müſſen alſo auch nach ſolchem Verhältniſſe in Anſchlag gebracht werden. Laßt uns ſetzen, ein Acker Holz ſo 100 Jahr alt iſt, giebt 100 Reichsthaler Ausbeute, und iſt alſo auf 100 Reichsthaler zu taxiren. Wollen wir nun wiſſen, wie viel ein Acker Mittelholz ſo 55 Jahre alt iſt, werth iſt, ſo ſuchen wir das Verhältniß, und rechnen alſo wie ſich 100 Jahre zu 55 Jahren verhalten, ſo verhält ſich ein Acker ſchlagbares Holz von 100 Jahren zu einem Acker Mittelholz von 55 Jahren. Auf dieſe Weiſe wird man finden, daß ein Acker Mittelholz hier auf 55 Reichsthaler zu taxiren ſey. — Auf dieſe Weiſe taxiren

ren wir nach ſolchen Verhältniſſen jedes Stück eines Reviers, ſo in Anſchlag gebracht werden ſoll, und thuen wir dieſes, ſo werden wir den Werth des Ganzen finden. Hat man uns in Anſehung deſſen verſtanden, was wir bisher von der Taxation eines Nadelwaldes beygebracht haben, ſo wird man ſich leicht vorſtellen können, wie man mit der Taxation der Laubhölzer zu verfahren habe. Auch dieſe meſſe man aus, man meſſe jeden Theil des Ganzen, und bemerke deſſen Beſchaffenheit, wie derſelbe beſchaffen, was er für Oberwuchs, was er für Unterwuchs habe? ꝛc. Haben wir einen Acker ſolcher Laubhölzer, die hiebig und 36 bis 40 Jahre alt ſind, wiſſen wir aus der Erfahrung, daß ein ſolcher Acker 40 Reichsthaler Ausbeute gebe, ſo taxiren wir denſelben auch auf 40 Reichsthaler, haben wir 50 Acker dergleichen handbare Laubhölzer, ſo kann man ſolche auf 2000 Reichsthaler anſchlagen. Diejenigen Hölzer aber, die noch nicht hiebig ſind, werden nach dem Verhältniſſe ihres Alters taxirt." So weit Herr Oettelt.

Wollte man den Werth eines Ackers Mittelholzes von 55 Jahren, wovon Herr Oettelt ſpricht, in Rückſicht der ſchlagbaren Hölzer, welche 100 Jahre alt ſind, mit einem Kapital vergleichen, das innerhalb 45 Jahren, welche ſie nöthig haben, haubar zu werden, durch Zinſen, und Zinſen von Zinſen zu 100 Reichsthalern erwächſt, ſo würde derſelbe ſich auf folgende Art berechnen laſſen. Man nenne dieſen Werth x, das Capital welches nach n Jahren daraus mit Zinſen und Zinſen von Zinſen entſteht, ſey $= a$. Das Verhältniß des Capitals zu den Zinſen ſey $= 1 : m$. So iſt $x = (\frac{a}{1+m})^n$. Denn weil $1 : m = x : mx$ iſt, ſo iſt das Capital zu Ende des erſten Jahres ſammt dem Zinſe $= x + mx$. Dieſes als Capital betrachtet, giebt zu Ende des zweyten Jahres am Zins $mx + m^2x$, folglich ſammt dem Capital $x + mx + mx + m^2x = x + 2mx + m^2x = x\ (1 + 2m + m^2) = x(1+m)^2$ ꝛc. Daraus ſieht man ganz leicht, daß das Capital a, welches aus x nach n Jahren entſtanden iſt. $= x\ (1 + m)^n$ ſeyn werde. Folglich, weil $a = x\ (1 + m)^n$ iſt, $x = \frac{a}{(1+m)^n}$ ſeyn müſſe. Z. B. wäre $a = 100$. $n = 45$ $1 : m = 100 : 3$, alſo $m = \frac{3}{100}$. So iſt $x = \frac{100}{(\frac{103}{100})^{45}}$, und $\log x = \log 100 - \log (\frac{103}{100})^{45} = \log 100 - 45 \log (\frac{103}{100}) = \log 26{,}44$. Nach Hrn. Oettelt kommen 55 Reichsthaler für den Werth eines dergleichen Ackers heraus, wenn man nach ſeiner Vorſchrift rechnet.

Man ſieht, daß auf dieſe Art der Werth der Hölzer viel kleiner ausfällt, als wenn man ſelben in dem bloßen Verhältniſſe der Jahre annimmt, und das um ſo mehr, je höhere Zinſen zum Grunde liegen.

Weiß man den Flächeninhalt des ganzen Waldbodens nach Abzug aller leeren verangerten Plätze ꝛc., ſo ſchlage man ein Jahr ſo viel als die jährliche Konſumtion erfodert, an Orten, wo das Holz am beſten, das andere Jahr, wo es am ſchlechteſten beſtanden iſt, und meſſe die Flächeninhalte jedes dieſer Schläge zu 1 Tagwerk, wie die jährliche Konſumtion zu dem was ein gut und ein ſchlecht beſtandenes Tagwerk der Waldung abwirft, verhalten. Nimt man zwiſchen der Ausbeute eines ſchlecht und eines wohl beſtandenen Tagwerks das Mittel, und multiplicirt es mit der Anzahl aller Tagwerke der gan-

 zen

zen Waldung, ſo giebt das Produkt den wahrſcheinlichen Holzbeſtand wenigſtens eben ſo zuverläßig als die oben gelehrte Abzählung der Stämme.

Den eigentlichen wahren Werth eines Waldes beſtimmt unſerer Meinung nach die jährliche forſtmäßige Nutzung, die er abwirft, und immerwährend abwerfen kann, ohne das Holz auszureuten. Ziehet man von dem Betrag der jährlichen forſtmäßigen Nutzung das, was an andere unentgeltlich abgelaſſen werden muß, hinweg, ſo kann der Reſt zu Geld angeſchlagen, und als das Intereſſe eines Capitals angeſehen werden, das dem Werth der Waldung gleichkömmt. Einige ſuchen den geſammten Holzbeſtand in Klaftern, und ſchlagen denſelben zu Gelde an, das was herauskömmt, iſt nach ihrer Meinung der Werth der Waldung. Allein wenn dieſes der Werth der Waldung wäre, ſo müßte immerwährend jährlich ſo viel Holz darin geſchlagen werden können, als das Intereſſe beträgt, das dieſer Werth als Capital betrachtet, nach einem landesüblichen Zinſenfuße abwerfen kann. Man ſetze die Anzahl der Klafter eines Waldes die auf den Stämmen ſtehen = k, der Werth einer Klafter ſey = p. Das Verhältniß des Capitals zum Zins wie 1 : m. So würde auf dieſe Art pk der Werth der ganzen Waldung, und das jährliche Intereſſe von dieſem Werth, als ein Capital betrachtet = pkm ſeyn. Müßten nun jährlich x Klaftern geſchlagen werden, um dieſes Intereſſe herauszubringen, ſo iſt ihr Werth px = pkm. Alſo x = mk Oder 1 : m = k : x. Wären z. B. die Landesüblichen Zinſen, oder die worüber man übereingekommen, 5 vom Hundert, ſo müßten jährlich von jedem Hundert Klaftern, die auf den Stämmen ſtehen, 5 geſchlagen werden. Man ſiehet aber leicht ein, daß ſich die forſtmäßige Nutzung nach andern Grundſätzen als dem Zinſenfuße richten müſſe. Die ganze Schwierigkeit beruhte alſo darinn, wie man die jährliche forſtmäßige Nutzung eines Waldes beſtimmen ſolle. Will man ſie nicht nach den Artikel Schlag berechnen, ſo überlege man, in wie viel Gehaue der Wald gelegt, was eines derſelben abwerfen, auch was man ſonſt noch am Bau- Nutzholz ein Jahr in das andere gerechnet, daraus beziehen könnte, und ſchlage alles zu Gelde an, nach Preiſen, die zu derſelben Zeit am Orte dafür erhalten werden können. Den Betrag davon ſehe man als das Intereſſe eines Capitals an, und ſuche nach einem Landesüblichen, oder demjenigen Zinſenfuße, über welchen man übereingekommen, das dieſem Intereſſe zugehörige Capital. Im übrigen ſehe man aber auch vorzüglich auf die oben angeführten Umſtände, ſo wird ſich ein Ueberſchlag der Waldung nach allen Umſtänden, die ihn beſtimmen, entwerfen laſſen.

Cancrin von einem beſondern Holzanbau... der Taxirung der Waldungen und Eintheilungen in Gehau; in deſſen vermiſchten ökonomiſchen Schriften. Riga 1786. XII.

Däzel (G. A.) praktiſche Anleitung zu Taxirung der Wälder, Bäume, des Brenn- Bau- und Nutzholzes, m. K. München 1786. 8. 2te Auflage u. d. Titel. Praktiſche Anleitung zur Forſtwiſſenſchaft, beſonders zur Taxirung, Vermeſſung und Eintheilung der Wälder. München 1788. 8. m. K.

B. Einen Laubwald zum Erkauf anzuſchlagen. In der Forſt- und Jagdbibliothek 1789 3s Stück. Es wird angenommen, daß kein haubares Holz in dieſem Walde ſtehet, ſondern das älteſte wird erſt in 20 Jahren haubar, die 2te Klaſſe in 28., die 3te in 36 Jahren. Der Morgen Holz, wird nach ſeinem jetzigen Werth taxirt, und für den Grund und Boden 4 Thl.

Thl. pr. Morgen gerechnet, darnach wird bewieſen, daß wenn das Holz haubar, der Käufer Capital, Intereſſen und noch Ueberſchuß behalte. Worauf ſich der Werth 4 Thl. pro Morgen gründet, iſt nicht geſagt, und wohl ſchwerlich als allgemein anzunehmen.

Dalzel (G. A.) über Forſttaxirung und Ausmittelung des jährlichen nachhaltigen Ertrags, mit einer illuminirten Forſtcharte 1793. München, Lindauer 8. ADB. CXVII. 154.

Anleitung zur Taxation und Eintheilung der Laubwaldungen. Nebſt einen illuminirten Plan und 4 Tabellen, von J. M. J. Stuttgard Cotta 1794.

Anleitung zu der neuen, auf Phyſik und Mathematik gegründeten Forſtſchätzung, und Forſtflächen Eintheilung in jährliche proportionirte Schläge, durch einige auf dieſe Weiſe regulirte Reviere der königl. Preußiſchen Forſten Schleſiens, nebſt den dazu gehörigen drey illuminirten Charten beſtätigt und erläutert. Breslau Korn 1794.

Fuß. Franz Unterricht zur Aufnahme, Eintheilung und Abſchätzung der Wälder. Für Forſtbeamte und Förſter. M. K. Prag Herl. 1795. 8.

Hartig, Ge. Ludw. Anweiſung zur Taxation d. Forſte, oder zur Beſtimmung des Holzertrags der Wälder. Mit Tab. u. e. illum. Forſtkarte. gr. 8. Gießen, Heyer. 1795.

Hennerts, E. W. Anweiſung zur Taxation der Forſten nach der bereits in Ausübung gebrachten kön. preuß. Verordnung mit Genehmigung des k. preuß. Forſtdepartements u. ſ. w. herausgegeben. 2ter u. letzter Th. gr. 8. Berlin, Nicolai. 1795.

Wie man die Bäume im Forſte abzählt; ſiehe ökonom. Forſtmag. III. B. S. 5 und 58.

Fractio, ſiehe Bruch.
Fractio continua, ſiehe Bruch continuirlicher.
Fractio fractionis, ſiehe Bruchs = Bruch.
Fractio impropria, ſiehe Baſtardbruch.
Fractio ſpuria, ſiehe Baſtardbruch.
Fractiones aequales, ſiehe Brüche gleiche.
Fractiones aequivalentes, ſiehe Brüche gleiche.
Fractiones diverſae denominationis, ſiehe Brüche von verſchiedener Benennung.
Fractiones ejusdem denominationis, ſiehe Brüche von einerley Benennung.
Fractionum ad minores terminos reductio, ſiehe Bruch aufheben.
Fractionum diverſae denominationis ad eadem reductio, ſiehe Brüche auf einerley Benennung zu bringen.
Franzöſiſches Längenmaß, ſiehe Längenmaß.

Function einer veränderlichen Größe iſt ein algebraiſcher Ausdruck, der auf irgend eine Art, aus dieſer veränderlichen Größe und aus Zahlen oder beſtändigen Größen zuſammen geſetzt iſt.

Ein jeder algebraiſcher Ausdruck, der außer der veränderlichen Größe z, lauter beſtändige Größen enthält, iſt alſo eine Function dieſer z. So ſind $a + 3z$; $az - 4z^2$; $az + b\sqrt{(a^2 - z^2)}$; c^z und ſo weiter Functionen von z.

2. Eine Function einer veränderlichen Größe, iſt daher ſelbſt eine veränderliche Größe. Denn da man für die veränderliche Größe jeden be-

beſtimmten Werth ſetzen kann, ſo kann auch die Function derſelben unzählige beſtimmte Werthe erhalten; ja es läßt ſich, da die veränderliche Größe auch die imaginären Werthe unter ſich begreift, kein beſtimmter Werth gedenken, den die Function nicht ſollte erhalten können. So kann zwar die Function $\sqrt{(9-zz)}$, wenn man für z blos die möglichen Zahlen ſetzet, nie einen größern Werth als 3 bekommen; allein ſetzt man dafür auch die imaginären Zahlen von der Form $5\sqrt{-1}$, ſo läßt ſich kein beſtimmter Werth angeben; den man nicht aus der Formel $\sqrt{(9-zz)}$ ſollte herleiten können. Es giebt indeſſen auch Ausdrücke, die, ob ſie gleich dem Scheine nach zu den Functionen gehören, dennoch nichts anders als beſtändige Größen ſind, weil ſie bey allen Veränderungen, der in ihnen vorkommenden veränderlichen Größe, immer einen und denſelben Werth behalten; z. B.

$$z^0;\ 1^z;\ \frac{a^2-az}{a-z}.$$

3. Der Hauptgrund der Functionen beruhet auf der Art und Weiſe, wie ſie aus der veränderlichen und aus beſtändigen Größen zuſammen geſetzt ſind.

Er hängt alſo von den Operationen ab, durch welche Größen mit einander verbunden werden können, als der Addition, Subtraktion, Multiplication, Diviſion, Erhebung zu Poteſtäten, Extraction der Wurzel, ſo wie auch der Auflöſung der Gleichungen. Außer dieſen ſogenannten algebraiſchen Operationen, giebt es noch eine Menge anderer, welche den Beynahmen der Transcendenten führen, und wohin die Formation der Exponential- und der logarithmiſchen Größen und unzählige andere gehören, welche die Integral-Rechnung an die Hand giebt.

Inzwiſchen können einige Arten der Functionen bemerkt werden; als die vielfachen 2z; 3z: $\frac{3}{5}z$; az; die Poteſtäten von z z. B. z^2; z^3; $z^{\frac{1}{2}}$; z^{-1} u. ſ. w. und ſo wie dieſe auf einer einzigen Operation beruhende Arten, ſo werden auch die Ausdrücke, die durch jede andere Operation entſtehen, mit einem daher genommenen Namen belegt.

4. Man theilet die Functionen in Algebraiſche und Transcendente ein; unter jenen verſtehet man die, in welchen blos die algebraiſchen, unter dieſen aber die, in welchen transcendente Operationen vorkommen.

Es ſind alſo die Vielſachen und die Poteſtäten von z. ſo wie auch alle die Ausdrücke, welche durch die vorhin genannten algebraiſchen Operationen formirt werden z. B. $\frac{a+bz^n-c\sqrt{(2z-zz)}}{aaz-3bz^3}$, algebraiſche Functionen. Ja öfters können die algebraiſchen Functionen nicht einmal entwickelt dargeſtellt werden, wie die Function Z von z, wenn ſie durch folgende Gleichung gegeben wird. $Z^5 = azzZ^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$. Denn obgleich dieſe Gleichung nicht aufgelöſet werden kann, ſo iſt doch ausgemacht, das Z einem gewiſſen, aus der veränderlichen Größe z und verſchiedenen beſtändigen Größen zuſammengeſetzten Ausdrucke gleich, und deswegen eine Function von z iſt. In Anſehung transcendenter Functionen aber iſt zu merken, daß ſie nur dann wirklich tranſcendent ſind, wenn die darinn vorkommende tranſcendente Operation die veränderliche Größe betrifft. Denn wenn die tranſcendenten Operatio-

rationen nur die beſtändigen Größen angehen, ſo bleibt die Function algebraiſch. bedeutet z. B. c den Umkreis eines Zirkels, deſſen Halbmeſſer = 1 iſt: ſo iſt c allerdings eine tranſcendente Größe, aber die Ausdrücke $c + z$; cz^z; $4z^c$; u. dgl. ſind nichts deſto weniger algebraiſche Functionen von z. Wenn übrigens einige Bedenken tragen, z^0 zu den algebraiſchen Functionen zu rechnen, oder Poteſtäten von z mit irrationalen Exponenten, wie $Z^{\sqrt{2}}$ lieber interſcendente als algebraiſche Functionen nennen wollen, ſo iſt das eine Sache von geringer Erheblichkeit.

5. Die algebraiſchen Functionen werden wieder in rationale und in irrationale eingetheilt; jene ſind ſolche, in welchen die veränderliche Größe kein Wurzelzeichen hat, dieſe aber ſolche, in welchen Wurzelzeichen bey der veränderlichen Größe anzutreffen ſind.

In den rationalen Functionen kommen alſo weiter keine Operationen vor, als die Addition, die Subtraction, die Multiplication, die Diviſion, und die Erhebung zu Poteſtäten, deren Exponenten ganze Zahlen ſind: und es ſind alſo $a + z$; $a - z$; az; $\frac{aa + zz}{a + z}$; $az^3 - bz^5$; u. ſ. f. rationale; hingen $\sqrt{z}$; $a + \sqrt{(aa - zz)}$; $\sqrt[3]{(a - 2z + zz)}$; $\frac{aa - z\sqrt{(aa + zz)}}{a + z}$ irrationale Functionen von z.

Die irrationalen Functionen ſind ferner entweder Entwickelte oder Verwickelte.

Entwickelt heißt eine irrationale Function, wenn ſie vermittelſt der Wurzelzeichen abgeſondert dargeſtellt iſt, wie in den angeführten Beyſpielen. Die verwickelten irrationalen Functionen rühren von der Unvollſtändigkeit der Auflöſungskunſt oder Algebra her. So iſt Z eine verwickelte Function von z, wenn es durch die Gleichung $Z^7 = azZ^2 - bZ^5$; gegeben wird; denn man iſt, wenn man auch die Wurzelzeichen gebrauchen will, nicht im Stande, den Werth von Z abgeſondert darzuſtellen.

6. Die rationalen Functionen werden wieder in Ganze und Gebrochene eingetheilt.

In den ganzen rationalen Functionen kommt weder z mit einem negativen Exponenten, noch ein Bruch vor, deſſen Nenner die z enthielte; und gebrochene Functionen ſind alſo ſolche, worinn entweder Brüche mit z im Nenner, oder z mit einem negativen Exponenten vorkommt. Die allgemeine Formel für die ganzen Functionen iſt: $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 +$ u. ſ. w. Denn es läßt ſich keine ganze Function von z gedenken, die nicht in dieſer Formel begriffen ſeyn ſollte. Die allgemeine Formel für die gebrochenen Functionen iſt, da mehrere Brüche in Einen verwandelt werden können,

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4\ fz^5 + \text{etc.}}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4\ \zeta z^5 + \text{etc.}}$$

Die beſtändigen Größen a, b, c, d, ꝛc. α, β, γ, δ, ꝛc. machen keine Veränderung, wie ſie auch immer beſchaffen ſeyn mögen, und man kann ſich darunter ſowohl poſitive als negative; ſowohl ganze als gebrochene, desgleichen rationale, irrationale, ja ſelbſt tranſcendente Größen gedenken.

7. Hiernächſt iſt die Eintheilung der Functionen in Einförmige und Vielförmige zu merken.

Einförmig iſt eine Function, wenn ſie für jeden beſtimmten Werth von z nicht mehr als einen einzigen, vielförmig aber, wenn ſie für jeden beſtimmten Werth von z mehrere beſtimmte Werthe bekömmt. Die rationalen, ganzen ſowohl als gebrochenen, Functionen ſind daher einförmige Functionen; denn ſie geben für jedes beſtimmte z nie mehr als einen beſtimmten Werth, wie man auch z beſtimmen mag. Die irrationalen Functionen hingegen ſind vielförmige, weil die Wurzelzeichen auf mehr als einen Werth führen. Auch die tranſcendenten Functionen ſind theils einförmig, theils vielförmig; ja es giebt darunter ſelbſt unendlich vielförmige, z. B. den Bogen, der zum Sinus x gehört, indem jeder Sinus als ein Sinus von unendlich vielen Bogen betrachtet werden kann. Zur Bezeichnung einzelner einförmigen Functionen wollen wir uns der Buchſtaben P, Q, R, S, T ꝛc. bedienen.

8. Eine Function von z heißt zweyförmig wenn ſie für jeden beſtimmten Werth von z einen doppelten Werth giebt.

Dergleichen Functionen geben die Quadratwurzeln, z. B. $\sqrt{2z + zz}$; denn hier giebt jeder Werth von z einen doppelten Werth, einen poſitiven und einen negativen. Ueberhaupt aber iſt Z eine zweiförmige Function von von z, wenn es durch die quadratiſche Gleichung $Z^2 - PZ + Q = 0$ beſtimmt wird, und P und Q einförmige Functionen von z ſind. Denn es iſt alsdenn $Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$ und z erhält für jeden beſtimmten Werth von z einen doppelten Werth. Uebrigens ſind entweder beyde Werthe von Z reell, oder beyde imaginär, und wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt iſt, ihre Summe = P und ihr Produkt = Q.

9. Eine Function von z heißt dreyförmig, wenn ſie für jeden beſtimmten Werth von z einen dreyfachen Werth giebt.

Dergleichen Funktionen entſpringen aus der Auflöſung der cubiſchen Gleichungen. Sind nähmlich P, Q und R einförmige Functionen von z, und $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$; ſo iſt Z eine dreyförmige Funktion von z, weil es für jeden beſtimmten Werth von z einen dreyfachen Werth bekömmt. Dieſe drey Werthe von Z ſind entweder alle drey reell, oder es iſt ſolches nur der eine, und die beyden übrigen ſind imaginär. Auch iſt bekannt, daß ihre Summe = P, die Summe der Produkte aus je zwey und zweyen von ihnen = Q, und das Produkt aus allen dreyen = R iſt.

10. Eine Function von z heißt vierförmig, wenn ſie für jeden beſtimmten Werth von z einen vierfachen Werth giebt.

Dergleichen Functionen entſpringen aus der Auflöſung der biquadratiſchen Gleichungen. Bedeuten nähmlich P, Q, R, und S einförmige Functionen von z, und iſt $Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0$; ſo iſt Z eine vierförmige Funktion von z, weil Z für jedes beſtimmte z einen vierfachen Werth bekommt. Dieſe vier Werthe ſind nun entweder alle vier reell oder alle vier imaginär, oder es ſind davon zwey reell und zwey imaginär. Ferner iſt ihre Summe = P, die Summe der Produkte aus je zwey und zweyen von ihnen = Q, die Summe aus je drey und dreyen = R, und das Produkt aus allen vieren = S. Auf ähnliche Art verhält es ſich mit den fünfförmigen und den übrigen vielförmigen Functionen.

11. Es iſt alſo Z eine vielförmige Function von z, wenn $Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4}$ — ꝛc. = 0, und alſo Z für jedes beſtimmte z ſo viel beſtimmte Werthe giebt, als n Einheiten enthält.

Es muß aber in n eine ganze Zahl ſeyn, und alſo die Gleichung, wodurch Z gegeben wird, auf die rationale Form gebracht werden, wenn man beurtheilen will, wie vielförmig Z iſt; wo alsdenn der Exponent der höchſten Poteſtät von Z die Menge der Werthe anzeigt, die für jedes beſtimmte z zu Z gehören. Auſſer dem müſſen P, Q, R, S ꝛc. einförmige Functionen von z ſeyn. Denn ſobald einige von dieſen Buchſtaben vielförmige Functionen von z anzeigen, ſo giebt Z für jedes beſtimmte z viel mehr Werthe, als n Einheiten enthält. Sind unter dieſen Werthen imaginäre Werthe, ſo iſt ihre Zahl allezeit gerade; und wenn alſo n eine ungerade Zahl iſt, ſo muß zum wenigſten ein Werth von Z reell ſeyn; iſt aber n eine gerade Zahl, ſo können auch alle Werthe von Z imaginär ſeyn.

12. Wenn Z eine ſolche vielförmige Function von z iſt, daß es nie mehr als einen reellen Werth giebt; ſo wird es gewiſſermaßen eine einförmige Function von z, und kann auch meiſtens als eine einförmige Function gebraucht werden.

Dergleichen Functionen ſind $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P}$ ꝛc. Denn dieſe haben nie mehr als einen reellen Werth, vorausgeſetzt, daß P eine einförmige Function von z iſt. Aus eben der Urſache kann man auch $P^{\frac{m}{n}}$, wenn n eine ungerade Zahl iſt, zu den einförmigen Functionen zählen, m mag eine gerade, oder eine ungerade Zahl ſeyn. Iſt hingegen n eine gerade Zahl, ſo hat $P^{\frac{m}{n}}$ entweder gar keinen oder zwey reelle Werthe; und iſt daher n eine gerade Zahl und $\frac{m}{n}$ ein Bruch, der durch die kleinſten Zahlen ausgedruckt iſt, ſo kann man auch $P^{\frac{m}{n}}$, als eine zweyförmige Function betrachten.

13. Wenn y eine Function von z iſt, ſo iſt auch z eine Function von y.

Denn da y eine Function von z iſt, ſo giebt es, was auch y für eine Function von z ſeyn mag, eine Gleichung, worin y durch z und beſtändige Größen gegeben iſt. Aus dieſer Gleichung läßt ſich aber auch umgekehrt z durch y und beſtändige Größen beſtimmen; und da y eine veränderliche Größe iſt, ſo wird alsdann z einem aus y und aus beſtändigen Größen zuſammen geſetzten Ausdrucke gleich, und alſo eine Function von y. Nun läßt ſich auch beurtheilen, eine wie vielförmige Function z von y iſt, und es kann z eine vielförmige Function von y werden, wenn gleich y eine einförmige Function von z iſt. Iſt z. B. $y^3 = ayz - bzz$; ſo iſt y eine dreyförmige Function von z, allein z nur eine zweyförmige von y.

14. Wenn y und x Functionen von z ſind, ſo iſt auch y eine Function von x, und x eine Function von y.

Denn da y eine Function von z iſt, ſo iſt auch z eine Funktion von y und eben ſo eine Function von x. Folglich iſt die Function von y der Function von x gleich; und da aus dieſer Gleichung ſowohl y durch x als x durch y beſtimmt werden kann, ſo iſt klar, daß y eine Function von x, und x eine Function von y iſt. Oft iſt man zwar wegen der Unzulänglichkeit der Algebra nicht im Stande, dieſe Functionen entwickelt darzuſtellen; allein das hindert die Ueberzeugung von der angeführten Behauptung nicht. Das lehrt die Algebra, wie man aus zwey Gleichungen, davon die eine y und z, die andere hingegen x und z enthält, eine andere herleitet, worin bloß x und y enthalten ſind.

15. Endlich ſind noch einige beſondere Arten von Functionen zu merken. So iſt eine Function eine gerade Function von z, wenn ſie eben denſelben Werth giebt, man mag für z entweder + k oder — k ſetzen.

Eine ſolche gerade Function von z iſt zz; denn mag für z entweder + k oder — k ſetzen, ſo erhält man in beyden Fällen für zz einerley Werth nähmlich $zz = + kk$. Aus eben dem Grunde ſind auch die Poteſtäten von z, z^4, z^6, z^8, und überhaupt z^m, wenn m eine gerade, poſitive entweder oder negative, Zahl iſt, gerade Functionen von z. Ja da auch $z^{\frac{m}{n}}$ zu den einförmigen Functionen gerechnet werden kann, wenn n eine ungerade Zahl iſt; ſo iſt auch $z^{\frac{m}{n}}$ eine gerade Function von z, wenn m eine gerade, n aber eine ungerade Zahl iſt. Es werden daher auch alle Ausdrücke, die aus dergleichen Poteſtäten, auf was für eine Art man will, zuſammengeſetzt ſind, gerade Functionen von z ſeyn. So iſt Z eine gerade Function von z, wenn

$$Z = a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \text{ꝛc. oder}$$

$$Z = \frac{a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \text{ꝛc.}}{\alpha + \beta z^2 + \gamma z^4 + \delta z^6 + \text{ꝛc.}}$$

desgleichen $Z = a + bz^{\frac{2}{3}} + cz^{\frac{2}{7}} + dz^{\frac{4}{7}} + \text{ꝛc.}$

oder $Z = a + bz^{\frac{2}{3}} + cz^{\frac{4}{3}} + dz^{\frac{2}{5}} + \text{ꝛc.}$

$$\text{oder } Z = \frac{a + bz^{\frac{2}{7}} + cz^{\frac{4}{3}} + dz^{\frac{8}{3}}}{\alpha + \beta z^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{\frac{2}{5}} + \delta z^{\frac{4}{7}}}$$

iſt. Und da dergleichen Ausdrücke insgeſammt zu den einförmigen Functionen von z gehören, ſo kann man ſie auch gerade einförmige Functionen von z nennen.

16. Eine vielförmige gerade Function von z iſt eine Function, die zwar für jedes z verſchiedene Werthe, aber doch immer eben daſſelbe giebt, man mag $z = + k$ oder $= - k$ ſetzen.

Es ſey Z eine ſolche vielförmige gerade Funktion von z. Da die Natur einer vielförmigen Funktion durch eine Gleichung zwiſchen Z und z ausgedruckt wird, in welcher Z ſo viel Dimenſionen hat, als es verſchiedene Werthe

the unter ſich begreift: ſo iſt offenbar, daß Z eine vielförmige gerade Function ſeyn wird, wenn die veränderliche Größe z in der Gleichung, welche die Natur von Z ausdruckt, allenthalben eine gerade Anzahl von Dimenſionen hat. So iſt Z eine zweyförmige gerade Function von z, wenn $Z^2 = az^4 Z + bz^2$, und eine dreyförmige, wenn $Z^3 - az^2 Z^2 + bz^4 Z - cz^8 = 0$. Ueberhaupt iſt $Z^2 - PZ + Q = 0$, eine zweyförmige gerade, $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$ eine dreyförmige gerade Function von z, u. ſ. f., wenn P, Q, R, S u. ſ. w. einförmige gerade Functionen von z ſind.

17. Es iſt alſo jede einförmige ſowohl als vielförmige, gerade Function von z ein Ausdruck, der auf die Art aus der veränderlichen Größe z und aus beſtändigen Größen zuſammengeſetzt iſt, daß die Anzahl der Dimenſionen von z allenthalben eine gerade Zahl iſt.

Auſſer den einförmigen Functionen, wovon vorhin ſchon Beyſpiele angeführt worden ſind, gehören alſo hierher, $a + \sqrt{(bb - zz)}$; $azz + \sqrt[5]{(a^6 z^4 - bz^2)}$ desgleichen $az^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{(z^2 + \sqrt{(a^4 - z^4)})}$ u. ſ. w. Hieraus erhellet, daß man die geraden Functionen auch durch Functionen von zz erklären kann.

Denn Z iſt irgend eine Function von y, ſo erhält man, wenn man darin allenthalben zz anſtatt y ſetzt, wie ſolche Function von z, in welcher die Zahl der Dimenſionen von z allenthalben eine gerade Zahl iſt. Doch muß man den Fall ausnehmen, wenn in dem Ausdrucke für Z, $\sqrt{y}$ und andere ähnliche Formen vorkommen, welche dadurch, daß man zz für y ſetzt, die Wurzelzeichen verlieren. Denn wenn auch gleich $y + \sqrt{ay}$ eine Function von y iſt, ſo wird doch dieſer Ausdruck, wenn man $y = zz$ ſetzt, keine gerade Function von z, weil alsdann $y + ay = zz + z\sqrt{a}$ iſt. Dieſe Fälle alſo ausgenommen, ſo iſt die gegebene Erklärung der geraden Functionen richtig, und ſehr brauchbar, wenn man dergleichen Functionen machen will.

18. Eine gerade Function von z iſt eine Function, deren Werth negativ wird, wenn man $-z$ anſtatt z ſetzt.

Dergleichen ungerade Functionen ſind alle Poteſtäten von z, deren Exponenten ungerade Zahlen ſind, z. B. z^1, z^3, z^5, z^7, u. ſ. w. Ferner z^{-1}, z^{-3}, z^{-5} u. ſ. f. ſo wie auch $z^{\frac{m}{n}}$, wenn ſowohl m als n eine ungerade Zahl iſt. Ueberhaupt aber iſt jeder Ausdruck, der aus ſolchen Poteſtäten von z zuſammengeſetzt iſt, eine ungerade Function von z, z. B. $az + bz^3$; $az + az^{-1}$; desgleichen $z^{\frac{1}{3}} + az^{\frac{1}{3}} + bz^{-\frac{5}{3}}$ u. ſ. f. Was aber die Natur dieſer Functionen und die Art und Weiſe betrifft, dergleichen zu erfinden: ſo läßt ſich beydes aus dem, was über die geraden Functionen geſagt worden iſt, leicht abnehmen.

19. Wenn man eine gerade Function von z durch z oder irgend eine ungerade Function von z multiplicirt, ſo iſt das Produkt eine ungerade Function von z.

Es ſey P eine gerade Function von z, die folglich dieſelbe bleibt, wenn man darin $-z$ anſtatt z ſetzt. Setzt man alſo in dem Produkt Pz, $-z$ anſtatt z, ſo erhält man $-Pz$, und Pz iſt daher eine ungerade Function von z, ſo erhält man $-PZ$, und PZ iſt daher eine ungerade Function von z. Hier fließt aus der Erklärung der geraden und ungeraden Function daß P ſtets einer-

nerley Werth behält, man mag z poſitiv oder negativ nehmen, Q aber negativ wird, wenn man darin — z anſtatt Z ſetzt. Es wird alſo auch das Produkt PQ, wenn man z negativ nimmt in — PQ eine ungerade Function von z. So iſt das Produkt aus $a + \sqrt{(aa + zz)}$, einer geraden, und z^3, einer ungeraden Function von z, nähmlich $az^3 + z^3 \sqrt{(aa + zz)}$, eine ungerade Function von z und eben das iſt das Produkt $z \times$.

$$\frac{a + bzz}{\alpha + \beta zz} = \frac{az + bz^3}{\alpha + \beta z^2}.$$

Hieraus erhellet aber auch, daß $\frac{P}{Q}$ oder $\frac{Q}{P}$ eine ungerade Function von z ſeyn wird, wenn von den beyden Functionen P und Q die eine gerade und die andere eine ungerade Function iſt.

20. Wenn eine ungerade Function durch eine ungerade Function multiplicirt oder dividirt wird; ſo iſt das Produkt oder der Quotient eine gerade Function.

Es ſeyen Q und S zwey ungerade Function von z, ſo daß, wenn man — z anſtatt z ſetzt, Q in — Q, und S in — S übergeht: ſo fällt in die Augen, daß ſowohl das Produkt QS als der Quotient $\frac{Q}{S}$ eben denſelben Werth behält, man mag z poſitiv oder negativ nehmen, und es ſind daher beyde gerade Functionen von z. Auch iſt nunmehr offenbar, daß das Quadrat einer ungeraden Function eine gerade, der Cubus aber eine ungerade, das Biquadrat davon wiederum eine gerade Function u. ſ. w. iſt.

21. Wenn y eine ungerade Function von z iſt, ſo iſt auch z eine ungerade Function von y.

Da y eine ungerade Function von z iſt, ſo muß ſich, wenn man — z anſtatt z ſetzt, y in — y verwandeln. Wird daher z durch y beſtimmt, ſo muß auch z in — z übergehen, wenn man — y anſtatt — y ſetzt, und alſo z eine ungerade Function von y ſeyn. Iſt alſo $y = z^3$, folglich y eine ungerade Function von z; ſo iſt aus der Gleichung $z^3 = y$ oder $z = z^{\frac{1}{3}}$, z eine ungerade Function von y. Und da für $y = az + bz^3$, z eine ungerade Function von z iſt, ſo iſt auch, wenn man aus der Gleichung $bz^3 + az = y$ den Werth von z durch y ausdruckt, dieſer Werth eine ungerade Function von y.

22. Wenn die Natur einer Function von y durch eine ſolche Gleichung beſtimmt wird, daß die Dimenſionen, welche y und z zuſammengenommen in einem jeden Gliede haben, entweder allenthalben eine gerade, oder allenthalben eine ungerade Zahl ausmachen; ſo iſt y eine ungerade Function von z.

Denn wenn man in einer ſolchen Function nicht nur — z anſtatt z, ſondern auch — y anſtatt y ſetzt; ſo bleiben entweder alle Glieder der Gleichung unverändert, oder ſie werden negativ; allein die Gleichung bleibt in beyden Fällen dieſelbe. Hieraus erhellet, daß — y eben ſo durch — z als + y durch + z beſtimmt wird, und daß alſo, wenn man — z anſtatt z ſetzt, der Werth von y in — y übergehen, und alſo y eine ungerade Function von z ſeyn muß. Iſt z. B. $yy = ayz + bzz + c$; oder $y^3 + ayyz = byzz + cy + dz$; ſo iſt y aus beyden Gleichungen eine ungerade Function von z.

23. Wenn Z eine Function von z und Y eine Function von y iſt, und Y auf eben die Art durch y und beſtändige Größen beſtimmt wird: ſo werden dieſe Functionen Y und Z ähnliche Functionen von y und z genannt.

So ſind Z und Y ähnliche Functionen von z und y, wenn $Z = a + bz + cz^2$, und $Y = a + by + cy^2$; oder um auch vielförmige Functionen anzuführen, wenn $Z^3 = azzZ + b$, und $Y^3 = ayyY + b$. Wenn daher Y und Z dergleichen ähnliche Functionen von y und z ſind: ſo verwandelt ſich die Function Z, wenn man darin y anſtatt z ſetzt, in die Function Y. Man pflegt dieſe Aehnlichkeit auf die Art auszudrucken, daß man ſagt: Y ſey eine eben ſolche Function von y als Z von z; und dieſe Ausdrücke werden gebraucht, es mögen z und y von einander abhängen oder nicht. Es iſt daher $a(y+n) + b(y+n)^3$ eine eben ſolche Function von $y + n$, als $ay + by^3$ von y; und $\frac{azz + bz + c}{\alpha zz + \beta z + \gamma}$ eine eben ſolche Function von $\frac{1}{z}$, als $\frac{a + bz + czz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$ von z iſt: im erſten Falle iſt $z = y + n$, und im andern $y = \frac{1}{z}$. Hieraus erhellet ſehr deutlich, was es mit der Aehnlichkeit der Functionen, die in der ganzen höhern Analyſe ein Gegenſtand von der äuſerſten Wichtigkeit iſt, für eine Bewandniß hat.

L. Eulers Einleitung in die Analyſis des unendl. überſetzt von Michelſen 1. Buch S. 1.

Function zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen x, y, z iſt ein Ausdruck, der auf irgend eine Art aus dieſen Größen zuſammengeſetzt iſt.

Es iſt alſo $x^3 + xyz + az^2$ eine Function dreyer veränderlichen Größen x, y, z, und es bleibet dieſe Function, wenn auch darinnen eine veränderliche Größe z. B. z beſtimmt, d. h. an ihrer Stelle eine beſtändige Größe geſetzt wird, noch immer eine veränderliche Größe, nähmlich eine Function von x und y; ja wenn auch außer z noch y beſtimmt wäre, ſo iſt ſie doch noch eine Function von x. Es erhält daher eine ſolche Function mehrerer veränderlichen Größen nicht eher einen beſtimmten Werth, als bis alle einzelne veränderliche Größen derſelben beſtimmt ſind. Da nun jede veränderliche Größe auf unendlich viele Arten beſtimmt werden kann, ſo muß eine Function zweyer veränderlichen Größen, da ſie für jede dieſer Größen, unendlich vieler Beſtimmungen fähig iſt, auf unendlichemal unendlich viele Arten beſtimmt werden können. Bey einer Function dreyer veränderlicher Größen, iſt aus eben dem Grunde die Anzahl der Beſtimmungen noch unendlich vielmal gröſſer, und auf eine ähnliche Art wächſt dieſelbe, wenn noch mehr veränderliche Größen da ſind.

2. Man theilet die Functionen mehrerer veränderlicher Größen, eben ſo wie die Functionen einer einzigen, ſehr bequem in algebraiſche und transcendente ein.

Unter jenen verſtehet man ſolche, deren Zuſammenſetzung blos auf algebraiſchen Operationen beruhet, unter dieſen aber diejenigen, zu welchen zugleich transcendente Operationen erfordert werden. Man könnte dieſe letztern von neuen darnach eintheilen, daß die transcendenten Operationen entweder alle, oder nur einige, oder gar nur eine einzige veränderliche Größe angehen können. Man neh-

me z. B den Ausdruck $z^2 + y \log z$. Dies iſt allerdings eine tranſcendente Function von y und z, weil ſie den Log. von Z enthält, aber ſie iſt ſolches gleichwohl nur in einem niedrigen Grade, weil bey der Beſtimmung der veränderlichen Größe z eine algebraiſche Function von y übrig bleibet. Indeſſen wäre es von keinem Nutzen, wenn man durch dergleichen Unterabtheilungen die Unterſuchung weitläuftiger machte.

3. Ferner werden die algebraiſchen Functionen in rationale und irrationale, und die rationalen wieder in ganze und gebrochne eingetheilt.

Was man unter einer jeden dieſer Arten von Functionen zu verſtehen habe, iſt aus dem Artickel Function (4. 5) bekannt. Eine Function iſt nähmlich alsdann rational, wenn keine von den veränderlichen Größen, von welcher ſie eine Function iſt, ein Wurzelzeichen vor ſich hat, und eine ganze Function, wenn darinnen keine veränderlichen Brüche vorkommen, ſo wie in dieſem Falle ein Bruch iſt. Der allgemeine Ausdruck einer ganzen Function zweyer veränderlichen Größen iſt daher:

$$\alpha + \beta y + \gamma z + \delta y^2 + \varepsilon yz + \zeta z^2 + \eta z^3 + \vartheta y^2 z + \iota yz^2 + \varkappa z^3 + \text{ꝛc.};$$

und wenn P und Q dergleichen ganze Functionen entweder zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen bedeuten, ſo iſt $\frac{P}{Q}$ ein allgemeiner Ausdruck der gebrochnen Functionen. Die irrationalen Functionen endlich ſind auch hier wieder entweder entwickelte oder verwickelte; jene werden vermittelſt der Wurzelzeichen abgeſondert dargeſtellt, dieſe aber in einer unauflösbaren Gleichung gegeben. So iſt V eine verwickelte irrationale Function von y und z, wenn $V^5 = (ayz + z^3)V + (y^4 + z^4)V + y^5 + 2ayz^3 + z^5$ iſt.

4. Auch findet bey den gegenwärtigen Functionen die Eintheilung in einförmige und vielförmige eben ſo gut ſtatt, als bey den Functionen einer einzigen veränderlichen Größe.

So ſind rationale Functionen einförmig, weil ſie, wenn man jede ihrer veränderlichen Größen beſtimmt, nicht mehr als einen Werth geben. Läßt man nun P, Q, R, S u. ſ. f. rationale oder einförmige Functionen von x, y, z bedeuten, ſo iſt V eine zweyförmige Function eben dieſer Größen, wenn $V^2 - PV + Q = 0$ iſt; denn in dieſem Falle erhält V, man mag x, y und z, was für einen beſtimmten Werth man will ertheilen, nie Einen, ſondern allezeit einen doppelten beſtimmten Werth. Auf eine ähnliche Art iſt V eine dreyförmige Function, wenn $V^3 - PV^2 + QV - R = 0$: und eine vierförmige, wenn $V^4 - PV^3 + QV^2 - RV + S = 0$ iſt. Hieraus läßt ſich leicht beurtheilen, wie es mit den übrigen vielformigen Functionen beſchaffen iſt.

5. So wie, wenn man eine Function einer veränderlichen Größe $= 0$ ſetzt, dadurch die veränderliche Größe z einen beſtimmten, einfachen entweder oder vielfachen, Werth erhält: ſo wird, wenn man eine Function zweyer veränderlichen Größen x und z gleich 0 ſetzt, jede von dieſen veränderlichen Größen durch die andere beſtimmt, und daher eine Function derſelben, ohnerachtet ſie vorher nicht von einander abhingen. Auf eine ähnliche Art wird, wenn man eine Function dreyer veränderlichen Größen x, y und $z = 0$ ſetzt jede dieſer veränderlichen Größen durch die beyden übrigen beſtimmt, und eine Function derſelben. Eben das geſchiehet, wenn eine Function nicht der Null, ſondern einer beſtändigen Größe oder auch einer andern Function gleich geſetzt wird: denn

denn es wird aus jeder Gleichung, ſoviel veränderliche Größen ſie auch enthalten mag, doch immer die eine veränderliche Größe durch die übrigen beſtimmt, und eine Function derſelben: zwey verſchiedene Gleichungen aber zwiſchen ein und denſelben veränderlichen Größen, beſtimmen je 2 und 2 davon durch die übrigen u. ſ. ſ.

6. Vorzüglich merkwürdig aber iſt die Eintheilung der Functionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen in homogene und heterogene.

Homogen iſt eine Function, wenn darinnen allenthalben eben dieſe Anzahl von Dimenſionen der veränderlichen Größen befindlich iſt; und heterogen, wenn die Anzahl dieſer Dimenſionen verſchieden iſt. Es wird aber hierbey eine jede einzelne veränderliche Größe, für eine Dimenſion, das Quadrat davon, oder ein Produkt aus zweyen für zwey Dimenſionen, ein Produkt aus dreyen, ſie mögen nun einander gleich oder ungleich ſeyn, für drey Dimenſionen gerechnet, u. ſ. w., und auf die beſtändigen Größen ſiehet man bey der Zählung der Dimenſionen gar nicht. Auf dieſe Art leget man den Ausdrükken αy; βz eine; dieſen αy^2; βyz; γz^2 zwey, den folgenden αy^3; $\beta y^2 z$; γyz^2; δz^3 drey; und dieſen αy^4: $\beta y^3 z$: $\gamma y^2 z^2$; δyz^3; εz^4 vier Dimenſionen bey.

Wir wollen dieſe Eintheilung zuvörderſt auf die ganzen Functionen zweyer veränderlichen Größen anwenden, indem mehr veränderliche Größen hier keinen Unterſchied machen.

Es iſt alſo eine ganze Function eine homogene Function, wenn ſich in allen ihren Gliedern, einzeln genommen, eine gleiche Anzahl Dimenſionen findet.

Dieſe Functionen theilet man wiederum ſehr bequem nach der Anzahl der Dimenſionen ein, welche man allenthalben in ihnen antrifft. So iſt $\alpha y + \beta z$ eine allgemeine Form der ganzen Functionen von einer Dimenſion; $\alpha y^2 + \beta yz + \gamma z^2$ hingegen die allgemeine Form der Functionen von zwey Dimenſionen; ferner $\alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma yz^2 + \delta z^3$, die allgemeine Form der Functionen von drey Dimenſionen; $\alpha y^4 + \beta y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta yz^3 + \varepsilon z^4$, die allgemeine Form der Functionen von vier Dimenſionen; u. ſ. f. Nach der Analogie, kann man daher auch eine beſtändige Größe α, ohne alle veränderliche Größe, eine Function von keiner Dimenſion nennen.

8. Eine gebrochne Function iſt ferner homogen, wenn ihr Zähler und Nenner homogene Functionen ſind.

So iſt dieſer Bruch $\frac{ayy + bzz}{\alpha y + \beta z}$ eine homogene Function von y und z. Was aber die Anzahl der Dimenſionen bey dergleichen Functionen betrifft, ſo erhält man ſie, wenn man die Zahl der Dimenſionen im Nenner von der Zahl der Dimenſionen im Zähler abziehet; ſo daß alſo der angeführte Bruch eine Function von einer Dimenſion, und $\frac{y^5 + z^5}{yy + zz}$ eine Function von drey Dimenſionen iſt. Wenn daher der Zähler und Nenner gleiche Mengen von Dimenſionen enthalten, ſo wird der Bruch eine Function von keiner Dimenſion, wie ſolches bey $\frac{y^3 + z^3}{yyz}$, desgleichen bey $\frac{y}{z}$; $\frac{azz}{yy}$; $\frac{\beta y^3}{z^3}$, ſtatt findet: und iſt die Anzahl der Dimenſionen im Nenner größer als im Zähler, ſo wird die Zahl der Dimenſionen des Bruchs negativ, So iſt z. B.

$\frac{y}{zz}$ eine Function von -1 Dimenſionen; $\frac{y+z}{y^4+z^4}$, eine Function von -3 Dimenſionen; $\frac{1}{y^5+ayz^4}$ eine Function von -5 Dimenſionen, weil in dem Zähler gar keine Dimenſion anzutreffen iſt. Uebrigens erhellet von ſelbſt, daß mehrere homogene Functionen, die alle eine und dieſelbe Anzahl von Dimenſionen haben, zu einander addirt, und von einander ſubtrahirt, wieder eine homogene Function von eben der Anzahl von Dimenſionen geben. So iſt der Ausdruck $\alpha y + \frac{\beta zz}{y} + \frac{\gamma y^4 + \delta z^4}{yyz + yzz}$ eine Function von einer, dieſer hingegen $\alpha + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma zz}{yy} + \frac{yy+zz}{yy-zz}$ eine Function von gar keiner Dimenſion.

9. Was bisher von homogenen Functionen geſagt worden iſt, erſtreckt ſich auch auf die irrationalen Functionen. Iſt daher P irgend eine homogene Function, und die Zahl ihrer Dimenſionen alſo n: ſo iſt $\sqrt{P}$ eine Function von $\frac{1}{2}$ n, $\sqrt[3]{P}$ eine Function von $\frac{1}{3}$ n, und überhaupt $P^{\frac{\mu}{\nu}}$ eine Function von $\frac{\mu}{\nu}$ n Dimenſionen. Es iſt folglich $\sqrt{(yy+zz)}$ eine Function von einer, $\sqrt[3]{(y^9+z^9)}$ eine Function von dreyen, $(yz+zz)^{\frac{3}{4}}$ eine Function von $\frac{3}{2}$ Dimenſionen, und $\frac{yy+zz}{\sqrt{(y^4+z^4)}}$ eine Function von keiner Dimenſion. Dieſes mit dem vorhergehenden zuſammen genommen, ſo erhellet, daß $\frac{1}{y}$

$$+ \frac{y\sqrt{(y^2+x^2)}}{z^3} - \frac{y}{\sqrt[3]{(y^6-z^6)}} + \frac{y\sqrt{z}}{z^2\sqrt{y}+\sqrt{(y^5+z^5)}}$$ eine

homogene Function von -1 Dimenſionen iſt.

10. Ob eine verwickelte irrationale Function homogen ſey oder nicht? läßt ſich hieraus leicht erkennen. Es ſey V eine ſolche verwickelte Function, und $V^3 + PV^2 + QV + R = 0$, ſo daß P, Q und R Functionen von y und z ſind. Hier fällt nun zuvörderſt in die Augen daß V keine homogene Function ſeyn kann, wofern nicht auch P, Q und R homogene Functionen ſind. Setzt man ferner die Anzahl der Dimenſionen in V gleich n, ſo iſt V^2 eine Function von 2n und V^3 eine Function von 3n Dimenſionen; und da nun allenthalben eben dieſelbe Anzahl von Dimenſionen ſtatt finden muß, ſo muß P eine Function von n, Q eine Function von 2n, und R eine Function von 3n Dimenſionen ſeyn. Wenn alſo P, Q und R in der Ordnung, in welcher ſie hier ſtehen, homogene Functionen von n, 2n, 3n Dimenſionen ſind, ſo ſchließt man daraus, daß V eine Function von n Dimenſionen ſey. Iſt z. B. $V^5 + (y^4+z^4)V^3 + ay^8 V - z^{10} = 0$; ſo iſt V eine homogene Function von zwey Dimenſionen von y und z.

11.

11. Wenn V eine homogene Function von n Dimenſionen von y und iſt, und man darin allenthalben $y = uz$ ſetzt, ſo verwandelt ſich die Function V in ein Produkt aus der Dignität z^n in eine Function der veränderlichen Größe u. Es werden nähmlich durch die Subſtitution $y = uz$ in alle einzelne Glieder eben ſo hohe Poteſtäten von z gebracht, als ſie vorher von y erhielten: und da die Anzahl der Dimenſionen von y und z in jedem Gliede n war, ſo muß nun die veränderliche Größe z allenthalben n Dimenſionen haben, und alſo in jedem Gliede die Dignität z^n ſeyn. Nunmehr iſt daher auch die Function V durch z^n theilbar, und der Quotient wird, wenn man wirklich theilt, eine Function von der einzigen veränderlichen Größe u. Um dieſes zuvörderſt an einer ganzen Function zu zeigen, ſo ſey $V = \alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3$. Setzt man hier $y = uz$, ſo wird $V = z^3 (\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta)$. Aber auch von den Brüchen gilt dieſe Behauptung. Denn es ſey $V = \frac{\alpha y + \beta z}{yy + zz}$ und alſo eine Function von -1 Dimenſionen. Macht man wieder $y = uz$, ſo wird $V = z^{-1}\left(\frac{\alpha u + \beta}{uu + 1}\right)$. Ja ſelbſt die irrationalen Functionen ſind nicht davon ausgeſchloſſen. Denn iſt $V = \frac{y + \sqrt{(yy + zz)}}{z\sqrt{(y^2 + z^3)}}$, und alſo eine Function von $-\frac{3}{2}$ Dimenſionen: ſo wird, wenn man $y = uz$ ſetzt, $V = z^{\frac{3}{2}} \left(\frac{u + \sqrt{(uu + 1)}}{\sqrt{(u^3 + 1)}}\right)$. Auf dieſe Art laſſen ſich daher die homogenen Functionen zweyer veränderlichen Größſen in Functionen von Einer veränderlichen Größe verwandeln; denn die Poteſtät von z iſt nicht mit in der Function von u enthalten.

12. Wenn alſo V eine homogene Function der beyden veränderlichen Größen y und z von keiner Dimenſion iſt, ſo wird ſie, wenn man $y = uz$ ſetzt, in eine reine Function einer einzigen veränderlichen Größe u verwandelt. Denn da die Zahl der Dimenſionen $= 0$ iſt, ſo wird die Dignität von z, womit die Function von u multiplicirt werden muß, $z^0 = 1$, und in dieſem Falle fällt die veränderliche Größe z ganz aus der Rechnung weg. Iſt z. B. $V = \frac{y + z}{y - z}$, ſo wird, wenn man $y = uz$ ſetzt, $V = \frac{u + 1}{u - 1}$: und iſt die Function irrational, und z. B. $V = \frac{y - \sqrt{(yy - zz)}}{z}$, ſo wird, wenn man $y = uz$ ſetzt, $V = u - \sqrt{(uu - 1)}$.

13. Eine jede ganze homogene Function zweyer veränderlichen Größſen y und z kann in ſo viele einfache Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$ aufgelöſet werden, als ſie Dimenſionen hat. Denn weil die Function homogen iſt, ſo wird ſie durch die Subſtitution $y = uz$ in ein Produkt aus z^n in eine ganze Function von u verwandelt, welche folglich in einfache Faktoren von der Form $\alpha u + \beta$ aufgelöſet werden kann. Multiplicirt man nun alle dieſe Faktoren mit z, ſo wird ein jeder auf die Form $\alpha uz + \beta z = \alpha y + \beta z$ gebracht, indem $uz = y$ iſt; und da z^n ein Multiplicator iſt, ſo entſtehen

ſtehen daher ſo viel ſolcher Faktoren, als n Einheiten hat. Es ſind aber dieſe einfachen Faktoren entweder reell oder imaginär, d. h. die Coefficienten α und β ſind entweder reelle oder imaginäre Größen.

Hieraus folgt alſo, daß die Function von zwey Dimenſionen $ayy + byz + czz$ zwey einfache Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$; die Function $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3$ aber drey einfache Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$ hat; und auf eine ähnliche Art verhält es ſich ferner mit den übrigen ganzen homogenen Functionen von mehrern Dimenſionen *).

*) Die entwickelte Form einer ganzen homogenen Function von y und z iſt:

$$Ay^n + By^{n-1}z + Cy^{n-2}z^2 + Dy^{n-3}z^3 + \ldots + Oz^n$$ und

ſelbige verwandelt ſich durch die Subſtitution $y = uz$ in $z^n (Au^n + Bu^{n-1} + Cu^{n-2} + Du^{n-3} + \ldots + O)$. Da nun

$$Au^n + Bu^{n-1} + Cu^{n-2} + Du^{n-3} + \ldots + O = A \times (u + a)(u + b)(u + c)(u + d) \text{ etc.}$$ iſt: ſo wird

$$z^n (Au^n + Bu^{n-1} + Cu^{n-2} + Du^{n-3} + \ldots + O) = Az^n (u + a)(u + b)(u + c)(u + d) \text{ etc.}$$

und hiervon ſind die Faktoren

$$uz\sqrt[n]{A} + az\sqrt[n]{A};$$
$$uz\sqrt[n]{A} + bz\sqrt[n]{A};$$
$$uz\sqrt[n]{A} + cz\sqrt[n]{A};$$
$$uz\sqrt[n]{A} + dz\sqrt[n]{A};$$ u. ſ. w.

Setzt man alſo in dieſen Faktoren $uz = y$, $\sqrt[n]{A} = \alpha$, und $\sqrt[n]{A}$, mit a oder b oder c oder d ꝛc. multiplicirt, $= \beta$, ſo erhält man für einen jeden die Form $\alpha y + \beta z$.

14. So wie daher der Ausdruck $\alpha y + \beta z$ eine allgemeine Form für die ganzen Functionen von einer Dimenſion iſt: ſo iſt $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)$ eine allgemeine Form der ganzen Functionen von zwey, und $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)(\varepsilon y + \zeta z)$ eine allgemeine Form der ganzen Functionen von drey Dimenſionen; und auf eine ähnliche Art kann man jede ganze homogene Function durch ein Produkt aus ſo viel Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$ darſtellen, als die Function Dimenſionen hat. Man findet aber dieſe Faktoren auf eben die Art durch die Auflöſung der Gleichungen, auf welche nach dem Obigen die einfachen Faktoren der ganzen Functionen Einer veränderlichen Größe gefunden werden. Uebrigens erſtreckt ſich dieſe Eigenſchaft der homogenen Functionen zweyer veränderlichen Größen nicht auf die homogenen Functionen dreyer oder mehrerer veränderlichen Größen: denn die allgemeine Form dieſer Functionen von nicht mehr als zwey Dimenſionen, nähmlich, $\alpha yy + byz + cyx + \delta xz + exx + fzz$, läßt ſich nicht in jedem Falle auf ein Produkt von der Form $(\alpha y + \beta z + \gamma x)(\delta y + \varepsilon z + \zeta x)$ bringen; und noch weniger iſt man im Stande die Functionen von noch mehrern Dimenſionen in dergleichen Produkte zu verwandeln.

15. Aus dem, was von den homogenen Functionen geſagt worden iſt, erhellet zugleich, was man unter einer heterogenen Function zu verſtehen hat; dies ſind nähmlich ſolche, wo in den einzelnen Gliedern nicht allenthalben eben dieſelbe Anzahl von Dimenſionen ſtatt findet. Es laſſen ſich aber die heterogenen Functionen nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden verſchiedenen Dimenſionen in Arten eintheilen. So iſt eine Function zweytheilig, wenn darinn eine doppelte Anzahl von Dimenſionen ſtatt findet, ſo daß man ſie als ein Aggregat zweyer homogenen Functionen, die in der Zahl ihrer Dimenſionen verſchieden ſind, betrachten kann. So iſt $y^5 + 2y^3z^2 + yy + zz$ eine zweytheilige Function, weil ſie theils fünf, theils zwey Dimenſionen enthält. Eine dreytheilige Function hingegen iſt eine ſolche, worin eine dreyfache Anzahl von Dimenſionen angetroffen wird, oder welche in drey homogene Functionen zerlegt werden kann: z. B. $y^6 + y^2z^2 + z^4 + y - z$. Außerdem giebt es aber auch gebrochene und irrationale heterogene Functionen, die ſo vermiſcht ſind, daß ſie in keine homogene Functionen aufgelöſet werden können. $\frac{y^3 + ayz}{by + zz}$; $\frac{a + \sqrt{(yy + zz)}}{yy - bz}$.

16. Bisweilen kann man eine heterogene Function durch eine geſchickte Subſtitution, entweder für eine oder für beyde veränderliche Größen, in eine homogene verwandeln; indeß iſt es nicht leicht, die Fälle anzugeben, wo ſolches geſchehen kann. Es wird daher hinlänglich ſeyn, einige Beyſpiele anzuführen, wobey eine ſolche Reduction ſtatt findet. Iſt alſo die Function $y^5 + zzy + y^3z + \frac{z^3}{y}$ gegeben; ſo fällt bey einiger Ueberlegung in die Augen, daß man dieſelbe durch die Subſtitution $z = xx$ in eine homogene Function verwandeln kann; indem man dadurch $y^5 + x^4y + y^3xx + \frac{x^6}{y}$ erhält, welches eine homogene Function von fünf Dimenſionen von x und y iſt. Ferner wird die Function $y + y^2x + y^3xx + y^5x^4 + \frac{a}{x}$ in eine homogene Function verwandelt, wenn man $x = \frac{1}{z}$ ſetzt; denn man erhält dadurch dieſe Function von einer Dimenſion $y + \frac{yy}{z} + \frac{y^3}{zz} + \frac{y^5}{z^4} + az$. Wenn man aber ſeinen Endzweck nicht durch eine ſo einfache Subſtitution erreichen kann, ſo iſt dieſes Geſchäft mit viel größern Schwierigkeiten verknüpft.

17. Auch verdient noch die ſehr gebräuchliche Eintheilung der ganzen Functionen nach ihrer Ordnung, wobey man auf die größte Zahl der in der Function vorkommenden Dimenſionen ſieht, beſonders bemerkt zu werden. So iſt $xx + yy + zz + ay - aa$ eine Function von der zweyten Ordnung, weil darin zwey Dimenſionen vorkommen; und $y^4 + y^3 - ay^2z + abyz - aayy + b^4$ eine Function von der vierten Ordnung. Auf dieſe Eintheilung nimmt man vorzüglich in der Lehre von den krummen Linien Rückſicht.

18. Endlich iſt noch die Eintheilung der ganzen Functionen in complexe und in incomplexe übrig. Complex nennt man eine Function, wenn man dieſelbe in rationale Faktoren auflöſen kann, oder wenn ſie ein Produkt aus zweyen oder mehrern rationalen Functionen iſt. Ein Beyſpiel einer ſolchen Function giebt $y^4 - z^4 + 2az^3 - 2byzz - aazz + 2abzy - bbyy$, welches ein Produkt aus den beyden Functionen $(yy + zz - az + by)$ $(yy - zz + az - by)$ iſt. Auf dieſe Weiſe haben wir geſehen, daß eine jede ganze homogene Function von nicht mehr als zwey veränderlichen Größen eine complexe Function iſt, weil ſie ſo viel einfache Faktoren von der Form $\alpha z + \beta z$ hat, als ſie Dimenſionen enthält. Incomplex iſt hingegen eine ganze Function, wenn ſie auf keine Art in rationale Faktoren aufgelöſet werden kann; wie $yy + zz - aa$, denn davon fällt ſolches bald in die Augen. Uebrigens ergiebt es ſich bey der Aufſuchung der Diviſoren, ob eine Function complex iſt oder nicht.

Euler Analyſ. d. Unendl. I. 5. K.

Function, algebraiſche irrationale, ſiehe Function 5.

Function, algebraiſche rationale, ſiehe Funktion 5.

Function, algebraiſche, rationale gebrochne, ſiehe Funktion 6.

Function, arithmetiſche. Die Arithmetik iſt fruchtbar an Functionen; eine beſtändige Summe können was immer für zwo veränderliche Zahlen geben, wenn ſie nur zuſammen nicht mehr oder weniger betragen, als die feſtgeſetzte Summe. Denn ſo iſt z. B. $8 + 12 = 20$, oder $9 + 11 = 20$, oder $17 + 3 = 20$; überhaupt $x + y = a$, wo immer die eine abnimmt, wie die andere zugenommen, und umgekehrt. Man kann demnach x oder y weder klein genug, wie obenhin klar iſt, noch auch groß genug ſetzen, ohne daß nicht auch die andere Function einen Werth erhält. Denn ſetzt man x in unſerm Beyſpiel $= 30$, ſo wird y einen negativen Werth bekommen, und -10 heißen. Bey beſtändigen Differenzen hingegen wächſt eine Funktion mit der andern; und nimmt eine mit der andern ab. Z. E. $7 - 3 = 4$, oder $8 - 4 = 4$ oder $6 - 2 = 4$; überhaupt $x - y = d$. Auf eine ähnliche Art läßt ſich auch von beſtändigen Producten und Quotuſſen ſprechen.

Function, complexe, ſiehe Function zweyer oder mehr veränderlicher Größen 18.

Function, dreyförmige, ſiehe Function 9.

Function, einförmige, ſiehe Function 7.

Function, ganze, iſt diejenige, wo keine veränderlichen Größen als Nenner oder Diviſoren vorkommen; z. B. $axy \pm \frac{x^2}{b} \pm \frac{y^2}{c}$; oder $axy \pm \frac{1}{b}x^2 \pm \frac{1}{c}y^2$ ſind ganze Functionen von x und y.

Function, gebrochne, iſt diejenige, in welcher Brüche vorkommen, die im Nenner veränderliche Größen haben. Z. B. $xy \pm \frac{a-b}{-x+y} \pm \frac{c}{-x^2}$.

Function, gerade, ſ. Function 15.

Function, gerade, vielförmige, ſiehe Function 16.

Function, heterogene, iſt diejenige, wo nicht alle Sätze gleich viel veränderliche Dimenſionen haben. z. B. $ax^2 \pm bxyz \pm cz^4$, denn wenn man v ſtatt x, y und z ſchreibet, ſo bekömmt man $av^2 \pm bv^3 \pm cv^4$, wo die veränderlichen Potenzen, und folglich die veränderlichen Dimenſionen ungleich ſind.

Fun-

Function, incomplexe, ſiehe Function zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen 18.

Function, inexplicable, heißen ſolche Functionen, welche ſich weder durch beſtimmte Ausdrücke, noch durch die Wurzeln der Gleichungen darſtellen laſſen, ſo, daß ſie weder zu den algebraiſchen, noch mit Gewißheit zu einer von den Arten der tranſcendenten Functionen gezählet werden können. Eine ſolche Function iſt z. B.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x}$$

welche zwar von x abhängt, aber auf keine Weiſe entwickelt werden kann, wenn x keine ganze Zahl bedeutet. Auf ähnliche Art iſt 1. 2. 3. 4. . . . x eine inexplicable Function, weil, wenn x jede Zahl vorſtellen ſoll, der Werth derſelben weder algebraiſch, noch durch irgend eine Art der tranſcendenten Größen dargeſtellt werden kann. Den Begriff von dergleichen Functionen kann man auf die Reihen gründen.

Kann nähmlich die Summe der Reihe

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots & x \\ A + & B + & C + & D & \ldots\ldots + & X \end{matrix}$$

durch keinen endlichen Ausdruck angegeben werden, ſo giebt dieſe Reihe eine inexplicable Function von x, nähmlich

$$S = A + B + C + D + \ldots\ldots + X.$$

Eben dergleichen erhält man in den Produkten aus den unmittelbar auf einander folgenden Gliedern der Reihen, z. B.

$$P = A\,B\,C\,D \ldots\ldots X$$

die aber vermittelſt der Logarithmen auf die vorige Form gebracht werden können, in dem

$$lP = lA + lB + lC + lD + \ldots\ldots + lX \text{ iſt.}$$

Function, irrationale, iſt diejenige, wo die veränderlichen Größen unter dem Wurzelzeichen ſtehen, oder gebrochene Exponenten haben z. B. $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ oder $(a^2 - x)^{\frac{1}{2}}$, iſt eine irrationale Function von x.

Function, irrationale entwickelte, ſiehe Function 5.

Function, irrationale verwickelte, ſiehe Function 5.

Function, rationale, iſt diejenige, wo die veränderlichen Größen keine Wurzelzeichen oder gebrochene Exponenten haben. z. B. $x\sqrt{(a^2 - b^2)}$ iſt eine rationale Function von x.

Function, trigonometriſche, ſ. dieſe.

Function, unbeſtimmte. Dieſes iſt ein Ausdruck, welcher überhaupt zu erkennen giebt, daß eine Größe eine Function anderer Größen iſt, ohne jedoch zu beſtimmen auf welche Art. Um eine unbeſtimmte Function zu bezeichnen, kann man ſich des deutſchen Buchſtabens (F) bedienen. Es bedeutet alſo

F x eine Function von x.

F (x,y) eine Funktion von x und y.

F (xy), eine Function von xy.

F $(ax + y^2)$, eine Function von $ax + y^2$.

Man beobachte, daß F (xy) nicht überhaupt eine Function von x und y, ſondern von xy, als eine einzige Größe betrachtet, bedeutet. Eben ſo iſt F$(ax + y^2)$ eine Function, nicht von x und y im Allgemeinen, ſondern von $ax + y^2$. Wenn alſo $ax + y^2 = z$, ſo iſt F$(ax + y^2)$ = Fz.

Man kann die Differenziale der unbeſtimmten Functionen auf eine allgemeine Art vorſtellen. Z. E. Es iſt klar, daß das Differenzial einer Function von y, wiederum in einer Function von y beſtehet, welche durch dy multipliciret iſt. Um nun ſolche Functionen vorzuſtellen, die aus andern entſtehen, kann man ſich der Strichlein neben F bedienen. Zum Beyſpiel

$d\mathfrak{F}y = dy\mathfrak{F}'y$

$d\mathfrak{F}'y = dy\mathfrak{F}''y$

$d\,\mathfrak{F}\,(ax + y^2) = d\,(ax + y^2)\,\mathfrak{F}\,(ax + y^2)$

oder $d\,\mathfrak{F}\,(ax + y^2) = (adx + 2ydy)\,\mathfrak{F}'\,(ax + y^2)$

Wenn das Differenzial von $\mathfrak{F}\,(x, y)$ vorgeſtellet werden ſoll, ſo nehme man an, es ſeyn P und Q zwey andere Functionen von x und y, die ſo beſchaffen ſind, daß $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$, ſo wird

$d\,\mathfrak{F}\,(x,y) = (Pdy + Qdx)\,\mathfrak{F}'\,(x,y)$

Es ſey $z = \mathfrak{F}(x, y)$, und $dz = Mdy = Ndx$, ſo entſtehet M, wenn man z in Betrachtung des y allein differenziirt, und das Differenzial durch dz dividiret. Es kann alſo M vorgeſtellet werden durch $\frac{dz}{dy}$, und Mdy durch $\frac{dz}{dy}dy$, wohl verſtanden, daß z in $\frac{dz}{dy}$ nur für y allein differenziirt iſt. Eben ſo kann Ndx durch $\frac{dz}{dx}dx$ vorgeſtellet werden.

Alſo wenn $z = \mathfrak{F}\,(x, y)$

ſo iſt $dz = \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dx}dx$

Die Sätze $\frac{dz}{dy}dy$ und $\frac{dz}{dx}$ ſind die Partial-Differenzen von z. Folglich iſt jede Gleichung zwiſchen z, x, y, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ eine Gleichung von der erſten Ordnung mit Partial-Differenzen.

Von der Integration dieſer Gleichungen ſiehe Integration der unbeſtimmten Partial-Differenzen.

Function, ungerade, ſiehe Function 18.

Function, unſtätige, ſiehe krumme Linie, unſtätige.

Function, vielförmige, ſiehe Function 7.

Function, vierförmige, ſiehe Function 10.

Function, willkührliche, *Functio arbitraria.* Bey Integrirung von Partial-Differenzialgleichungen mit deren veränderlichen Größen, kömmt dieſer Ausdruck vor. Er bedeutet eine Größe, die man nach Gefallen annehmen kann, ohne ein gewiſſes Geſetz zu beobachten, ſelbſt einen Zug aus freyer Hand, wo die Theile ihrer Lage nicht nach dem Geſetze der Stetigkeit ändern, (functio diſcontinua) ſelbſt nicht an einander liegen (f. diſcontigua).

Die Kaiſerl. Akademie zu St. Petersburg gab die Unterſuchung ſolcher Functionen als eine Preisfrage auf. Memoire ſur la nature des fonctions arbitraires, qui entiers dans les intégrales des équations aux differentielles par M. Arbogaſt. Pref. des Math. à Colmar hat den Preis erhal-

erhalten und de Lorgna de functione. arbitrar. das Acceſſit. Die Schriften ſind zu St. Petersburg 1791. gedruckt.

Function, zweyförmige, ſiehe Function 8.

Functionen ähnliche ſiehe Function 23.

Functionen homogene ſind ſolche, wo alle Sätze gleich viel veränderliche Dimenſionen oder Faktoren haben. Z. B.

$$ax^2y \pm bxy^2 \pm cx^3 \pm dy$$

iſt eine homogene Function von x und y, weil in jedem Satze 3 veränderliche Faktoren enthalten ſind, welches am deutlichſten wird, wenn man die Potenzen ohne Exponenten ſcheibt

$$axxy \pm bxyy \pm cxxx \pm dyyy$$

und noch deutlicher wenn man den veränderlichen Größen, denſelbigen Namen giebt, in welchem Fall in allen Sätzen, die nähmliche Potenz der unbekannten Größe entſtehet. Z. E. Man ſchreibe z anſtatt x und y ſo bekömmt man $az^3 \pm bz^3 \pm cz^3 \pm dz^3$.

Functionen aus ihren Differenzen zu finden.

I. Wir haben im Artickel Differenzen der Functionen gezeiget, wie man die Differenz einer jeden Function finden kann, hier aber ſoll gezeiget werden, wie man die Function wieder finden kann, woraus eine gegebene Differenz entſtanden iſt. Aber dieſer Theil der höhern Rechenkunſt iſt weit ſchwerer, als der vorige; oder es iſt vielmehr dieſe Rechnungsart eine beynahe ganz neue Kunſt, worinnen noch vieles zu entdecken iſt.

II. Die Summe einer Function worinnen Differenzen vorkommen, heiſʒt ſo viel, als eine Function, woraus die gegebene Differenzial-Function entſtanden iſt, oder entſtehen kann. Dieſe Summe wird angedeutet durch den Griechiſchen Buchſtaben Σ. Folglich bedeutet dieſer Ausdruck $\Sigma(x\Delta y + yx\Delta + \Delta x \Delta y)$. Die Summe von $(x\Delta y + yx\Delta + \Delta x \Delta y)$ d. i. eine Function von x und y woraus $x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y$ entſtehet wenn man ihre Differenz nimmt. In dem angeführten Exempel, iſt aus dem vorhergehenden Artickel klar, daß die verlangte Summe in der Function xy beſtehet, alſo iſt $\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y) = xy$

III. Die Zeichen Σ und Δ heben einander auf, und verſchwinden beyde, wenn ſie neben einander vor denſelben Größen ſtehen Z. E.

$$\Delta\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y)$$
$$= x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y$$
$$= \Sigma\Delta(xy) = xy$$

In der erſten dieſer beyden Gleichungen iſt

$\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = xy$ nach II.

Nimmt man beyderſeits die Differenzen, ſo kommt

$$\Delta\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y)$$
$$= x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y$$

wo man ſiehet, daß Σ und Δ einander aufheben. In der andern Gleichung iſt

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y$$

nimmt man nun beyderſeits die Summe, ſo iſt

$$\Sigma\Delta(xy) = xy.$$

wo die Zeichen Σ und Δ wiederum einander aufheben.

Anmerkung. Man verwechſle die Bedeutungen, welche die Wörter Differenz und Summe in der Lehre von den Functionen annehmen, nicht mit dem Sinne den ſie ſonſt, in der Arithmetick und Algebra zu haben pflegen. Die Erfinder hätten freylich behutſamer ſeyn können, um ſolche zweydeutige Wörter zu vermeiden. Weil ſie aber eingeführt ſind, ſo müſſen ſie beybehalten werden.

IV. Die Differenz einer Function entſtehet, indem man für jeden Satz insbeſondere die Differenz ſuchet. Wenn alſo die Summe einer Differenzialfunction oder Differenzialgleichung gefunden werden ſoll, ſo kann man ebenfalls die Summe eines jeden Satzes für ſich ſuchen. Geſetzt alſo man habe eine ſolche Differenzialgleichung vor ſich

$\Delta u + \Delta x = \Delta y - \Delta z$ ſo kann die Summe geſchrieben werden

$\Sigma(\Delta u + \Delta x) = \Sigma(\Delta y - \Delta z)$

oder indem man das Zeichen vor jeden Satz ſchreibet

$\Sigma \Delta y + \Sigma \Delta x = \Sigma \Delta y - \Sigma \Delta z$

welches in dieſem Falle, eben ſo viel wäre, als

$u + x = y - z$ ſiehe III.

V. Wenn in einem Producte beſtändige Größen vorkommen, ſo kann man bemerken, daß es gleich viel iſt, ob man die beſtändigen Größen hinter oder vor das Zeichen Δ ſchreibe z. E. Es iſt

$$\Delta ax = a \Delta x$$

$$\Delta axy = a \Delta xy = a(x \Delta y + y \Delta x + \Delta x \Delta y)$$

$$\Delta \frac{x}{a} \text{ oder } \Delta \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \Delta x \text{ oder } \frac{\Delta x}{a}$$

Hieraus folgt, daß in der Summe, die beſtändigen Factoren ſo wohl vor als nach dem Zeichen Σ ſtehen können z. E

$$\Sigma \Delta ax = \Sigma a \Delta x = a \Sigma \Delta x = ax$$

$$\Sigma \Delta axy = \Sigma a \Delta xy = a \Sigma \Delta xy = axy$$

$$\Sigma \Delta \frac{1}{a} x = \Sigma \frac{1}{a} \Delta x = \frac{1}{a} \Sigma \Delta x = \frac{1}{a} x \text{ etc. etc.}$$

VI. Aufgabe. Die Summe von Δx^n finden, in dem man weiß, daß Δx als beſtändig angeſehen wird.

Auflöſung. Es iſt allemal $\Sigma(\Delta x^n) = x \Delta x^{n-1}$

Exempel. $\Sigma \Delta x^4 = x \Delta x^3$

$\Sigma \Delta x^7 = x \Delta x^6$

Beweis

Beweis. Man nehme die Function $x.\Delta x^{n-1}$ und ſuche ihre Differenz, indem man $x+\Delta x$ anſtatt x ſchreibet, und Δx unverändert läßt, hernach aber die gegebene Function ſubtrahirt

$$(x+\Delta x)\Delta x^{n-1} = x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n$$

ſubtrahirt $\quad x\Delta x^{n-1}$

bleibet $\quad \ldots \Delta x^n$

Es iſt alſo Δx^n die Differenz von $x\Delta x^{n-1}$, folglich iſt $x\Delta x^{n-1}$ die Summe von Δx^n

Anmerkung. Man muß ſich nicht wundern, daß die Summe einer Differenzial-Function wiederum eine Differential-Function werden kann. Denn eben ſo wie zu einer Function mehr als einmal die Differenz geſucht werden kann, ſo kann auch wenn man rückwärts gehet, mehr als einmal die Summe geſucht werden. Z. E. wir haben in vorigem Artickel gefunden, wenn Δx als beſtändig betrachtet wird.

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$
$$\Delta^2(xy) = 2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$$
$$\Delta^3(xy) = 3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$$
$$\Delta^4(xy) = 4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$$

Würde die Summe verlangt von

$$4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^3 y$$

oder die Function wovon dieſe Function die Differenz iſt, ſo könnte, wenn Δx als beſtändig betrachtet wird, die verlangte Summe nichts anders ſeyn, als die vorige Differenz, nähmlich

$$3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$$

hievon wieder die Summe $2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$

und hiervon die Summe $x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$

endlich hiervon die Summe xy.

Wenn alſo eine Differenz von der nten Ordnung gegeben iſt, ſo muß auch nmal die Summe geſucht werden, bis daß man auf die erſte Function kömmt, welche keine Differenzen enthält.

VII. Aufgabe. Die Summe von $x^n\Delta x$ zu finden.

Auflöſung. Man gebrauche folgende Formeln.

$$\Sigma(x\Delta x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2}$$

$$\Sigma(x^2\Delta x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6}$$

$$\Sigma(x^3\Delta x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3\Delta x}{2} + \frac{x^2\Delta x^2}{4} \text{ etc. etc.}$$

Beweis. Die erſte Formel wird alſo bewieſen. Wenn man für x^2 die Differenz nimmt ſo kömmt $\Delta(x^2) = 2x\Delta x + \Delta x^2$

man nehme die Summe ſo kommt $x^2 = 2\Sigma x\Delta x + \Sigma\Delta x$

daher

daher $x^2 - \Sigma 4 x = 2 \Sigma x \Delta x$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{\Sigma \Delta x}{2} = \Sigma x \Delta x$$

Es iſt alſo vermöge voriger Aufgabe $\Sigma \Delta x^2 = x \Delta x$ folglich

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x \Delta x}{2} = \Sigma (x \Delta x)$$

welches die erſte Formel iſt. Die zweyte Formel wird auf ähnliche Art gefunden: es iſt $\Delta (x^3) = 3 x^2 \Delta x + 3 x \Delta x^2 + \Delta x^3$.

Wenn man die Summe nimmt ſo kömmt

$$x^3 = 3 \Sigma x^2 \Delta x + 3 \Sigma x \Delta x^2 + x \Delta x^2$$

Um den Satz $3 \Sigma x \Delta x^2$ zu finden, betrachte man, daß Δx als beſtändig angeſehen wird. Alſo iſt $3 \Sigma x \Delta x^2$ oder

$$3 \Sigma x \Delta x \Delta x = 3 \Delta x. \ \Sigma x \Delta x.$$

Es iſt aber aus voriger Formel $\Sigma x \Delta x = \frac{x^2}{2} - \frac{x \Delta x}{2}$ folglich $3 \Delta x \Sigma x \Delta x$

$$= \frac{3 x^2 \Delta x}{2} - \frac{3 x \Delta x^2}{2}$$

Setzet man dieſen Werth in die letzte Gleichung, ſo kömmt

$$x^3 = \Sigma x^2 \Delta x + \frac{3 x^2 \Delta x}{2} - \frac{3 x \Delta x^2}{2} + x \Delta x^2$$

oder $2x^3 = 6 \Sigma x^2 \Delta x + 3 x^2 \Delta x - 3 x \Delta x^2 + x \Delta x^2$

oder $2x^3 = 6 \Sigma x^2 \Delta x + 3 x^2 \Delta x + x \Delta x^2$

daher $2x^3 - 3 x^2 \Delta x + x \Delta x^2 = 6 \Sigma x^2 \Delta x$

und $\frac{x^3}{2} - \frac{x^2 \Delta x}{2} + \frac{x \Delta x^2}{6} = \Sigma x^2 \Delta x$

Um die dritte Formel zu finden betrachte man, daß

$$\Delta (x^4) = \Delta x^3 \Delta x + 6 x^2 \Delta x^2 + \Delta x \Delta x^3 + \Delta x^4$$

Man ſuche die Summe der Sätze

1. $\Sigma \Delta (x^4) = x^4$
2. $\Sigma \Delta x^3 \Delta x = 4 \Sigma x^3 \Delta x$
3. $6 \Sigma x^2 \Delta x^2 = 6 \Delta x \Sigma x^2 \Delta x$. Da aus voriger Formel $\Sigma x^2 \Delta x$ gefunden worden, ſo darf man dieſelbe nur mit $6 \Delta x$ multipliciren, und man bekömmt $2 x^3 \Delta x - 3 x^2 \Delta x^2 + x \Delta x^3$
4. $4 \Sigma x \Delta x^3 = \Delta x^2 \Sigma x \Delta x$. Da aus der erſten Formel $\Sigma x \Delta x$ gefunden worden, ſo multiplicirt man noch jene Formel mit $4 \Delta x^2$, ſo hat man $2x^2 \Delta x^2 - 2 x \Delta x^3$
5. $\Sigma \Delta x^4 = x \Delta x^3$ aus voriger Aufgabe.

Setzet man nun alle dieſe Summen zuſammen, ſo wird

$$x^4 = 4 \Sigma x^3 \Delta x + 2 x^3 \Delta x - 3 x^2 \Delta x^2 + x \Delta x^3$$
$$+ 2 x^2 \Delta x^2 - 2 x \Delta x^3$$
$$x \Delta x^3$$

$$x^4 = 4 \Sigma x^3 \Delta x + 2 x^3 \Delta x - x^2 \Delta x^2$$

Oder

Oder $x^4 - 2x^3\,\Delta x + x^2\,\Delta x^2 = 4\,\Delta x^3\,\Delta x$

oder $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3\,\Delta x}{2} + \frac{x^2\,\Delta x^2}{4} = \Delta x^3\,\Delta x$

Auf eine ähnliche Art ließen ſich die Formeln und deren Beweiſe weiter fortſetzen.

VIII. Aufgabe. Die Summe von Δx^n und $x^n\,\Delta x$ zu finden, in dem Falle wo $\Delta x = 1$ iſt.

Aufloͤſung. Man bediene ſich der Formeln, die in beyden vorigen Aufgaben angeführt worden, und ſetze in denſelben allenthalben 1 für Δx, auf dieſe Art bekommt man die gehörigen Formeln.

Weil $\Sigma\Delta x^n = x\Delta x^{n-1}$

$$\Sigma x\,\Delta x = \frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2}$$

$$\Sigma x^2\,\Delta x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\,\Delta x}{2} + \frac{x\,\Delta x^2}{6}$$

$$\Sigma(x^3\,\Delta x) = \frac{x}{4} - \frac{x^3\,\Delta x}{2} + \frac{x^2\,\Delta x^2}{4}$$

ſo wird, wenn $\Delta x = 1$

$$\Sigma 1 = x$$

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$$

IX. Wenn man die Differenz einer Function ſucht, ſo verſchwindet allemal der Satz, welcher blos beſtändige Größen enthält.

Es ſey $ax = b + cy$

ſo iſt die Differenzial-Gleichung $a\,\Delta x = c\,\Delta y$

hier iſt die beſtändige Größe verſchwunden, und nimmt man die Summe, ſo kommt nur $ax = cy$

wo das b gänzlich mangelt. Deswegen muß man, wenn man wie gewöhnlich die Summe einer Function gefunden; noch eine willkührliche beſtändige Größe (Conſtante arbitrari) zu ſetzen. Z. E. wenn man hier gefunden, daß wenn $\Delta x = 1$, ſo iſt

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

dieſe Summe aber iſt noch nicht vollſtändig, ſondern man muß ſagen

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + C$$

indem man unter C alle mögliche beſtändige Größen verſtehet. Man kann z. E. annehmen $c = 0$, $c = 1$ $c = 2$, $c = \sqrt{3}$ und ſ. f. jeder Werth den man der Größe C giebt, wird der gefundenen Summe auch einen beſondern Werth geben. So viel man alſo verſchiedene Werthe von c annimmt, ſo viel bekömmt man verſchiedene Summen, die alle in der allgemeinen Summe, welche das C bey ſich führt, begriffen ſind.

Uebrigens weil in einer Function oder Gleichung, alle blos bekannte Sätze als ein einziger betrachtet werden können, ſo braucht man bey der Summe auch nur eine einzige willkührliche Größe anzuſetzen, welche jede einfache oder complexe beſtändige Größe vorſtellen kann.

X. Aufgabe den Werth der willkührlichen Größe für jeden beſondern Fall zu finden.

Auflöſung. Wenn man die Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen gefunden hat, ſo beſtimme man aus der Natur der Aufgabe, oder aus freyen Willen, welchen beſtimmten Werth die eine veränderliche Größe bekommen ſoll, wenn die andere auch einen gewiſſen Werth bekömmt. Dieſe beſtimmten Werthe ſetze man in die Gleichung, ſo kann man den gehörigen Werth von c daraus ziehen.

Exempel. Es ſey $\Delta y = a \Delta x$

ſo wird $y = ax + C$

Geſezt man will, daß $y = a^2$ werden ſoll, wen $x = 1$ wird, ſo bekommt man $a^2 = a + C$

$a^2 - a = C$

In dieſem Falle muß folglich die beſondere Summe alſo geſchrieben werden

$$y = ax + a^2 - a$$

und in der That wird hier $x = 1$, ſo iſt $y = a + a^2 - a = a^2$

Geſetzt man will, daß $y = \frac{1}{2}a$ werden ſoll, wenn $x = 0$ wird, ſo hat man

$\frac{1}{2}a = 0 + C$

$\frac{1}{2}a = C$

und die beſondere Summe iſt für dieſen Fall $y = ax + \frac{1}{2}a$

Wenn hier $x = 0$ wird, ſo wird y verlangtermaßen $= \frac{1}{2}a$

a. Iſt die Gleichung zwiſchen mehr als zwey veränderlichen Größen, ſo muß man beſtimmen was eine derſelben werden ſoll, wenn alle andere einen beſtimmten Werth bekommen. Z. E. Geſezt man hatte gefunden.

$$x^2 y = 3z^3 + C.$$

und es ſoll z werden $= 10$, wenn $x = 1$ und $y = 2$ wird; ſo bekommt man

$$2 = 3.\, z^3 + C$$

$$2 = 3000 + C$$

$$\frac{2}{3000} = C = \frac{1}{1500}$$

und die Gleichung wird

$$x^2 y = 3z^3 + \frac{1}{1500}$$

b. Wenn man die allgemeine Summe einer Function geſucht hat, ſo kann man die Function einer veränderlichen Größe Z gleich ſetzen, und dann beſtimmen

ſtimmen, was Z oder die ganze Function werden ſoll, wenn die veränderlichen Größen einen gewiſſen Werth bekommen. Es ſey gefunden worden $ax^2 + bx + C$, ſo ſetze man

$$Z = ax^2 + bx + C$$

Soll nun z. E. die ganze Function = o werden, wenn x = 1, ſo iſt

$$o = a + b + C$$
$$-a - b = C$$

folglich $Z = ax^2 + bx - a - b$

c. Der gewöhnlichſte Fall iſt dieſer, daß die Function einer einzigen veränderlichen Größe null werden ſoll, wenn die Größe ſelbſt o wird. In dieſem Falle muß C = o ſeyn, oder es iſt keine willkührliche Größe zuzuſetzen.

denn es ſey $Z = ax + bx^2 + cx^3 + C$

wird nun x = o und Z = o

ſo iſt $o = o + C$

oder $o = C$

folglich bleibt die gefundene Function ohne willkührliche Größe.

L. Euler. Inveſtigatio Functionum ex data differentialium conditione in nouis comm. acad. ſc. Petrop. 1762. 1763. Vol. IX. pag. 170.

Functionen, Beſtimmung ihres Werthes wenn ſie in gewiſſen Fällen unbeſtimmt ſcheinen.

1. Wenn y irgend eine gebrochene Funktion von x z. E. $\frac{P}{Q}$ iſt, derer Zähler und Nenner, wenn man für x einen gewiſſen Werth ſezt, zugleich verſchwinden; ſo wird in dieſem Falle der Bruch $\frac{P}{Q}$, welcher der Werth von y ausdrückt, $= \frac{o}{o}$, und kann alsdenn eben ſo wohl eine endliche als eine unendliche, und in dieſem Falle eben ſowohl eine unendlich große als unendlich kleine Größe anzeigen. Auf dieſe Art aber läßt ſich daraus der Werth von y in dieſem Falle gar nicht erkennen, und ſcheint alſo unbeſtimmt zu ſeyn. Da indeß y in jedem andern Falle einem beſtimmten Werth bekommt, wenn man für x eine beſtimmte Größe ſetzt: ſo iſt leicht einzuſehen, daß auch in dem beſchriebenen Falle keine Unbeſtimmtheit ſtatt finden könne. Auch überzeugt man ſich davon leicht, wenn man $y = \frac{aa - xx}{a - x}$ ſetzt. Dieſe Function giebt allerdings auch $y = \frac{o}{o}$, wenn man x = a ſetzt; allein da man Zähler und Nenner durch a — x dividiren kann, und alsdann y = a + x wird: ſo iſt klar, daß für x = a, y = 2a werde, ſo daß in dieſem Falle $\frac{o}{o} = 2a$ geſetzt werden muß.

2. Da wir wiſſen, daß die Nullen zu einander jegliches Verhältniß haben können: ſo erfordert das Verhältniß, welches der Zähler und Nenner in dieſen Fällen zu einander haben, eine beſondere Unterſuchung. Gleichwohl zeigen die Nullen an ſich nichts verſchiedenes an, und man muß daher an ihrer Stelle die unendlich kleinen Größen brauchen. Denn wenn dieſe Größen in ihrer Bedeutung auch nicht von Null verſchieden ſind, ſo läßt ſich doch aus ihren Functionen, welche den Zähler und Nenner ausmachen, der Werth des Bruchs leicht ſchließen. Hat man z. B. den Bruch $\frac{adx}{bdx}$, ſo iſt zwar im

Grunde der Zähler ſowohl als der Nenner = o: allein gleichwohl fällt in die Augen, daß der Werth des Bruchs beſtimmt, und = $\frac{a}{b}$ ſey. Iſt hingegen der Bruch $\frac{adx^2}{bdx}$ gegeben, ſo iſt ſein Werth allerdings Null, ſo wie der Werth von $\frac{adx}{bdx^2}$ unendlich groß. Braucht man daher ſtatt der Nullen, die öfters im Calcul vorkommen, die unendlich kleinen Größen, ſo genießt man davon den Vortheil, daß man das Verhältniß, welches jene Nullen gegen einander haben, zu erforſchen im Stande iſt, und allen Zweifel wegen der Bedeutung ſolcher Ausdrücke verſchwinden ſieht.

3. Um dies deutlicher zu machen, ſey $y = \frac{P}{Q}$, ſo daß Zähler und Nenner verſchwinden, wenn man $x = a$ ſetzt. Um aber dieſe Nullen, welche ſich unter einander nicht vergleichen laſſen würden, zu vergleichen, wollen wir $a + dx$ für x ſchreiben, und dies iſt im Grunde eben ſo viel, als ob man a für x ſetzte, weil $dx = o$ iſt. Da alſo durch die Subſtitution $x + dx$ für x die Functionen P und Q in $P + dP$ und $Q + dQ$ übergehen; ſo wird die Subſtitution $x + dx$ für x ſchon verrichtet, wenn man in dieſen Ausdrücken allenthalben a für x ſetzt, und in dieſem Falle verſchwinden, der Vorausſetzung gemäß, P und Q. Auf dieſe Art erhält man aus dem Bruche $\frac{P}{Q}$ durch die Subſtitution $a + dx$ für x den Bruch $\frac{dP}{dQ}$, und es druckt folglich dieſer Bruch den Werth der Function $y = \frac{P}{Q}$ für den Fall $x = a$ aus. Es kann aber dieſer Ausdruck nicht mehr unbeſtimmt ſeyn, wenn man die wahren Differenzialien der Functionen P und Q nimmt. Denn thut man dieſes, ſo können die Differenzialien dP und dQ nie verſchwinden, weil ſie durch die Potenzen von dx ausgedruckt werden, wenn ſolches durch das Differenzial dx ſelbſt nicht geſchieht. Findet man demnach $dP = Rdx^m$ und $dQ = Sdx^n$, ſo iſt der Werth der Function $y = \frac{P}{Q}$ für den Fall $x = a$, $= \frac{Rdx^m}{Sdx^n}$, und alſo ein endlicher und $= \frac{R}{S}$, wenn $m = n$, hingegen wenn $m > n$ iſt, in der That $= o$, und $= \infty$ wenn $m < n$ iſt.

4. Wenn daher eine gebrochene Function $\frac{P}{Q}$ gegeben iſt, deren Zähler und Nenner in einem beſtimmten Falle, z. B. wenn $x = a$ geſetzt wird, zugleich verſchwinden: ſo findet man den Werth dieſes Bruchs für $x = a$ nach folgender Regel:

Man

Man ſuche die Differenzialien der Größen P und Q für den Fall $x = a$ und ſetze dieſelben ſtatt der Größen P und Q ſelbſt. Iſt dies geſchehen, ſo druckt der Bruch $\frac{dP}{dQ}$ den geſuchten Werth des Bruchs $\frac{P}{Q}$ aus.

Wenn die Differenzialien dP und dQ, nach der gewöhnlichen Methode geſucht, weder verſchwinden noch unendlich werden, wenn man $x = a$ ſetzt, ſo kann man dieſe Methode beybehalten; werden ſie aber entweder beyde $= 0$, oder beyde $= \infty$, ſo muß man die Methode befolgen, welche in dem Artikel Differenzialien für beſondere Fälle erklärt worden iſt. Oft wird der Calcul beträchtlich abgekürzt, wenn man zuvor $x - a = t$ oder $x = a - t$ ſetzt, damit man einen Bruch $\frac{P}{Q}$ erhalte, deſſen Zähler und Nenner für den Fall $t = 0$ verſchwinden. Man findet nähmlich alsdann die Differenzialien dP und dQ, wenn man allenthalben dt für t ſetzt.

Erſtes Exempel. Den Werth der Function $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$ für den Fall $t = 0$ zu finden. Da in dieſem Falle alle Zähler und Nenner verſchwinden, ſo ſetze man dt für t, wodurch man für den geſuchten Werth der gegebenen Function den Ausdruck $\frac{b - \sqrt{(bb - dt^2)}}{dt^2}$ bekommt. Nun iſt $\sqrt{(bb - dt^2)} = b - \frac{dt^2}{2b}$, und dadurch verwandelt ſich jener Bruch in $\frac{dt^2}{2bdt^2} = \frac{1}{2b}$. Es hat demnach der Bruch $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$, wenn $t = 0$ wird, den Werth $\frac{1}{2b}$.

Zweytes Exempel. Den Werth des Bruchs:

$$\frac{\sqrt{(aa + ax + xx)} - \sqrt{(aa - ax + xx)}}{\sqrt{(a + x)} - \sqrt{(a - x)}}$$

für den Fall $x = 0$ zu finden.

Hier kann man wieder dx für x ſetzen, und da

$$\sqrt{(aa + adx + dx^2)} = a + \tfrac{1}{2}dx + \frac{3dx^2}{8a}$$

$$\sqrt{(aa - adx + dx^2)} = a - \tfrac{1}{2}dx + \frac{3dx^2}{8a}$$

$$\text{und } \sqrt{(a + dx)} = \sqrt{a} + \frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{(a - dx)} = \sqrt{a} - \frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

iſt: ſo wird der Zähler $= dx$, und der Nenner $\frac{dx}{\sqrt{a}}$. Hiernach iſt der geſuchte wahre Werth des gegebenen Bruchs $= \sqrt{a}$.

Drittes Exempel. Den Werth des Bruchs:

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\surd(2ax - aa)}{xx - 2ax - aa + 2a\surd(2ax - xx)}$$

für den Fall $x = a$ zu finden. Wenn man die Differenzialien auf die gewöhnliche Art ſucht und an die Stelle des Zählers und Nenners ſetzt, ſo bekommt man

$$\frac{3xx - 8ax + 7a^2 - 2a^3 : \surd(2ax - aa)}{2x - 2a + 2a(a - x) : \surd(2ax - xx)}$$

und der Zähler und Nenner dieſes Bruchs verſchwinden wieder, wenn man $x = a$ ſetzt. Man muß daher an ihrer Stelle von neuem die Differenzialien nehmen, wodurch man $\frac{6x - 8a + 2a^4 : (2ax - aa)^{\frac{3}{2}}}{2 - 2a^3 : (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$ findet. Da aber auch bey dieſem Bruche der Zähler ſowohl als der Nenner $= 0$ wird, wenn man $x = a$ ſetzt: ſo muß man abermals die Differenzialien für ſie ſetzen, und findet dadurch

$$\frac{6 - 6a^5 : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}{6a^3(a - x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1 - a^5 : (2ax - xx)}{a^3(a - x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}$$

Aus gleichem Grunde muß man endlich auch hier ſo verfahren, und gelangt alsdann zu dem Bruche

$$\frac{5a^6 : (2ax - aa)^{\frac{7}{2}}}{-(5a^5 - 8a^4x + 4a^3xx) : (2ax - xx)^{\frac{7}{2}}}.$$

Setzt man nun hier a für x, ſo bekommt man den beſtimmten Bruch $\frac{5 : a}{-1 : a^2} = -5a$, und dieſes iſt der geſuchte Werth des gegebenen Bruchs.

Bedient man ſich vor dieſer Unterſuchung der Subſtitution $x = a + t$, ſo wird dadurch der gegebene Bruch in folgenden verwandelt:

$$\frac{2a^3 + 2a^2t - att + t^3 - 2a^2\surd(aa + 2at)}{-2aa + tt + 2a\surd(aa - tt)}$$

Da derſelbe $= \frac{0}{0}$ wird, wenn man $t = 0$ ſetzt, ſo ſchreibe man dt für t. Dieſe Behandlung giebt

$$\frac{2a^3 + 2a^2dt - adt^2 + dt^3 - 2a^2\surd(aa + 2adt)}{-2aa + dt^2 + 2a\surd(aa - dt^2)}$$

Nun verwandle man die Irrationalgrößen in Reihen, und ſetze dieſe Reihen ſo weit fort, bis die Glieder gegen die rationalen Glieder in dem Bruche verſchwinden. Auf dieſe Art findet man

$$\surd(aa + 2adt) = a + dt - \frac{dt^2}{2a} + \frac{dt^3}{2aa} - \frac{5dt^4}{8a^3}$$

$$\surd(aa - dt^2) = a - \frac{dt^2}{2a} - \frac{dt^4}{8a^3}$$

und durch den Gebrauch dieſer Werthe

$$\frac{5dt^4 : 4a^3}{= dt^4 : 4aa^2} = -5a^3$$

dieſes iſt eben der vorhin ſchon gefundene Werth des gegebenen Bruchs.

Viertes Exempel. Den Werth des Bruchs:

$$\frac{a + \sqrt{(2aa - 2ax)} - \sqrt{(2ax - xx)}}{a - x + \sqrt{(aa - xx)}}$$

für den Fall $x = a$ zu finden. Setzt man in die Stelle des Zählers und Nenners dieſes Bruchs die Differenzialien derſelben, ſo bekommt man folgenden für den Fall $z = a$ ihm gleichen Bruch:

$$\frac{-a : \sqrt{(aa - 2ax)} - (a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}}{-1 - x : \sqrt{(aa - xx)}}$$

deſſen Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ unendlich werden. Multiplicirt man aber beyde mit $-\sqrt{(a - x)}$, ſo bekommt man

$$\frac{a : \sqrt{2a} + (a - x)^{\frac{3}{2}} : \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(a - x)} + x : \sqrt{(a + x)}}$$

welcher Bruch für den Fall $x = a$ den beſtimmten Werth $\frac{a : \sqrt{2a}}{a : \sqrt{2a}} = 1$ giebt, und dies iſt demnach der Werth des gegebenen Bruchs für den Fall $x = a$.

5. Hat man alſo einen Bruch $\frac{P}{Q}$, deſſen Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ verſchwinden, ſo läßt ſich ſein Werth nach den gewöhnlichen Regeln der Differenziation angeben, und man hat nicht nöthig, ſeine Zuflucht zu den im oben angeführten Artickel erklärten Differenzialien zu nehmen. Braucht man nähmlich die Differenzialien, ſo wird der Bruch $\frac{P}{Q}$ für den Fall $x = a$ dem Bruche $\frac{dP}{dQ}$ gleich, und wenn der Zähler und Nenner dieſes Bruchs endliche Werthe haben, ſo erkennt man daraus ſogleich den Werth des gegebenen Bruchs; wird aber einer davon $= 0$, indem der andere endlich bleibt, ſo iſt der gegebene Bruch entweder $= 0$ oder $= \infty$, je nachdem entweder der Zähler oder der Nenner $= 0$ wird. Werden aber Zähler und Nenner zugleich $= \infty$, und dies geſchieht, wenn ſie durch Größen dividirt werden, die in dem Falle $x = a$ verſchwinden: ſo bringt man dieſe Unbequemlichkeit dadurch weg, daß man den Zähler und Nenner mit dieſen Diviſoren multiplicirt, wie z. B. im vorhergehenden Exempel. Verſchwinden Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ zugleich, ſo muß man, wie vorhin, von neuem die Differenzialien nehmen, um den Bruch $\frac{ddP}{ddQ}$ zu erhalten, welcher für $x = a$ dem gegebenen noch gleich ſeyn wird. Sollte auch dieſer Bruch $= \frac{0}{0}$ werden, ſo muß man dafür $\frac{d^3P}{d^3Q}$ nehmen, u. ſ. w. bis man zu einem Bruche gelangt, der einen beſtimmten Werth giebt, einen endlichen entweder, oder einen unendlichen entweder unendlich großen, oder unendlich kleinen. So mußte man im dritten Exempel bis zu $\frac{d^4P}{d^4Q}$ fortgehen, ehe man den Werth des Bruchs $\frac{P}{Q}$ beſtimmen konnte.

6. Der

6. Der Nutzen dieſer Unterſuchung zeigt ſich bey der Beſtimmung der Reihen, welche wir in (4) des Artickels: Reihen, ſummirbare zu erfinden, gefunden haben, für den Fall, wenn $x = 1$ geſetzt wird. Nach dem angeführten Orte iſt nähmlich

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n-1} = \frac{x - x^{2n+1}}{1 - xx}$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

$$x + 3x^3 + 5x^5 + \dots + (2n-1)x^{2n-1}$$

$$= \frac{x + x^3 - (2n+1)x^{2n+1} + (2n-1)x^{2n+3}}{(1-xx)^2}$$

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \dots + n^2 x$$

$$\frac{x + x^2 - (n+1)^2 x^{n+1} + (2nn+2n-1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{1 - x^3}$$

&c.

Sollen nun die Summen dieſer Reihen für den Fall gefunden werden, wenn $x = 1$ iſt, ſo verſchwinden in den Ausdrücken dafür ſowohl der Zähler als der Nenner, und es laſſen ſich daher dieſe Summen nach der erklärten Methode finden. Da ſie ſchon ſonſt bekannt ſind, ſo kann man ſie als Beſtätigungs-Beyſpiele der erwähnten Methode betrachten.

Erſtes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ für den Fall $x = 1$ zu finden. Es giebt aber dieſer Bruch die Summe der Reihe $1 + 1 + 1 + 1 \dots + 1$, wenn ſie aus n Gliedern beſteht, und iſt daher allemahl $= n$. Da für $x = 1$ Zähler und Nenner verſchwinden, ſo ſetze man dafür die Differenzialien, wodurch man

$$\frac{1 - (n+1)x^n}{-1}$$

bekommt, welcher Ausdruck für $x = 1$ die Zahl n giebt.

Zweytes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{x - x^{2n+1}}{1 - xx}$ für den Fall $x = 1$ zu finden. Es iſt aber derſelbe als die Summe der Reihe $1 + 1 + 1 \dots + 1$, wenn dieſelbe bis zum nten Gliede fortgeſetzt wird, $= n$. Durch die Subſtitution der Differenzialien bekommt man ſtatt des gegebenen Bruchs

$$\frac{1 - (2n+1)x^{2n}}{-2n}$$

und der Werth dieſes Bruchs iſt n, wenn man $x = 1$ nimmt.

Drit-

Drittes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ für den Fall $x=1$ zu finden. Da dieſer Bruch die Summe der Reihe $1+2+3+4+\ldots\ldots+n$ vorſtellt, ſo iſt jener Werth bekanntermaaßen $\frac{nn+n}{2}$. Durch die Subſtitution der Differenzialien bekommt man den

Bruch $\frac{1-(n+1)^2x^n+n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)}$

Da indeß der Zähler und Nenner dieſes Bruchs für den Fall $x=1$ verſchwinden, ſo muß man von neuem die Differenzialien nehmen. Dadurch bekommt man

$$-\frac{n(n+1)^2x^{n-1}+n(n+1)(n+2)x^n}{2}$$

alſo für den Fall $x=1$, $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$.

Viertes Exempel. Den Werth des Bruchs:

$$\frac{x+x^3-(2n+1)x^{2n+1}+(2n-1)x^{2n+3}}{1-xx^2}$$

für den Fall $x=1$ zu finden. Da dieſer Bruch die Summe der Reihe $1+3+5+7+\ldots\ldots+(2n-1)$ ausdruckt, ſo iſt, wie bekannt jener Werth $=nn$.

Durch die Suſtitution der Differenzialien bekommt man den Bruch

$$\frac{1+3xx-(2n+1)^2x^{2n}+(2n-1)(2n+3)x^{2n+2}}{-4x(1-xx)}$$

und da derſelbe, wenn man $x=1$ ſetzt, $=\frac{0}{0}$ wird, ſo muß man von nenem die Differenzialien nehmen. Hierdurch bekommt man

$$\frac{6x-2n(2n+1)^2x^{2n-1}+(2n-1)(2n+2)(2n+3)x^{2n+1}}{-4+12xx}$$

und dieſer Bruch wird, wenn man $x=1$ ſetzt,

$$\frac{6-2n(2n+1)^2+(2n-1)(2n+2)(2n+3)}{8}=nn.$$

Fünftes Exempel. Den Werth des Bruchs:

$$\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$$

für den Fall $x=1$ zu finden. Da derſelbe die Summe der Reihe $1+4+9+\ldots\ldots+n^2$ ausdruckt, ſo iſt er, wie bekannt, $=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$.

Nimmt man die Differenzialien des Zählers und Nenners, ſo erhält man

$$\left.\begin{array}{l}1+2x-(n+1)^3x^n\\+(n+2)(2nn+2n-1)x^{n+1}\\-nn(n+3)x^{n+2}\end{array}\right\}:-3(1-x)^2$$

und da in dieſem Bruche Zähler und Nenner = 0 werden; wenn man x = 1 ſetzt, ſo muß man von neuem die Differenzialien nehmen. Allein der Bruch, welchen man dadurch erhält, nähmlich

$$\left.\begin{array}{c} 2-n(n+1)x^{n-1} \\ +(n+1)(n+2)(2nn+2n-1)x^{n} \\ -n^2(n+2)(n+3)x^{n+1} \end{array}\right\} : 6(1-x)$$

hat eben die Unbequemlichkeit, und man muß daher durch abermalige Subſtitution der Differenzialien zu dem Bruche

$$\left.\begin{array}{c} -n(n-1)(n+1)^3x^{n-2} \\ +n(n+1)(n+2)(2nn+2n-1)x^{n-1} \\ -n^2(n+1)(n+2)(n+3)x^{n} \end{array}\right\} : -6$$

zu gelangen ſuchen, der durch die Subſtitution x = 1 in

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3+n(n+1)(n+2)(nn-n-1)}{-6} =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n$$

übergeht, welches eben der Werth iſt, den man ſchon auf andern Wegen als den wahren Werth kennen gelernt hat.

Sechſtes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{x^m - x^{m+n}}{1-x^{2p}}$ für den Fall x = 1 zu finden. Da dieſer Bruch ein Produkt aus den beyden Brüchen $\frac{x^m}{1+x^p} \cdot \frac{1-x^n}{1-x^p}$ iſt, und der erſte für den Fall x = 1 den Werth $\frac{1}{2}$ hat; ſo braucht man nur den Werth des andern Bruchs für eben den Fall zu ſuchen. Da man dafür beym Gebrauch der Differenzialien $\frac{-nx^{n-1}}{-px^{p-1}} = \frac{n}{p}$ erhält, ſo iſt der geſuchte Werth des gegebenen Bruchs = $\frac{n}{2p}$. Eben dieſen Werth findet man, wenn man unmittelbar von dem gegebenen Bruche die Differenzialien nimmt. Dadurch erhält man nähmlich

$$\frac{mx^{m-1}-(m+n)x^{m+n-1}}{-2px^{2p-1}}$$

und dieſer Bruch giebt, wenn man x = 1 ſetzt, $\frac{-n}{-2p} = \frac{n}{2p}$ wie vorhin.

7. Eben dieſelbe Methode muß man befolgen, wenn entweder der Zähler oder Nenner des Bruchs $\frac{P}{Q}$, oder beyde tranſcendente Größen ſind. Auch dieſes wollen wir an einigen Beyſpielen erläutern.

Erſtes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{a^n - x^n}{la - lx}$ für den Fall $x = a$ zu finden. Durch die Subſtitution der Differenzialien erhält man ſogleich den Bruch

$$-\frac{nx^{n-1}}{-1 : x} = nx^n,$$ und der Werth deſſelben für $x = a$ iſt na^n.

Zweytes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ für den Fall $x = 1$ zu finden. Nimmt man die Differenzialien des Zählers und Nenners, ſo bekommt man $-\frac{1 : x}{-1 : 2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-2\sqrt{(1-x)}}{x}$; und da der Werth dieſes Bruchs, wenn man $x = 1$ ſetzt, $= 0$ wird, ſo folgt, daß der Bruch $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ für den Fall $x = 1$ verſchwinde.]

Drittes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{x - a - ala + alx}{a - \sqrt{(2ax - xx)}}$ für den Fall $x = a$ zu finden, in welchem der Zähler und Nenner $= 0$ werden. Durch die Subſtitution der Differenzialien in dem Zähler und Nenner findet man

$$\frac{-1 + a : x}{-(a-x) : \sqrt{(2ax - xx)}} = \frac{(a-x)\sqrt{(2ax-xx)}}{-x(a-x)}$$

Nun wird zwar auch der Zähler und Nenner dieſes Bruchs $= 0$, wenn man $x + a$ ſetzt; allein da beyde durch $a - x$ theilbar ſind, ſo erhält man dafür durch die Diviſion mit $a - x$

$$-\sqrt{\frac{2a - x}{}}$$

und da der Werth dieſes Bruchs für $x - a$, $= -1$ wird, ſo iſt auch für eben dieſen Fall der Werth des gegebenen Bruchs $= -1$.

Viertes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{e^x - e^x}{l(1+x)}$ für den Fall $= 0$ zu finden. Durch die Subſtitution der Differenzialien bekommt man den Bruch $\frac{e^x + e^{-x}}{1 : (1+x)}$, welcher für $x = 0$ den Werth 2 giebt.

Fünftes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{e^x - 1 - l(1+x)}{xx}$ für den Fall $x = 0$ zu finden. Setzt man ſtatt des Zählers und Nenners die Differenzialien, ſo erhält man den Bruch $\frac{e^x - 1 : (1+x)}{2x}$, welcher aber, wenn man $x = 0$ ſetzt, $= \frac{0}{0}$ wird. Man muß alſo durch abermalige Subſtitution der Differenzialien den Bruch $\frac{e^x + 1 : (1+x)^2}{2}$ ſuchen, welcher

 für

für $x = 0$ den Bruch $\frac{1+1}{2} = 1$ giebt. Eben dieſes findet man, wenn man ſogleich $0 + dx$ für x ſetzt. Da nähmlich $e^{dx} = 1 + dx + \frac{1}{2} dx^2 + \text{etc.}$ und $l(1+dx) = dx - \frac{1}{2} dx^2 + \text{etc.}$ iſt: ſo erhält man auf dieſem Wege $\frac{e^{dx} - 1 - l(1+dx)}{dx^2} = \frac{dx^2}{dx^2} = 1$.

Sechſtes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{x^n}{lx}$ für den Fall $x = \infty$ zu finden. Um dieſen Bruch auf die Form zu bringen, wobey er in dem angenommenen Falle in $\frac{0}{0}$ übergeht, ſchreibe man ihn auf dieſe Art $\frac{1 : lx}{1 : x^n}$. Ferner ſetze man $x = \frac{1}{y}$, ſo daß für den Fall $x = \infty$, $y = 0$ werde. Hierdurch bekommt man den Bruch $-\frac{1 : ly}{y^n}$ für den Fall $y = 0$ zu unterſuchen. Nimmt man nun die Differenzialien, ſo findet man $\frac{1 : y(ly)^2}{n y^{n-1}} = \frac{1 : (ly)^2}{n y^n}$ Allein dieſer Bruch wird $= \frac{0}{0}$, wenn man $y = 0$ ſetzt, und eben dieſes findet bey den Brüchen $\frac{-2 : (ly)^3}{n^2 y^n}$ und $\frac{6 : (ly)^4}{n^3 y^n}$ u. ſ. f. ſtatt, welche man durch fortgeſetzte Subſtitution der Differenzialien erhält. Um alſo gleichwohl den geſuchten Werth zu finden, ſey $s = -\frac{1 : ly}{y^n}$, wenn man $y = 0$ ſetzt. Da in dieſem Falle auch $s = \frac{1 : (ly)^n}{n y^n}$ wird; ſo erhält man aus jener Gleichung $ss = \frac{1 : (ly)^2}{y^{2n}}$, und dieſe Gleichung durch die zweyte dividirt giebt $s = \frac{ny^n}{y^{2n}} = \frac{n}{y^n}$. Hieraus erkennt man, daß $s = \infty$ wird, wenn y in 0 übergeht, und es iſt daher der Werth des Bruchs $-\frac{1 : ly}{y^n}$ unendlich groß, wenn $y = 0$ wird, ſo daß, wenn man $y = dx$ ſetzt, $\frac{1}{ldx}$ zu dx^n ein unendliches Verhältniß hat, wie bereits oben berührt worden iſt.

Siebentes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{x^n}{e^{-1 : x}}$ für den Fall $x = 0$ zu finden, in welchem ſowohl der Zähler als der Nenner verſchwin-

ſchwindet. Es ſey für den erwähnten Fall $\frac{x^n}{e^{-1:x}} = s$, ſo wird, wenn man die Differenzialien nimmt, $s = \frac{n x^{n-1}}{e^{-1:x:xx}}$, und da dieſer Bruch, ſo wie auch alle übrige, welche man durch die Subſtitution der Differenzialien finden kann, für den Fall $x = 0$, $= \frac{0}{0}$ wird: ſo muß man wieder zu dem vorhin gebrauchten Hülfsmittel ſeine Zuflucht nehmen. Nun giebt die erſte Gleichung

$$x^n = e^{-1:x} s, \text{ und } x^{n(n+1)} = e^{-(n+1):x} s^{n+1}$$

die andere aber

$$x^{n+1} e^{-1:x} s : n, \text{ alſo } x^{n(n+1)} = e^{-n:x} s^n : n^n$$

und aus dieſen beyden Gleichungen erhält man $e^{-1:x} s n^n = 1$, und alſo $s = \frac{1}{n^n e^{-1:x}} = \infty$ wenn $x = 0$ geſetzt wird. Setzt man demnach $x = dx$, ſo hat dx^n zu $e^{-1:dx}$ ein unendliches Verhältniß, was man auch für n für eine endliche Zahl ſetzen mag, und es iſt daher $e^{-1:dx}$ eine unendlich kleine Größe und dx^m homogen, wenn m eine unendlich große Zahl bedeutet.

Achtes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{1 - \text{ſin.}\, x + \text{coſ.}\, x}{\text{ſin.}\, x + \text{coſ.}\, x - 1}$ für den Fall zu finden, wenn $x = \frac{\pi}{2}$ oder ein Bogen von 90° wird. Durch die Subſtitution der Differenzialien erhält man den Bruch $- \frac{\text{coſ}\, x - \text{ſin}\, x}{\text{coſ}\, x - \text{ſin}\, x}$, welcher für den Fall, wenn $x = \frac{\pi}{2}$ geſetzt wird, da alsdenn $\text{ſin}\, x = 1$, und $\text{coſ.}\, x = 0$, in 1 übergeht, ſo daß 1 der geſuchte Werth des gegebenen Bruchs iſt. Eben dieſes erkennet man ohne Differenziation. Denn da $\text{coſ}\, x = \sqrt{(1 + \text{ſin}\, x)} + \sqrt{(1 - \text{ſin}\, x)}$ iſt, ſo erhält man dadurch, ſtatt des gegebenen Bruchs $\frac{\sqrt{(1 - \text{ſin}\, x)} + \sqrt{(1 - \text{ſin}\, x)}}{\sqrt{(1 + \text{ſin}\, x)} - \sqrt{(1 - \text{ſin}\, x)}}$ und dieſer Bruch wird offenbar $= 1$, wenn $\text{ſin}\, x = 1$ wird.

Neuntes Exempel. Den Werth des Bruchs $\frac{x^x - x}{1 - x + lx}$ für den Fall $x = 1$ zu finden. Setzt man ſtatt des Zählers und Nenners die Differenzialien, ſo bekommt man den Bruch $\frac{x^x(1 + lx) - 1}{-1 + 1 : x} = \frac{0}{0}$ für $x = 1$. Dagegen giebt die abermalige Subſtitution der Differenzialien $\frac{x^x(1 + lx)^2 + x^x : x}{-1 : xx}$, und dieſer Bruch wird $= -2$, wenn man $x = 1$ ſetzt, daher

daher denn auch der Werth des gegebenen Bruchs $= - 2$ iſt, wenn $x = 1$ angenommen wird.

8. Da es hier unſere Abſicht iſt, alle Ausdrücke zu betrachten, die in gewiſſen Fällen unbeſtimmt zu ſeyn ſcheinen: ſo müſſen wir auſſer den Brüchen $\frac{P}{Q}$, deren Zähler und Nenner in gewiſſen Fällen verſchwinden, auch derer Erwähnung thun, deren Zähler und Nenner in gewiſſen Fällen unendlich groß werden, weil die Werthe dieſer Brüche ebenfalls unbeſtimmt zu ſeyn ſcheinen können. Sind nähmlich P und Q ſolche Functionen von x, daß ſie beyde für einen beſtimmten Fall $x = a$ unendlich werden: ſo bekommt der Bruch $\frac{P}{Q}$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$; und da die unendlichen Größen eben ſowohl als die Nullen jedes Verhältniß zu einander haben können, ſo läßt ſich daraus der Werth des Bruchs $\frac{P}{Q}$ auf keine Weiſe erkennen. Indeß läßt ſich dieſer Fall auf den vorhergehenden zurückführen, wenn man den Bruch $\frac{P}{Q}$ durch $\frac{1:Q}{1:P}$ ausdruckt, wo der Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ verſchwinden, und alſo der Werth dieſes Bruchs nach der beſchriebenen Methode gefunden werden kann. Aber es iſt deswegen dieſe Verwandlung nicht ſchlechterdings nothwendig. Denn ſetzt man für x nicht a ſondern $a + dx$, ſo bekommt man die unendlichen Werthe nicht durch ∞ ausgedruckt, ſondern in Darſtellungen, wie $\frac{1}{dx}$ oder $\frac{A}{dx^n}$; und obgleich dieſe Ausdrücke ebenfalls unendliche Gröſſen anzeigen, ſo laſſen ſie ſich doch unter einander vergleichen, und alſo auch aus ihnen der wahre Werth der Function $\frac{P}{Q}$ leicht finden.

9. Eben ſo gehören hieher die Produkte aus zwey Faktoren, wovon der eine, wenn man $x = a$ ſetzt, verſchwindet, und der andere unendlich wird. Denn da man jede Größe durch das Produkt $0 . \infty$ darſtellen kann, ſo hat man darinn allerdings keinen beſtimmten Werth. Iſt aber PQ ein Produkt, wo, wenn man $x = a$ ſetzt, $P = 0$ und $Q = \infty$ wird, ſo findet man den Werth deſſelben nach den erklärten Regeln, wenn man $Q = \frac{1}{R}$ ſetzt, weil alsdann das Produkt PQ in den Bruch $\frac{P}{R}$ verwandelt wird, deſſen Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ verſchwinden. Sollte z. B. der Werth des Produkts $(1 - x) \tang \frac{\pi x}{2}$ für den Fall $x = 1$, wo $1 - x = 0$, und $\tang \frac{\pi x}{2} = \infty$ wird, geſucht werden: ſo verwandele man dieſes Produkt in den Bruch $\frac{1 - x}{\cot \frac{1}{2} \pi x}$, deſſen Zähler und Nenner für den Fall $x = 1$ verſchwinden. Da das Differenzial des Zählers $= - dx$, und das Differenzial des Nenners $=$

$= -\frac{\pi dx : 2}{(\sin. \frac{1}{2}\pi x)^2}$ iſt, ſo wird der Werth des gegebenen Bruchs für den Fall $x = 1$

$\frac{2}{\pi} \sin\frac{\pi x}{2} \sin\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$ weil $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ iſt.

10. Insbeſondere aber gehören hieher die Ausdrücke, welche bey einem beſtimmten Werthe für x die Form $\infty - \infty$ annehmen. Denn da zwey unendliche Größen um jede endliche Größe von einander unterſchieden ſeyn können, ſo erhellet, daß jene Ausdrücke nicht eher einen beſtimmten Werth anzeigen, als bis man dieſen Unterſchied angeben kann. Es findet aber ein Fall dieſer Art ſtatt, wenn eine Function $P - Q$ gegeben iſt, wo, wenn man $x = a$ ſetzt, ſowohl als P als Q unendlich wird, und hier iſt es nicht gleich leicht, den geſuchten Werth nach den erklärten Regeln zu finden. Denn nimmt man auch $P - Q = f$, und ſetzt $e^{P-Q} = e^f$, ſo daß $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$ wird, wo für $x = a$ ſowohl der Zähler e^{-Q}, als der Nenner e^{-P} verſchwindet: ſo erhält man nach der erklärten Methode $e^f = \frac{e^{-Q} dQ}{e^{-P} dP}$ und alſo, da $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$ iſt, $1 = \frac{dQ}{dP}$, woraus ſich aber der Werth von f nicht finden läßt. Sind P und Q algebraiſche Größen, ſo können dieſe nicht anders unendlich werden, als wenn ſie Brüche mit verſchwindenden Nennern ſind; und findet dieſes bey P und Q ſtatt, ſo laſſen ſich die Brüche $P - Q$ in einen zuſammen ziehen, deſſen Nenner ebenfalls verſchwindet. Wird nun in dieſem Falle auch der Zähler $= 0$, ſo kann man die bereits beſchriebene Methode brauchen; verſchwindet aber der Zähler nicht, ſo iſt der geſuchte Werth eine unendliche Größe im eigentlichen Verſtande. Soll z. B. der Werth des Ausdrucks $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-xx}$ für den Fall $x = 1$ geſucht werden, ſo erhält man für dieſen Ausdruck $\frac{1-x}{1-xx} = \frac{-1}{1+xx}$, und darnach iſt der geſuchte Werth $= -\frac{1}{2}$.

11. Wenn aber P und Q transcendente Functionen ſind, ſo iſt dieſe Verwandlung meiſtens mit ſehr beſchwerlichen Rechnungen verknüpft. In dieſem Falle bedient man ſich daher beſſer der direkten Methode, und ſetzt ſtatt $x = a$, wobey beyde Größen P und Q unendlich werden würden, $x = a + \omega$, ſo daß ω eine unendlich kleine Größe bedeutet und mit dx verwechſelt werden kann. Wird hierdurch $P = \frac{A}{\omega} + B$, und $Q = \frac{A}{\omega} + C$, ſo iſt offenbar, daß $P - Q = B - C$ iſt, und dieſe Differenz iſt eine endliche Größe. Dieſe Art, den Werth von dergleichen Functionen zu finden, mögen folgende Beyſpiele erläutern.

Erſtes Exempel. Den Werth des Ausdrucks $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$ für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ geſetzt wird. Da ſowohl $\frac{x}{x-1}$ als $\frac{1}{lx}$ unendlich werden, wenn man $x = 1$ nimmt, ſo ſetze man $x = 1 + \omega$, wodurch der gegebene Ausdruck in folgenden verwandelt wird:

$$\frac{1+\omega}{\omega} - \frac{1}{l(1+\omega)}$$

Nun iſt $l(1+\omega) = \omega - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3 - \text{etc.} = \omega(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \text{etc.})$ und man hat alſo

$$\frac{(1+\omega)(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\text{etc})-1}{\omega(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2\ \text{etc.})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{6}\omega^2 + \text{etc.}}{\omega(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\text{etc.})} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\omega+\text{etc.}}{1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\text{etc.}}$$

Nimmt man folglich ω unendlich klein oder $= 0$, ſo wird offenbar der geſuchte Werth $= \frac{1}{2}$.

Zweytes Exempel. Den Werth des Ausdrucks $\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ für den Fall $x = 0$ zu finden, vorausgeſetzt, daß e die Zahl bedeute, deren hyperboliſcher Logarithme $= 1$ iſt, und π das Verhältniß des halben Umfangs des Kreiſes zum Halbmeſſer deſſelben ausdrucke. Der Ausdruck $\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ iſt der Ausdruck der Summe der Reihe

$$\frac{1}{1+xx} + \frac{1}{4+xx} + \frac{1}{9+xx} + \frac{1}{16+xx} + \frac{1}{25+xx} + \text{etc.}$$

und man muß alſo, wenn man $x = 0$ ſetzt, die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

finden, welche, wie bekannt, $= \frac{\pi\pi}{6}$ iſt. Setzt man aber $x = 0$, ſo ſcheint der Ausdruck $\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ höchſt unbeſtimmt zu ſeyn, weil beyde Glieder deſſelben unendlich werden. Man ſetze daher $x = \omega$, wodurch $\frac{\pi x - 1}{2xx}$ in $-\frac{1}{2\omega^2} + \frac{\pi}{2\omega}$ übergeht. Da ferner $e^{2\pi\omega} - 1 = 2\pi\omega + 2\pi^2\omega^2 + \frac{4}{3}\pi^3\omega^3 + \text{etc.}$ iſt, ſo erhält man für das andere Glied $\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$

$$\frac{\pi}{\omega(2\pi\omega + 2\pi^2\omega^2 + \frac{4}{3}\pi^3\omega^3 + \text{etc.}} = \frac{1}{2\omega^2(1+\pi\omega+\frac{2}{3}\pi^2\omega^2+\text{etc.})}$$

Nun

Nun iſt aber

$$\frac{1}{1 + \pi\omega + \frac{2}{3}\pi^2\omega^2 + \text{etc.}} = 1 - \pi\omega + \frac{1}{3}\pi^2\omega^2 + \text{etc.}$$

und es wird folglich das letzte Glied $= \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\pi}{2\omega} + \frac{1}{6}\pi^2 - \text{etc.}$ und addirt man hierzu das erſte Glied, ſo bekommt man $\frac{1}{6}\pi^2$, welches der Werth des gegebenen Ausdrucks für den Fall $x = 0$ iſt.

Eben dieſen Werth kann man nach der Methode finden, welche wir bey den Brüchen gebraucht haben, deren Zähler und Nenner in gewiſſen Fällen verſchwinden, indem ſich der gegebene Ausdruck in folgenden Bruch verwandeln läßt,

$$\frac{\pi x e^{2\pi x} - e^{2\pi x} + \pi x + 1}{2xxe^{2\pi x} - 2xx}$$

deſſen Zähler und Nenner für $x = 0$ werden. Nimmt man alſo die Differenzialien, ſo bekommt man

$$\frac{\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x} - 2\pi e^{2\pi x} + \pi}{4xe^{2\pi x} + 4\pi xx e^{2\pi x} - 4x}$$

oder

$$\frac{\pi - \pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x}}{4xe^{2\pi x} + 4xxe^{2\pi x} - 4x}$$

wo aber für $x = 0$ Zähler und Nenner wieder verſchwinden. Man muß daher nochmahls die Differenzialien ſubſtituiren, und findet alsdann

$$\frac{-2\pi\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi e^{2\pi x} + 4\pi^3 x e^{2\pi x}}{4e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi^2 xxe^{2\pi x} - 4}$$

oder

$$\frac{\pi^3 x e^{2\pi x}}{e^{2\pi x} + 4\pi x e^{2\pi x} + 2\pi^2 x^2 e^{2\pi x} - 1}$$

oder

$$\frac{\pi^3 x}{1 + 4\pi x + 2\pi^2 x^2 - e^{-2\pi x}}$$

Da auch hier für $x = 0$ Zähler und Nenner $= 0$ werden, ſo nehme man nochmahls die Differenzialien, wodurch man

$$\frac{\pi^3}{4\pi + 4\pi^2 x + 2\pi e^{-2\pi x}}$$

bekommt, und dieſer Bruch geht, wenn man $x = 0$ ſetzt, in $\frac{\pi}{6}$ über, welches der vorhin gefundene Werth iſt.

Drittes Exempel. Den Werth des Ausdrucks: $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x\,(e^{\pi x} + 1)}$ zu finden, wenn $x = 0$ iſt, und π und e die vorige Bedeutung behalten.

Der gegebene Ausdruck läßt ſich in den Bruch $\frac{\pi e^{\pi x} - \pi}{4x e^{\pi x} + 4x}$ verwandeln, deſſen Zähler und Nenner für den Fall $x = 0$ verſchwinden. Man ſetze daher $x = \omega$, und da

$$e^{\pi\omega} = 1 + \pi\omega + \tfrac{1}{2}\pi^2\omega^2 + \tfrac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \text{etc.}$$

iſt, ſo erhält man dadurch für den gegebenen Ausdruck

$$\frac{\pi^2\omega + \frac{1}{2}\pi^3\omega^2 + \frac{1}{6}\pi^4\omega^3 + \text{etc.}}{8\omega + 4\pi\omega^2 + 2\pi^2\omega^3 + \text{etc.}}$$

und dieſer Ausdruck wird $= \frac{1}{8}\pi^2$, wenn man $\omega = 0$ nimmt. Auch iſt $\frac{1}{8}\pi^2$ der Werth des gegebenen Ausdrucks für den Fall $x = 0$. Uebrigens ſtellt die Formel $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)}$ die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1 + xx} + \frac{1}{9 + xx} + \frac{1}{25 + xx} + \frac{1}{49 + xx} + \text{etc.}$$

dar, und es iſt bekannt, daß dieſe Reihe, wenn $x = 0$ angenommen wird, $= \frac{1}{8}\pi^2$ iſt.

Viertes Exempel. Den Werth des Ausdrucks $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\,\text{tang}\,\pi x}$ für den Fall $x = 0$ zu finden. Die Formel $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\,\text{tang}\,\varpi x}$ druckt die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe

$$\frac{1}{1 - xx} + \frac{1}{4 - xx} + \frac{1}{9 - xx} + \frac{1}{16 - xx} + \text{etc.}$$

aus, und es muß daher, wenn man $x = 0$ ſetzt, die Summe der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{etc.}$$

ſich ergeben, wovon man weiß, daß ſie $= \frac{1}{6}\varpi\varpi$ iſt. Da nun

$$\text{tang}\,\varpi = \frac{\sin\varpi x}{\cos\varpi x}$$ iſt, ſo hat man

$$\frac{1}{2xx} - \frac{\varpi\cos\varpi x}{2x\sin\varpi x} = \frac{\sin\varpi x - \varpi x\cos\varpi x}{2xx\sin\varpi x}$$

und der Zähler und Nenner dieſes Bruchs verſchwinden, wenn man $x = 0$ ſetzt. Man nehme alſo $x = 0$, ſo geht der gegebene Ausdruck, da

$$\sin\varpi x = \varpi\varpi - \tfrac{1}{6}\varpi^3\omega^3 + \text{etc.}$$
$$\cos\varpi x = 1 - \tfrac{1}{2}\varpi^2\omega^2 + \text{etc.}$$

iſt, in folgenden Bruch

$\varpi\omega$

$$\frac{\varpi\omega - \frac{1}{6}\varpi^3\omega^3 + \text{etc.} - \varpi\omega + \frac{1}{2}\varpi^3\omega^3 - \text{etc.}}{2\varpi\omega^3 - \frac{1}{3}\varpi^3\omega^5 + \text{etc.}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\varpi^3\omega^3 - \text{etc.}}{2\pi\,\omega^3 - \text{etc.}}$$

über, welcher, wenn man ω unendlich klein annimmt, $\frac{1}{6}\,\omega^2$ giebt.

Fünftes Exempel. Da die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{25-xx} + \frac{1}{49-xx} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\varpi \sin \frac{1}{2}\varpi x}{4x \cos \frac{1}{2}\varpi x}$$ iſt: den Werth dieſer Summe für den Fall $x = 0$ zu finden. Da

$$\sin \tfrac{1}{2}\varpi x = \tfrac{1}{2}\varpi x - \tfrac{1}{48}\varpi^3 x^3 + \text{etc. und}$$
$$\cos \tfrac{1}{2}\varpi x = 1 - \tfrac{1}{8}\omega^2 x^2 + \text{etc.}$$

iſt: ſo wird der gegebene Ausdruck $= \frac{\frac{1}{2}\varpi^2 x - \frac{1}{48}\varpi^4 x^3 + \text{etc.}}{4x - \frac{1}{2}\varpi^2 x^3 + \text{etc.}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\varpi^2 - \frac{1}{48}\varpi^4 x^2 + \text{etc.}}{4 - \frac{1}{2}\varpi^2 x^2 + \text{etc.}}$$

und alſo offenbar $= \frac{1}{8}\pi^2$, wenn man $x = 0$ ſetzt. Es iſt aber $\frac{1}{8}\varpi^2$ der Werth der Reihe $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc., wie oben auf mehrere Arten gezeigt worden, dagegen die gegebene Reihe allemahl $= 0$ wird, wenn man für x irgend eine gerade Zahl ſetzt.

12. In dieſen Reihen, welche in den beyden letzten Exempeln vorkommen, ſo wie auch in andern die veränderliche Größe x enthaltenden Reihen, können dieſer Größe x auch ſolche Werthe beygelegt werden, daß einige Glieder und folglich alsdann auch die Summe der ganzen Reihe unendlich wird. Setzt man z. B. in der Reihe

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \text{etc.}$$

für x irgend eine ganze Zahl, ſo wird allemahl ein Glied derſelben, wegen des verſchwindenden Nenners, und alſo auch die Summe der Reihe unendlich. Läßt man aber dieſes unendliche Glied aus der Reihe weg, ſo iſt der übrige Theil der Summe eine endliche Größe, und läßt ſich durch die Differenz zwiſchen dem Unendlichen, welches die ganze Summe ausdruckt, und dem gedachten unendlichen Gliede, alſo durch $\infty - \infty$ ausdrucken. Was für ein beſtimmter Werth in dergleichen Fällen ſtatt finde, läßt ſich nach der erklärten Methode entdecken, und folgende Beyſpiele mögen zur Erläuterung dienen.

Erſtes Exempel. Die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \text{etc.}$$

für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ ins Unendliche übergeht. Da überhaupt genommen die Summe dieſer Reihe $= \frac{-1}{-2xx} - \frac{\varpi}{2x \operatorname{tang} \varpi x}$

iſt:

iſt: ſo iſt die geſuchte Summe $= \frac{1}{2xx} - \frac{\varpi}{2x \tang \varpi x} - \frac{1}{1-xx}$ für $x = 1$. Man ſetze $x = 1 + \omega$, ſo wird dieſe Summe

$$= \frac{1}{2(1+2\omega+\omega\omega)} - \frac{\varpi}{2(1+\omega)\tang(\varpi+\omega\varpi)} + \frac{1}{2\omega+\omega\omega}.$$

Nun iſt

$$\tang(\varpi+\omega\varpi) = \tang \omega\pi = \varpi\omega + \tfrac{1}{3}\varpi^3\omega^3 + \text{etc.}$$

und da das erſte Glied $\frac{1}{2xx}$ für $x = 1$ den beſtimmten Werth $\frac{1}{2}$ bekommt, ſo braucht man nur auf die beyden übrigen zu ſehen. Dieſe ſind, wenn ω eine unendlich kleine Größe bedeutet,

$$\frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{\varpi}{2\omega(1+\omega)(\varpi+\frac{1}{3}\varpi^3\omega^2)}$$

$$= \frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{1}{\omega(2+2\omega)(1+\frac{1}{3}\varpi^2\omega^2)}$$

Aber wenn ω unendlich klein iſt, kann man ſelbſt $\frac{1}{3}\varpi^2\omega^2$ aus der Acht laſſen, und dadurch bekommt man

$$\frac{\omega}{\omega(2+\omega)(2+2\omega)} = \frac{1}{4}$$

wenn man $\omega = 0$ ſetzt. Es iſt aber $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ die Summe der Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} +$ etc. wie aus andern Gründen bekannt iſt.

Zweytes Exempel. Die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \text{etc.}$$

für den Fall zu finden, wenn x irgend einer ganzen Zahl n gleich geſetzt, und das alsdann ins Unendliche übergehende Glied $\frac{1}{nn-xx}$ weggelaſſen wird. Die geſuchte Summe läßt ſich auf folgende Art ausdrucken:

$$\frac{1}{2xx} - \frac{\varpi}{2x \tang \varpi x} - \frac{1}{nn-xx}$$

vorausgeſetzt, daß $x = n$ angenommen werde, wo denn das erſte Glied $\frac{1}{2xx} = \frac{1}{2nn}$, die beyden andern aber unendlich werden. Man ſetze alſo $x = n + \omega$, ſo hat man für die geſuchte Summe, da $\tang(\varpi n + \varpi\omega) = \tang \varpi\omega = \varpi\omega$ iſt, wenn man ω unendlich klein annimmt, den Ausdruck

$$\frac{1}{2nn} - \frac{\varpi}{2(n+\omega)\varpi\omega} + \frac{1}{2n\omega+\omega\omega}$$

oder $\frac{1}{2nn} - \frac{1}{\omega(2n+2\omega)} + \frac{1}{\omega(2n+\omega)} = \frac{1}{2nn} + \frac{1}{(2n+2\omega)(2n+\omega)}$

und

und wird demnach $\omega = 0$, ſo bekommt man

$$\frac{1}{2nn}+\frac{1}{4nn}=\frac{3}{4nn}.$$

Es iſt folglich

$$\frac{3}{4nn}=\frac{1}{1-nn}+\frac{1}{4-nn}+\frac{1}{9-nn}\ldots+\frac{1}{(n-1)^2-nn}$$

$$+\frac{1}{(n-1)^2-nn}+\frac{1}{(n+2)^2-nn}+\text{etc.}$$

ohne Ende, oder

$$\frac{1}{(n+1)^2-nn}+\frac{1}{(n+2)^2-nn}+\frac{1}{(n+3)^2-nn}+\text{etc.}$$

$$=\frac{3}{4nn}+\frac{1}{nn-1}+\frac{1}{nn-4}+\ldots+\frac{1}{nn-(n-1)^2}.$$

Drittes Exempel. Den Werth der Reihe:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\text{etc.}$$

für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ geſetzt, und das alsdann ins Unendliche übergehende Glied $\frac{1}{1-xx}$ weggelaſſen wird. Da die Summe dieſer Reihe überhaupt genommen $= \frac{\varpi \sin \frac{1}{2}\varpi x}{4x \cos \frac{1}{2}\varpi x}$ iſt: ſo wird die geſuchte Summe

$$=\frac{\varpi \sin \frac{1}{2}\varpi x}{4x \cos \frac{1}{2}\varpi x}-\frac{1}{1-xx}$$

für den Fall $x = 1$. Da beyde Glieder für $x = 1$ unendlich werden, ſo ſetze man $x = 1 - \omega$. Hierdurch bekommt man, da

$\sin(\frac{1}{2}\varpi - \frac{1}{2}\varpi\omega) = \cos \frac{1}{2}\varpi\omega = 1 - \frac{1}{8}\varpi^2\omega^2$,

und $\cos(\frac{1}{2}\varpi - \frac{1}{2}\varpi\omega) = \sin \frac{1}{2}\varpi\omega = \varpi\omega$

iſt, indem ω eine unendlich kleine Größe bedeutet, den Ausdruck

$$\frac{\varpi(1-\frac{1}{8}\varpi^2\omega^2)}{4(1-\omega)\frac{1}{2}\varpi\omega}-\frac{1}{2-\omega\omega}=\frac{1}{\omega(2-2\omega)}-\frac{1}{2(2-\omega)}$$

der $= \frac{1}{4}$ wird, wenn man $\omega = 0$ annimmt, und es iſt demnach

$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{80} + \tfrac{1}{120} + \text{etc.}$$

Viertes Exempel. Die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}=\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\text{etc.}$$

zu finden, wenn x irgend einer ungeraden Zahl $2n - 1$ gleich geſetzt, und das Glied $\frac{1}{(2n-1)^2-xx}$, welches in dieſem Falle ins Unendliche übergeht, weggelaſſen wird. Die geſuchte Summe iſt

$$=\frac{4 \sin \frac{1}{2}\varpi x}{4x \cos \frac{1}{2}\omega x}-\frac{1}{(2n-1)^2-xx}$$ wenn $x = 2n - 1$ ge-

 nom-

nommen wird. Man ſetze demnach $x = 2n - 1 - \omega$, und laſſe ω eine unendlich kleine Größe bedeuten. Alsdann wird

$$\sin \tfrac{1}{2} \varpi x = \sin \left(\frac{2n-1}{2} \varpi - \tfrac{1}{2} \varpi \omega\right) = \pm \cos \tfrac{1}{2} \varpi \omega.$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn n eine ungerade, und das untere, wenn n eine gerade Zahl iſt. Auf ähnliche Art wird

$$\cos \tfrac{1}{2} \varpi x = \cos \left(\frac{2n-1}{2} \varpi - \tfrac{1}{2} \pi \omega\right) = \pm \sin \tfrac{1}{2} \varpi \omega,$$

und folglich, n mag eine gerade oder ungerade Zahl bedeuten,

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \varpi x}{\cos \frac{1}{2} \varpi \omega} = \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varpi \omega} = \frac{1}{\frac{1}{2} \pi \omega}$$

Dies vorausgeſetzt läßt ſich die geſuchte Summe auf dieſe Art:

$$\frac{1}{2\omega(2n-1-\omega)} - \frac{1}{\omega(2(2(2n-1)-\omega))}$$

ausdrucken, und iſt demnach $= \frac{1}{4(2n-1)^2}$. Iſt z. B. $n = 2$, ſo wird

$$\tfrac{1}{36} = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{112} + \&c$$

und die Richtigkeit dieſer Summe iſt aus andern Gründen bekannt.

Eulers Differenzialrechnung III S. 173.

Functionen. Erforſchung ihrer trinomiſchen Faktoren, ſiehe: Trinomiſche Factoren.

Functionen größter und kleinſter Werth, ſiehe: Größte und kleinſte Werthe.

Functionen umzuformen.

A Umformung der ganzen Functionen.

1. Die Functionen können auf eine zweyfache Weiſe in andere verwandelt, oder auf eine andere Form gebracht werden, indem man dabey entweder die veränderliche Größe beybehalten, oder an ihrer Stelle eine andere einführen kann.

Wenn die veränderliche Größe beybehalten wird, ſo wird die Function eigentlich nicht verändert, ſondern nur auf eine andere Art ausgedrückt; ſo wie aus der Algebra bekannt iſt, daß man eine und dieſelbe Größe auf mancherley Weiſe darſtellen kann. Beyſpiele von dergleichen Verwandlungen ſind, wenn man anſtatt der Functionen $2 - 3z + zz$, dieſe, $(1 - z)(2 - z)$; oder $(a + z)^3$ anſtatt $a^3 + 3aaz + 3azz + z^3$; oder $\frac{a}{a-z} + \frac{a}{a+z}$ anſtatt $\frac{2aa}{aa - zz}$; oder $\sqrt{(1 + zz)} + z$ anſtatt $\frac{1}{\sqrt{(1+zz)} - z}$ ſetzt: denn ſo verſchieden auch die Geſtalt dieſer Ausdrücke iſt, ſo bedeuten ſie doch vollkommen ein und daſſelbe. Oft iſt aber die eine Art des Ausdrucks zu der gegenwärtigen Abſicht paſſender, als ein anderer gleichbedeutender, und man muß deswegen jedesmal den ſchicklichſten wählen.

Die andere Art der Verwandlung der Functionen, wobey man anſtatt der veränderlichen Größe z eine andere y nimmt, welche zu z ein gegebenes Verhältniß hat, nennt man die Verwandlung durch Subſtitution; und ihrer muß man ſich auf die Weiſe bedienen, daß die gegebene Function dadurch

durch kürzer und bequemer ausgedruckt wird. So erhält man, wenn man in der Function von z, $a^4 - 4a^3z + 6aazz - 4az^3 + z^4$, für a — z die veränderliche Größe y ſetzt, die viel einfachere Function y^4 von y; und wenn man in der irrationalen Function $\sqrt{(aa + zz)}$ von z, $z = \frac{aa - yy}{2y}$ nimmt, an ihrer Stelle die rationale Function $\frac{aa + yy}{2y}$ von y. Von dieſer letzten Art der Verwandlung der Function wird in dem Artikel Verwandlung ꝛc., ſo wie von der, wobey keine Subſtitution ſtatt findet, in dem gegenwärtigen Artikel gehandelt.

2. Die ganzen Functionen werden öfters ſehr vortheilhaft in ihre Faktoren aufgelöſet, und in ein Produkt verwandelt.

Wenn eine ganze Function in ihrer Beſchaffenheit weit leichter in die Augen fällt; denn man ſieht alsdann ſogleich ein, in was für Fällen ihr Werth = o wird. Verwandelt man z. B. dieſe Function von z, $6 - 7z + z^3$ in das Produkt $(1 - z)(2 - z)(3 + z)$; ſo iſt ſogleich offenbar, daß ſie in drey Fällen = o wird, nähmlich wenn $z = 1$, $z = 2$, und $z = -3$ iſt, welches man aus dem Ausdrucke $6 - 7z + z^3$ ſelbſt weit ſchwerer erkennt. Man nennt aber dergleichen Faktoren, worinn blos die erſte Poteſtät von z vorkommt, zum Unterſchiede von den zuſammen geſetzten Faktoren, welche das Quadrat, oder den Cubus, oder irgend eine andere höhere Poteſtät von z enthalten, einfache Faktoren, und ihre allgemeine Form iſt $f + gz$, ſo wie der allgemeine Ausdruck der doppelten Faktoren $f + gz + hzz$, und der dreyfachen, $f + gz + hzz + iz^3$ u. ſ. w.*). Dabey fällt in die Augen, daß ein jeder doppelter Faktor zwey einfache, ein jeder dreyfache Faktor drey einfache u. ſ. w. in ſich faſſe. Wenn der Exponent der höchſten Poteſtät von z in einer ganzen Function von $z = n$ iſt: ſo enthält die Function n einfache Faktoren; und ſind unter ihren Faktoren etwa auch doppelte oder dreyfache u. ſ. w. ſo läßt ſich die Anzahl ihrer Faktoren nach dem Angeführten ebenfalls beurtheilen.

*) Wenn ein doppelter Faktor zwey einander gleiche einfache Faktoren hat, ſo heißt er ein quadratiſcher Faktor wie $aa + 2az + zz$.

3. Man findet die einfachen Faktoren einer jeden ganzen Function Z von z, wenn man die Function Z gleich o ſetzt, und aus dieſer Gleichung die Wurzeln von z zu erhalten ſucht; indem eine jede Wurzel von z einen einfachen Faktor der Function Z gibt.

Iſt daher von der Gleichung $Z = o$ irgend eine Wurzel $z = f$; ſo iſt $z - f$ ein Diviſor und folglich auch ein Faktor der Function Z. Sucht man alſo alle Wurzeln der Gleichung $Z = o$, nähmlich $z = f$, $z = g$, $z = h$, u. ſ. w., ſo wird dadurch die Function Z in ihre Faktoren aufgelöſet, und in das Produkt $(z - f)(z - g)(z - h)$ etc. verwandelt; wobey indeß zu merken iſt, daß man dieß Produkt, wenn der Coefficient der höchſten Poteſtät von z nicht $= + 1$ iſt, noch durch dieſen Coefficienten multipliciren muß. Iſt z. B. $Z = Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} +$ etc. ſo iſt $Z = A(z - f)(z - g)(z - h)$ etc. *) Iſt hingegen $Z = A + Bz + Cz^2 + Dz + Cz^4 +$ u. ſ. f. und ſind die Wurzeln der Gleichung $Z = o$, f; g; h; i; u. ſ. w., ſo iſt

iſt $Z = A\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)$ u. ſ. f. **) Auch erhellet hieraus, daß umgekehrt $Z = 0$ werden muß, wenn $z - f$, oder $1 - \frac{z}{f}$ ein Faktor der Function Z iſt, und man f anſtatt z ſetzt. Denn iſt $z = f$, ſo wird ein Faktor von der Function Z, $z - f$ oder $1 - \frac{z}{f}$, und alſo auch die Function ſelbſt $= 0$.

*) Aus $Z = Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + Dz^{n-3} +$ etc. folgt, $Z = A\left(z^n + \frac{B}{A}z^{n-1} + \frac{C}{A}z^{n-2} + \frac{D}{A}z^{n-3} + \text{etc.}\right)$

Verwandelt man alſo $z^n + \frac{B}{A}z^{n-1} + \frac{C}{A}z^{n-2} + \frac{D}{A}z^{n-3}$ etc.
in das Produkt
$(z-f)\ (z-g)\ (z-h)\ (z-i)\ (z-k)$ etc.
ſo wird $Z = A(z-f)(z-g)(z-h)$ etc.

**) Aus $Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc.
folgt $Z = A\left(1 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A}z^2 + \frac{D}{A}z^3 + \frac{E}{A}z^4 + \text{etc.}\right)$

Verwandelt man alſo $1 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A}z^2 + \frac{D}{A}z^3 + \frac{E}{A}z^4 +$ etc.
in das Produkt
$$\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)\left(1-\frac{z}{i}\right)\left(1-\frac{z}{k}\right)\text{etc.}$$
ſo wird $Z = A\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)$ etc.

4. Die einfachen Faktoren ſind entweder reell oder imaginär; und wenn die Function Z imaginäre Faktoren hat, ſo iſt ihre Anzahl immer eine gerade Zahl.

Denn da die einfachen Faktoren aus den Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ entſpringen: ſo müſſen die reellen Wurzeln reelle Faktoren und die imaginären Wurzeln imaginäre Faktoren geben. Und da die Anzahl der imaginären Wurzeln einer jeden Gleichung eine gerade Zahl iſt; ſo muß die Function Z entweder gar keine oder zwey oder vier oder ſechs, u. ſ. w. imaginäre Faktoren haben. Hat nun die Function Z nur zwey imaginäre Faktoren, ſo iſt das Produkt derſelben ein reelles Produkt, und giebt alſo einen reellen doppelten Faktor. Denn ſetzt man das Produkt aus allen reellen Faktoren $= P$, ſo iſt das Produkt der beyden imaginären Faktoren $= \frac{Z}{P}$, und alſo reell. Auf eben die Art iſt das Produkt aller imaginären Faktoren, wenn die Function Z deren viere, oder ſechs, oder achte u. ſ. w. hat, immer reell; weil es

jedes

jedesmal dem Quotienten gleich iſt, den man aus der Diviſion der Function Z durch das Produkt aller reellen Faktoren erhält.

5. Wenn Q ein reelles Produkt aus vier einfachen imaginären Faktoren iſt, ſo kann man daſſelbe in zwey doppelte reelle Faktoren zerfällen.

Denn es hat alsdann Q die Form $z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$; und ſollte es nicht in zwey doppelte reelle Faktoren aufgelöſet werden können, ſo müſte es ein Produkt aus zwey doppelten imaginären Faktoren ſeyn. Ferner wäre die Form dieſer beyden doppelten imaginären Faktoren

$$z - 2\,(p + q\sqrt{-1})\,z + r + s\sqrt{-1}$$
$$zz - 2\,(p - q\sqrt{-1})\,z + r - s\sqrt{-1}$$

denn es laſſen ſich keine andere imaginäre Formen gedenken, deren Produkt reell und $= z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ wäre. Aus dieſen zwey doppelten imaginären Faktoren erhielte man aber folgende vier einfache imaginäre Faktoren von Q,

$$1.\ z - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})}$$
$$2.\ z - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} = qq - r - s\sqrt{-1})}$$
$$3.\ z - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{}\sqrt{-1})}$$
$$4.\ z - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}$$

Und multiplicire man nun den erſten und dritten dieſer Faktoren mit einander, und ſetze dabey der Kürze wegen $t = pp - qq - r$, und $u = 2pq - s$; ſo erhielte man zum Produkte

$$zz - (2p - \sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})})\,z + pp + qq$$
$$- p\sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} + \sqrt{(tt + uu)}$$
$$- q\sqrt{(-2t + 2\sqrt{(tt + uu)})}$$

welches allerdings ein reelles Produkt iſt. Eben ſo iſt das Produkt aus dem zweyten und vierten Faktor reell, und =

$$zz - (2p + \sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})})\,z + pp + qq$$
$$+ p\sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} + \sqrt{(tt + uu)}$$
$$+ q\sqrt{(-2t + 2\sqrt{(tt + uu)})}$$

Auf dieſe Weiſe iſt das Produkt Q, wovon angenommen wurde, daß es nicht in zwey doppelte reelle Faktoren aufgelöſet werden könne, wirklich in dergleichen aufgelöſet worden*).

*) Wenn man $t = pp - qq - r$, und $u = 2pq - s$ ſetzt, ſo erhalten die einfachen imaginäre Faktoren von Q folgende Geſtalt.

$$1.\ z - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{(t + u\sqrt{-1})}$$
$$2.\ z - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{(t + u\sqrt{-1})}$$
$$3.\ z - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{(t - u\sqrt{-1})}$$
$$4.\ z - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{(t - u\sqrt{-1})}$$

Setzt man nun ferner $\sqrt{(t + u\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1}$ und $\sqrt{(t - u\sqrt{-1})} = a - b\sqrt{-1}$

ſo erhält man, wenn man die Quadrate nimmt,

$$t + u\sqrt{-1} = aa + 2ab\sqrt{-1} - bb$$
$$t - u\sqrt{-1} = aa - 2ab\sqrt{-1} - bb$$

folglich $t = aa - bb$, und $u = 2ab$

Dieſes giebt $(aa + bb)^2 = (aa - bb)^2 + 4aabb = tt + uu$ woraus $aa + bb = \sqrt{(tt + uu)}$ wird. Nunmehr iſt alſo

$$aa = \tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)}$$
$$b\,q = -\tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)}$$ und folglich

$$a = \sqrt{(\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)})} \text{ und}$$
$$b = \sqrt{(-\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)})}$$

Wenn man daher den Größen a, b, aa, bb, die hier gefundenen Werthe beylegt, ſo ſind ſelbige reell, und überdies hat man dabey $\sqrt{(t + u\sqrt{-1})} = a + b\sqrt{-1}$ und $\sqrt{(t - u\sqrt{-1})} = a - b\sqrt{-1}$. Hierdurch aber werden die einfachen imaginären Faktoren von Q

$$1.\ z - p - q\sqrt{-1} + a + b\sqrt{-1} = z - p + a + (b - q)\sqrt{-1}$$
$$2.\ z - p - q\sqrt{-1} - a - b\sqrt{-1} = z - p - a - (b + q)\sqrt{-1}$$
$$3.\ z - p + q\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} = z - p + a - (b - q)\sqrt{-1}$$
$$4.\ z - p + q\sqrt{-1} - a + b\sqrt{-1} = z - p - a + (b + q)\sqrt{-1}$$

Und da das Produkt aus 1 und 3.

$$(z - p + a)^2 + (b - q)^2$$

das Produkt aus 2 und 4 aber

$$(z - p - a)^2 + (b + q)^2$$

iſt, ſo fällt hieraus auch die Realität dieſer Produkte, welche entwickelt die im 5 geben, in die Augen. Daß $2\sqrt{(\pm\tfrac{1}{2}t + \sqrt{(tt + uu)})} = \sqrt{(\pm 2t + 2\sqrt{(tt + uu)})}$ ſey, braucht hier wohl kaum erinnert zu werden.

6. Wenn eine Function Z von z imaginäre Faktoren hat, deren Anzahl übrigens ſo groß oder ſo klein ſeyn kann, als ſie will: ſo kann man allemal je zwey und zwey davon auf eine ſolche Art mit einander verbinden, daß ihr Produkt reell wird.

Da die Anzahl der imaginären Faktoren immer eine gerade Zahl iſt, ſo kann man ſie durch 2m ausdrucken, und aus (4) iſt bekannt, daß das Produkt aus allen dieſen imaginären Faktoren reell iſt. Giebt es daher nur zwey imaginäre Faktoren, ſo iſt aus dieſem Grunde ihr Produkt nothwendiger Weiſe reell; und ſind der imaginären Faktoren viere, ſo läßt ſich ihr Produkt nach dem vorhergehenden in zwey doppelte reelle Faktoren von der Form $fzz + gz + h$ verwandeln. Nun läßt ſich zwar dieſe Beweisart nicht auf die höhern Poteſtäten ausdehnen; indeß verliert dadurch der angeführte Satz nichts von ſeiner Gewißheit; ſo daß alſo allezeit anſtatt jeder 2n einfachen imaginären Faktoren n doppelte reelle Faktoren erhalten, und daher jede ganze Function von z entweder in reelle einfache oder in reelle doppelte Faktoren aufgelöſet werden kann. In dem Artickel Trinomiſche Faktoren ſind Functionen wie $a + bz^n$; $a + bz^n + cz^n$; $a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n}$; u. ſ. f. wirklich in dergleichen doppelte reelle Faktoren aufgelöſet werden, und fehlt es daher auch hier an einem ſtrengen Beweiſe, ſo wird doch dort aller Zweifel verſchwinden.*)

*) Da der Satz: jede ganze rationale Function von x, als $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} +$ ꝛc., läßt ſich in reelle einfache, entweder oder doppelte, Faktoren auflöſen, in der Integral-Rechnung von der größten Wichtigkeit iſt, ſo hat ihn Euler in ſeinen Recherches ſur les racines imaginaires des équations, in der Hiſtoire de l'Academie royale des Sci-

ences et belles Lettres, vom Jahr 1749 durch verſchiedene Beweiſe auſſer Zweifel zu ſetzen geſucht.

Wir haben dieſe Beweiſe im Artickel Wurzel imaginäre bey Anführung dieſer Schrift des H. Eulers im Auszuge geliefert.

7. Wenn eine ganze Function Z für $z = a$ den Werth A, und für $z = b$ den Werth B erhält; ſo kann dieſelbe dadurch, daß man für z Werthe ſetzt, die zwiſchen a und b fallen, jeden zwiſchen A und B liegenden Werth bekommen.

Denn da Z eine einförmige Function von z iſt, ſo muß es bey der Subſtitution eines jeden reellen Werthes für z auch allemal einen reellen Werth bekommen. Da nun Z, wenn man $z = a$ ſetzt, den Werth A, und wenn man $= b$ ſetzt, den Werth B bekömmt, ſo kann es nicht anders von dem Werthe A zu dem Werthe B, als durch alle zwiſchen beyden liegenden Werthe, übergehen. Hat alſo die Gleichung $Z - A = 0$ eine reelle Wurzel, und die Gleichung $Z - A = 0$ ebenfalls: ſo muß auch $Z - C = 0$ eine reelle Wurzel haben, wenn C zwiſchen A und B liegt. Geben alſo die Ausdrücke $Z - A$ $Z - B$ einen einfachen reellen Faktor, ſo muß auch dem Ausdrucke $Z - C$, wofern nur C zwiſchen A und B fällt, ein einfacher reeller Faktor zukommen.

8. Wenn der Exponent der höchſten Poteſtät von z in einer ganzen Function Z eine ungerade Zahl $2n + 1$ iſt: ſo hat die Function Z zum wenigſten Einen reellen einfachen Faktor.

Z hat in dieſem Falle die Form $z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma^{2n-2}$ + u. ſ. f. Setzt man nun darin $z = \infty$, ſo wird $Z = (\infty)^{2n+1} = \infty$, weil alsdann alle folgende Glieder gegen das erſte gehalten verſchwinden; und es hat alſo $Z - \infty$ einen einfachen reellen Faktor, nähmlich $z - \infty$. Setzt man ferner $z = -\infty$, ſo wird $Z = (-\infty)^{2n+1} = -\infty$; und es hat daher $Z + \infty$ den einfachen reellen Faktor $z + \infty$. Da alſo $Z - \infty$ und $Z + \infty$ einen einfachen reellen Faktor haben, ſo muß auch $Z + C$ ein einfacher reeller Faktor zukommen, wofern C zwiſchen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ enthalten, d. h. irgend eine reelle Zahl iſt, ſie mag nun poſitiv oder negativ ſeyn. Setzt man daher $C = 0$, ſo hat auch die Function Z ſelbſt einen einfachen reellen Faktor $z - c$, und c fällt zwiſchen $+\infty$ und $-\infty$ und iſt folglich entweder eine poſitive oder negative Größe oder $= 0$.

9. Es hat daher jede Function Z, worin der Exponent der höchſten Poteſtät von z eine ungerade Zahl iſt, entweder einen, oder drey, oder fünf, oder ſieben u. ſ. f. reelle einfache Faktoren.

Denn da bewieſen worden iſt, daß die Function Z allemal Einen reellen einfachen Faktor $z - c$ hat, ſo nehme man an, daß ihr auch auſſerdem der Faktor $z - d$ zukomme. Dividiret man nun die Function Z, in welcher die höchſte Poteſtät von z, z^{2n+1} iſt, durch das Produkt $(z - c)(z - d)$, ſo iſt die höchſte Poteſtät des Quotienten $= z^{2n-1}$, und da dient der ungerade Exponent $2n - 1$ zum Beweiſe, daß die Function Z auſſer jenen Faktoren noch einen einfachen reellen Faktor hat. Wenn alſo die Function Z mehr als einen reellen einfachen Faktor hat, ſo hat ſie entweder drey, oder, da man auf dieſem Wege fortgehen kann, fünf oder ſieben u. ſ. f. Es iſt alſo die Anzahl der reellen einfachen Faktoren immer eine ungerade Zahl; und

da die Zahl aller einfachen Faktoren = 2 n + 1 iſt, ſo iſt auch hieraus die Anzahl der imaginären Faktoren eine gerade Zahl. *)

*) Dieſer Satz kann auch auf die Art bewieſen werden, daß man zeigt, daß jede Gleichung, worin der Exponent der höchſten Poteſtät eine ungerade Zahl iſt, alſo jede Gleichung von der Form

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots + N = 0$$

zum wenigſten eine reelle Wurzel, und wenn ſie deren mehrere hat, ſolche immer in ungerader Anzahl habe. Man ſetze alſo

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots + N = y$$

und betrachte die krumme Linie, welche durch dieſe Gleichung ausgedruckt wird. Hier iſt offenbar, daß zu jeder Abſciſſe x nicht mehr als eine Applicate y gehört, und daß, wenn y = 0 wird, der Werth der Abſciſſe x eine Wurzel der gegebenen Gleichung iſt. Es wird daher dieſe Gleichung auch ſo viel reelle Wurzeln haben, als es Stellen giebt, wo y verſchwindet, und weil dies da geſchiehet, wo die krumme Linie die Abſciſſen-Linie durchſchneidet, ſo wird die Anzahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung der Menge der Punkte gleich ſeyn, in welchen die krumme Linie die Axe ſchneidet, worauf man die Abſciſſen nimmt. Um nun die Menge dieſer Durchſchnittespunkte zu beſtimmen, ſetze man zuvörderſt $x = +\infty$. Alsdann wird $y = \infty^{2m+1} = \infty$, und es liegt daher der Theil der krummen Linie, der zu den unendlich großen poſitiven Abſciſſen gehört, über der Axe, weil ſeine Applicaten y poſitiv ſind. Nun ſetze man ferner $x = -\infty$. Dann wird $y = (-\infty)^{2m+1} = -\infty$, und es ſind alſo in dieſem Falle die Applicaten negativ, und der zugehörige Theil der krummen Linie liegt unter der Axe. Da nun beyde gedachte Theile der krummen Linie Theile von Einer continuirlichen Linie ſind, weil zu jeder Abſciſſe x nicht mehr als eine Applicate y gehört: ſo muß dieſe Linie nothwendig die Axe irgendwo ſchneiden, und wenn ſie ſolches in mehrern Punkten thut, ſo muß die Anzahl dieſer Punkte jederzeit eine ungerade Zahl ſeyn. Hieraus folgt, daß die gegebene Gleichung zum wenigſten eine reelle Wurzel, und wenn ſie deren mehrere enthält, ſolche jederzeit in ungerader Anzahl hat.

10. Ferner iſt die Anzahl der einfachen reellen Faktoren einer jeden Function Z, worinn der Exponent der höchſten Poteſtät von z eine gerade Zahl 2n iſt, entweder zwey, oder viere oder ſechs u. ſ. w.

Denn nimmt man an, daß die Function Z, 2m + 1 einfache reelle Faktoren habe: ſo erhält man, wenn man die Function durch das Produkt aller dieſer Faktoren dividiret, einen Quotienten, worin die höchſte Poteſtät von $z = z^{2n-2m-1}$, und alſo eine Poteſtät mit einem ungeraden Exponenten iſt. Es muß alſo die Function Z außer jenen Faktoren nothwendig noch einen reellen einfachen Faktor haben, und die Anzahl aller Faktoren wird alſo zum wenigſten = 2m + 2, und folglich eine gerade Zahl, und die Anzahl aller imaginären einfachen Faktoren ebenfalls eine gerade Zahl ſeyn. Es iſt alſo die Anzahl aller imaginären einfachen Faktoren einer jeden ganzen Function, ſo wie auch ſchon vorhin bewieſen worden iſt, eine gerade Zahl *).

*) Auch dieſer Satz läßt ſich auf eine der beym vorhergehenden (9) berührten ähnliche Art, oder ſo beweiſen, daß man zeigt, daß die Gleichung

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots + N = 0$$

ent-

entweder gar keine, oder eine gerade Anzahl reeller Wurzeln hat. Denn ſetzt man

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots + N = y$$

und betrachtet man die krumme Linie, welche durch dieſe Gleichung ausgedruckt wird: ſo wird y, ſowohl wenn man $x = + \infty$, als wenn man $x = - \infty$ nimmt, $= + \infty$, und es liegt daher nicht nur der Theil der Curve, welcher zu den unendlich großen poſitiven, ſondern auch der, welcher zu den unendlich großen negativen Abſciſſen gehört, über der Axe. Es kann daher die durch die gegebene Gleichung ausgedruckte krumme Linie die Axe gar nicht ſchneiden; aber wenn ſie es irgendwo thut, und dadurch in die Gegend unter der Axe kommt, ſo muß ſie es auch jederzeit noch einmal thun, um dadurch wieder in die Gegend über der Axe zu kommen. Es giebt daher hier entweder gar keinen, oder eine gerade Anzahl von Durchſchnittspunkten, und es hat folglich auch die Gleichung

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots + N = 0$$

entweder gar keine, oder eine gerade Anzahl reeller Wurzeln.

11. Wenn in einer ganzen Function Z der Exponent der höchſten Poteſtät von z eine gerade Zahl iſt, und die abſolute oder beſtändige Größe das Zeichen — vor ſich hat; ſo hat die Function Z zum wenigſten zwey einfache reelle Faktoren.

Eine ſolche Function hat dieſe Form: $z^{2n} \pm \alpha z^{2n-1} \pm \beta z^{2n-2} \ldots \pm rz - A$. Setzt man nun $Z = \infty$ ſo wird $z = \infty$, und ſetzt man $z = 0$, ſo wird $Z = -A$. Es hat alſo $Z - \infty$ den einfachen reellen Faktor $z - \infty$ und $Z + A$ den einfachen reellen Faktor $z - 0$; und da nun 0 zwiſchen die Grenzen $-\infty$ und $+A$ fällt, ſo muß auch $Z + 0$ den einfachen reellen Faktor $z - c$ haben, wobey c zwiſchen 0 und ∞ enthalten iſt. Setzt man nun ferner $z = -\infty$, ſo wird $Z = \infty$; und da alsdann $Z - \infty$ den Faktor $z + \infty$ und $Z + A$ den Faktor $z + 0$ hat: ſo muß $Z + 0$ auch einen einfachen reellen Faktor $z + d$ haben, wobey d zwiſchen 0 und ∞ fällt, und daraus iſt das zu beweiſende klar. Wenn alſo Z eine Function von der beſchriebenen Art iſt, ſo muß die Gleichung $Z = 0$ zum wenigſten zwey reelle Wurzeln, eine poſitive und eine negative, haben. So hat z. B. die Gleichung $z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z - aa = 0$ zwey reelle Wurzeln, und die eine davon iſt poſitiv und die andere negativ *).

*) Vermittelſt einer geometriſchen Conſtruction kann man ſich von dieſem auf folgende leichte Art überzeugen. Man ſetze

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots - OO = y$$

ſo erſtreckt ſich die Curve, welche durch dieſe Gleichung ausgedruckt wird, nach der Anmerkung zum vorhergehenden (10) auf beyden Seiten über der Axe ins Unendliche. Setzt man nun $x = 0$, ſo wird $y = - OO$, und der Punkt der Curve, der zu $x = 0$ gehört, liegt alſo unter der Axe, und es muß daher die Curve, um ſich von dieſem Punkte auf gedachten beyden Seiten über der Axe continuirlich ins Unendliche erſtrecken zu können, auch auf beyden Seiten dieſes Punktes die Axe ſchneiden, um in die Gegend über ihr zu kommen. Da nun jeder Durchſchnittspunkt eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung giebt, und von den gefundenen zwey Durchſchnittspunkten, der eine zu einer poſitiven, und der andere zu einer negativen Ab-

Abſciſſe führt, ſo iſt klar, daß die gegebene Gleichung zum wenigſten zwey reelle Wurzeln, eine poſitive und eine negative, hat.

Dieſer Beweis, ſo wie auch die in den Anmerkungen zu den beyden Vorhergehenden (9. 10) enthaltenen ſind aus Eulers beym (9) angeführten Recherches ſur les racines imaginaires des équitations entlehnt.

Man ſehe auch die Artikel Gleichung Zu- und Abnahme ihres Werthes und größter und kleinſter Werth.

B. Umformung gebrochner Functionen.

1. Auflöſung der unächten gebrochnen Functionen in eine ganze und in eine ächte gebrochne Function. Wenn die veränderliche Größe z in einer gebrochenen Function eben ſo viel oder noch mehr Dimenſionen im Zähler als im Nenner hat: ſo läßt ſich die Function in zwey Theile auflöſen, davon der eine eine ganze, der andere aber eine gebrochene Function iſt, wo die veränderliche Größe z im Zähler weniger Dimenſionen hat als im Nenner.

Denn wenn der Exponent der höchſten Poteſtät von z im Zähler größer iſt als im Nenner, ſo darf man nur den Zähler auf die gewöhnliche Art durch den Nenner dividiren, und die Diviſion abbrechen, wenn bey der Fortſetzung derſelben in den Quotienten negative Exponenten von z kommen würden. Der ſo gefundene Quotient beſtehet aus einem ganzen und einem gebrochenen Theile, der Zähler des letztern enthält z mit weniger Dimenſionen als der Nenner, und beyde Theile ſind zuſammen genommen der gegebenen Function gleich. Wäre z. B. die gebrochene Function $\frac{1+z^4}{1+zz}$ gegeben, ſo löſete man dieſelbe durch die Diviſion auf folgende Art auf:

$$
\begin{array}{r|l|l}
zz+1 & z^4+1 & zz-1+\dfrac{2}{zz+1} \\
 & z^4+zz & \\
\hline
 & -zz+1 & \\
 & -zz-1 & \\
\hline
 & +2 &
\end{array}
$$

und es iſt folglich $\frac{1+z^4}{1+zz} = zz - 1 + \frac{2}{1+zz}$.

Man kann ſolche gebrochene Functionen, in welchen die veränderliche Größe z im Zähler mehr Dimenſionen hat als im Nenner, nach dem Beyſpiele der Arithmetik, welche die Brüche in unächte und ächte theilt, entweder ebenfalls unächte Brüche oder unächte gebrochene Functionen nennen, und ſie dadurch von den ächten gebrochenen Functionen oder ſolchen unterſcheiden, wo die veränderliche Größe im Zähler weniger Dimenſionen hat, als im Nenner. Es kann alſo jede unächte gebrochene Function in eine ganze und in eine ächte gebrochene Function aufgelöſet werden, und dieſe Auflöſung geſchiehet auf dem Wege der gemeinen Diviſion.

2. Auflöſung der ächten gebrochenen Functionen in Partielbrüche. Wenn der Nenner einer gebrochenen Function ein Product aus zwey Factoren iſt, die keinen gemeinſchaftlichen Diviſor haben, ſo kann man dieſe Function in zwey Brüche auflöſen, deren Nenner jenen beyden Faktoren gleich ſind.

Ungeachtet dieſe Auflöſung eben ſowohl bey den unächten als bey den ächten gebrochenen Functionen ſtatt findet; ſo haben wir doch dieſelbe vorzüglich bey

bey den ächten gebrochenen Functionen zu betrachten. Zerfällt man aber den Nenner einer ſolchen Function in zwey Faktoren, die keinen gemeinſchaftlichen Diviſor haben, ſo läßt ſich die Function ſelbſt in zwey andere ächte gebrochene Functionen verwandeln, deren Nenner den Faktoren des Nenners der gegebenen Function gleich ſind. Ueberdies giebt es bey den ächten gebrochenen Functionen nicht mehr als einen Weg, dieſe Auflöſung zu verrichten; wovon man ſich durch ein Beyſpiel noch deutlicher als durch allgemeine Schlüſſe überzeugen kann. Es ſey alſo die gebrochene Function $\frac{1 - 2z + 3zz - 4z^3}{1 + 4z^4}$ gegeben. Da der Nenner dieſer Function $1 + 4z^4$ dem Produkte $(1 + 2z + zz)\ (1 - 2z + 2zz)$ gleich iſt: ſo läßt ſich die Function in zwey Brüche auflöſen, davon der eine $1 + zz$, und der andere $1 - 2z + 2zz$ zum Nenner hat. Um dieſe Brüche zu finden, ſetze man, da ſie ächte Brüche ſind, die Zähler derſelben, und zwar in der Ordnung, worin die Nenner angeführt worden ſind, $\alpha + \beta z$, und $\gamma + \delta z$. Alsdann iſt

$$\frac{1 - 2z + 3zz - 4z^3}{1 + 4z^4} = \frac{\alpha + \beta}{1 + 2z + 2zz} + \frac{\gamma + \delta z}{1 - zz + 2zz}.$$

Addirt man nun dieſe beyden Brüche, ſo erhält man für die Summe

zum Zähler	und zum Nenner.
$\alpha - 2\alpha z + 2\alpha zz$ $+ \beta z - 2\beta zz + 2\beta z^3$ $\gamma + 2\gamma z + 2\gamma zz$ $+ \delta z + 2\delta zz + 2\delta z^3$	$1 + 4z^4$

Da nun der Nenner dieſer Summe dem Nenner der gegebenen gebrochenen Function gleich iſt, ſo müſſen auch die Zähler von beyden gleich werden; und da es hier eben ſo viel unbekannte Größen giebt, als Glieder, die einander gleich geſetzt werden müſſen, ſo kann ſolches allerdinges, aber auch nur auf eine einzige Art geſchehen. Man erhält nähmlich die vier Gleichungen.

1. $\alpha + \gamma = 1$
2. $-2\alpha + \beta + 2\gamma + \delta = -2$
3. $2\alpha - 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 3$, und
4. $2\beta + 2\delta = -4$;

und da $\alpha + \gamma = 1$, und $\beta + \delta = -2$ iſt, ſo geben die zweyte und dritte Gleichung (wenn man -2 ſtatt $\beta + \delta$ in die zweyte, und 2 ſtatt $2\alpha + 2\gamma$ in die dritte Gleichung bringt,) $\alpha - \gamma = 0$, und $\delta - \beta = \frac{1}{2}$. Hieraus aber wird $\alpha = \frac{1}{2}$; $\gamma = \frac{1}{2}$; $\beta = -\frac{3}{4}$. und folglich die gegebene gebrochene Function $\frac{1 - 2z + 3zz - 4z^3}{1 + 4z^4}$ gleich folgenden beyden $\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z}{1 + 2z + 2zz}$

$$+ \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z}{1 - 2z + 2zz}.$$

Es iſt leicht einzuſehen, daß dieſe Auflöſung allemahl müſſe angeſtellt werden können, weil allemahl ſo viel unbekannte Größen angenommen werden, als erforderlich ſind, um den Zähler zu entwickeln. Wenn aber die gedachten Faktoren des Nenners der gegebenen Function keine Prim-Größen zu einander ſind, oder einen gemeinſchaftlichen Diviſor haben; ſo läßt ſich aus dem, was

was in der gemeinen Arithmetik von den Brüchen gelehrt wird, einſehen, daß eine ſolche Auflöſung nicht ſtatt findet.

Es kann daher eine jede gebrochene Function $\frac{M}{N}$ in ſo viel einfache Brüche von der Form $\frac{A}{p-qz}$ aufgelöſet werden, als der Nenner N einfache und einander ungleiche Faktoren hat.

Es ſtellt dieſer Bruch $\frac{M}{N}$ eine jede ächte gebrochene Function vor, ſo daß M und N ganze Functionen von z ſind und die höchſte Poteſtät von z in M niedriger iſt als in N. Wird nun der Nenner N in ſeine einfachen Faktoren zerfällt, und ſind dieſelben einander ungleich: ſo kann die Function $\frac{M}{N}$ in ſo viel Brüche aufgelöſet werden, als N einfache Faktoren enthält; weil ein jeder Faktor der Nenner eines ſolchen Partial-Bruchs wird. Iſt daher $p-qz$ ein Faktor von N, ſo iſt er auch der Nenner eines der Partial Brüche von $\frac{M}{N}$ und da z in dem Zähler dieſes Bruchs weniger Diviſionen haben muß, als in dem Nenner, ſo muß daher der Zähler nothwendiger Weiſe eine beſtändige Größe ſeyn. Es erwächſt alſo aus jedem einfachen Faktor $p-qz$ des Nenners N ein einfacher Bruch von der Form $\frac{A}{p-qz}$, und die Summe aller dieſer Brüche iſt der gegebenen gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ gleich.

Exempel. Es ſey die Function $\frac{1+zz}{z-z^3}$ gegeben. Da hier die einfachen Faktoren des Nenners z, $1-z$, $1+z$ ſind, ſo läßt ſich dieſe Function in die drey einfachen Brüche $\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{1+z}=\frac{1+zz}{z-z^3}$ auflöſen, wo die beſtändigen Zähler A, B und C zu beſtimmen ſind. Bringt man dieſe Brüche auf einen gemeinſchaftlichen Nenner, der $-z^3$ iſt: ſo muß die Summe ihrer Zähler $=1+zz$ ſeyn; und daher entſteht die Gleichung

$$\left.\begin{matrix} A+Bz-Azz \\ +Cz+Bzz \\ -Czz \end{matrix}\right\} = 1+0z+zz$$

und aus dieſer Gleichung ergeben ſich wieder eben ſo viel andere, als man unbekannte Größen in A, B und C hat.

Es iſt nähmlich

1. $A=1$
2. $B+C=0$
3. $-A+B-C=1.$

Hier-

Hieraus ergiebt ſich $B - C = 2$; $A = 1$; $B = 1$; $C = -1$; und die Function $\frac{1+zz}{z-z^3}$ iſt alſo gleich $\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$. Daß man auf eine ähnliche Art bey einer jeden Anzahl von einfachen und einander ungleichen Faktoren N verfahren, und den Bruch $\frac{M}{N}$ jedesmal in eben ſo viel einfache Brüche auflöſen könne, als N einfache Faktoren enthält, läßt ſich leicht begreifen; wenn aber einige dieſer Faktoren einander gleich ſind, ſo iſt ein anderer Weg nöthig, von welchem nachher [3. f.] geredet werden ſoll.

Da alſo ein jeder einfacher Faktor des Nenners N einen einfachen Bruch zur Auflöſung der Function $\frac{M}{N}$ an die Hand giebt: ſo frägt ſich, wie man, wenn man einen einfachen Faktor des Nenners N kennt, den dazu gehörigen einfachen Bruch findet?

Es ſey $p - qz$ ein einfacher Faktor von N, ſo daß $N = (p - qz)\,S$, und S eine ganze Function von z ſey. Setzt man nun den Bruch, der aus dem Faktor $p - qz$ erwächſt, $= \frac{A}{p-qz}$, und den Bruch, der aus dem andern Faktor des Nenners S entſpringt $= \frac{P}{S}$ ſo daß nach 2. $\frac{M}{N} = \frac{A}{p-qz} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p-qz)\,S}$: ſo iſt $\frac{P}{S} = \frac{M-AS}{(p-qz)S}$ wo nothwendig $M - AS$ durch $p - qz$ theilbar ſeyn muß, weil die ganze Function P dem daher ſich ergebenden Quotienten gleich iſt. Setzt man alſo $z = \frac{p}{q}$ und zwar auch in M und in S, ſo wird $M - AS = 0$, folglich $A = \frac{M}{S}$ und auf dieſe Art iſt alſo der Zähler A des Bruchs $\frac{A}{p-qz}$ gefunden. Macht man aus einem jeden einfachen Faktor des Nenners N, vorausgeſetzt, daß keine darunter gleich ſind, dergleichen Brüche, ſo iſt die Summe derſelben der gegebenen Function $\frac{M}{N}$ gleich.

Exempel. Wenn man z. B. in dem vorhergehenden Exempel $\frac{1+zz}{z-z^3}$, wo man $M = 1 + zz$, und $N = z - z^3$ iſt, z als einen einfachen Faktor annimmt, ſo iſt $S = 1 - zz$ und der Zähler des einfachen Bruchs $\frac{A}{z}$, den z an die Hand giebt, $A = \frac{1+zz}{1-zz} = 1$, wenn man $z = 0$ ſetzt, und dieſen Werth erhält man dadurch, daß man den einfachen Faktor, der hier ſelbſt z iſt, $= 0$ ſetzt. Eben ſo wird, wenn man den einfachen Faktor des Nenners $1 - z$ nimmt, wodurch $S = z + zz$ wird, $A = \frac{1+zz}{z+zz}$ für $1 - z, = 0$:

alſo A = 1, und der Bruch, der aus dem Faktor $1 - z$ entſpringt, $= \frac{1}{1-z}$. Der dritte Faktor $1 + z$ endlich giebt, da dadurch $S = 1 - zz$, und $A = \frac{1+zz}{z-zz}$, für $1 + z = 0$, oder $z = -1$, wird, $A = -1$, und den einfachen Bruch $= \frac{-1}{1+z}$. Man findet alſo auf dieſem Wege ſo wie vorhin $\frac{1+zz}{z-z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$.

3. Auflöſung ſolcher Functionen, deren Nenner aus lauter gleichen Faktoren zuſammengeſetzt ſind. Eine gebrochene Function von der Form $\frac{P}{p-qz^n}$, in welcher die höchſte Poteſtät von z in dem Zähler P eine niedrigere Poteſtät iſt, als die höchſte Poteſtät eben dieſer z in dem Nenner $(p - qz)^n$, kann in Partial-Brüche von der Form $\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} \ldots\ldots + \frac{K}{p-qz}$ verwandelt werden, deren Zähler insgeſammt beſtändige Größen ſind.

Da die höchſte Poteſtät von z in dem Zähler P eine niedrigere Poteſtät als z^n iſt, ſo muß ſie z^{n-1} ſeyn, und alſo P die Form haben: $\alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 + \ldots\ldots + \varkappa z^{n-1}$, wo die Anzahl aller Glieder = n, und auſſerdem P dem Zähler der Summe aller gedachten Partial-Brüche, nachdem man dieſelben zuvor auf den gemeinſchaftlichen Nenner $(p - qz)^n$ gebracht hat, oder $A + B(p - qz) + C(p - qz)^2 + D(p - qz)^3 + \ldots\ldots + (p - qz)^{n-1} = \alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 + \ldots\ldots + \varkappa z^{n-1}$ iſt. In dieſer Gleichung iſt aber die höchſte Poteſtät von z auf beyden Seiten dieſelbe, nähmlich z^{n-1}, und überdies hat man darin eben ſo viel unbekannte Größen A, B, C, D ..... K (in allen n) als man Glieder gleich ſetzen muß. Man kann daher die beſtändigen Größen A B, C u. ſ. w. auf die Art beſtimmen, daß die ächte gebrochene Function $\frac{P}{(p-qz)^n}$

$$= \frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \frac{D}{(p-qz)^{n-3}}$$

$$= \frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \frac{D}{(p-qz)^{n-3}}$$

$+ \ldots + \frac{K}{p-qz}$ wird; und die ſogleich folgenden Nummern werden dieſe Beſtimmung auf eine ſehr leichte Art verrichten lehren.

4. Auf-

4. Auflöſung ſolcher Functionen, deren Nenner Produkte aus zuſammen geſetzten und einfachen Faktoren ſind. Wenn der Nenner der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$, $(p - qz)^2$ zum einfachen Faktor hat, ſo laſſen ſich die Partial-Brüche, die aus dieſem Faktor entſpringen, auf folgende Art finden. Es iſt in dem Vorhergehenden gezeigt worden, wie man die Partial-Brüche findet, die aus den einfachen Faktoren des Nenners entſpringen, wenn alle dieſe Faktoren ungleich ſind; jetzt nehme man an, daß zwey von dieſen Faktoren gleich ſeyen, oder man betrachte $(p - qz)^2$ als einen Faktor des Nenners N. Aus dieſem Faktor entſpringen nach dem Vorhergehenden die Partial-Brüche $\frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz}$. Nun ſey $N = (p - qz)^2 S$, ſo wird $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p-qz)^2 S} = \frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz} + \frac{P}{S}$, wenn $\frac{P}{S}$ alle die einfachen Brüche zuſammengenommen bedeutet, die aus dem Faktor S des Nenners N entſpringen. Dann iſt $\frac{P}{S} = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{}$, und $P = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{(p-qz)^2}$ = einer ganzen Function, und $M - AS - B$ $(p - qz) S$ durch $(p - qz)^2$ theilbar. Es ſey zuvörderſt durch $p - qz$ theilbar, ſo wird der ganze Ausdruck $M - AS - B(p - qz) S$ verſchwinden, wenn man $p - qz = 0$, oder $z = \frac{p}{q}$ ſetzt.

Setzt man alſo allenthalben $\frac{p}{q}$ anſtatt z, ſo wird $M - AS = 0$, und folglich $A = \frac{M}{S}$, oder es giebt der Bruch $\frac{M}{S}$, wenn man darin allenthalben $\frac{p}{q}$ anſtatt z ſetzt, den Werth der beſtändigen Größe A. Hat man dieſen gefunden, ſo iſt nun auch die Größe $M - AS - B(p - qz) S$ durch $(p - qz)^2$, oder $\frac{M - AS}{p - qz} - BS$ durch $p - qz$ theilbar. Setzt man alſo allenthalben $z = \frac{p}{q}$, ſo wird $\frac{M - AS}{p - qz} = BS$, und folglich $B = \frac{M - AS}{(p-qz)S}$ $= \frac{1}{p-qz}\left(\frac{M}{S} - A\right)$, wo aber zu bemerken iſt, daß da $M - AS$ durch $p - qz$ theilbar iſt, man dieſe Theilung vor der Subſtitution von $\frac{p}{q}$ für z anſtellen muß. Oder man ſetze $\frac{M - AS}{p - qz} = T$, ſo wird $B = \frac{T}{S}$ wenn man $z = \frac{p}{q}$ annimmt. Hat man nun die Zähler A und B gefunden, ſo ſind die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(p - qz)^2$ des Nenners N entſpringen, $\frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz}$.

Erſtes Exempel. Es ſey die Function $\frac{1-zz}{zz(1+zz)}$ gegeben. Da hier das Quadrat zz ein Faktor des Nenners iſt, ſo iſt $S = 1 + zz$, und $M = 1 - zz$. Nennt man nun die aus zz entſpringende Partial-Brüche $\frac{A}{zz} + \frac{B}{z}$, ſo wird $A = \frac{M}{S} = \frac{1-zz}{1+S}$, wenn der Faktor $z = 0$ geſetzt wird; folglich $A = 1$. Ferner iſt nun $M - A = -2zz$, welches, durch den einfachen Faktor z dividirt, $T = -2$ giebt; und hieraus ergiebt ſich $B = \frac{T}{S} = \frac{-2z}{1+z}$, wenn man $z = 0$ ſetzt. Es iſt daher $B = 0$, und es entſpringt folglich aus dem Faktor des Nenners zz bloß dieſer eine Partial-Bruch $\frac{1}{zz}$.

Zweytes Exempel. Es ſey die gebrochene Function $\frac{z^3}{(1-z)^2(1+z^4)}$ gegeben. Da hier das Quadrat $(1-z)^2$ ein Faktor des Nenners iſt, ſo kann man die Partial-Brüche $= \frac{A}{(1-z)^2} + \frac{B}{1-z}$ ſetzen. Ferner iſt $M = z^3$, und $S = 1 + z^4$; folglich $A = \frac{M}{S} = \frac{z^3}{1+z^4}$, für $1 - z = 0$, oder $z = 1$; alſo $A = \frac{1}{2}$. Hieraus ergiebt ſich weiter $M - AS = z^3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} z^4 = -\frac{1}{2} + z^3 - \frac{1}{2} z^4$, welches, durch $1 + z$ dividiret, $T = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} zz + \frac{1}{2} z^3$, und alſo $B = \frac{T}{S} = \frac{-1 - z - zz + z^3}{2 + 2z^4}$, für $z = 1$ giebt. Es iſt alſo $B = -\frac{1}{2}$, und die geſuchten Partial-Brüche ſind $\frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{2(1-z)}$.

Wenn der Nenner N der gebrochnen Function $\frac{M}{N}$ den Faktor $(p - qz)^3$ hat: ſo findet man die aus dieſem Faktor entſpringenden Partial-Brüche $\frac{A}{(p-qz)^3} + \frac{B}{(p-qz)^2} + \frac{C}{p-qz}$ auf folgende Art.

Man ſetze $N = (p - qz)^3 S$, und den Bruch, der aus dem Faktor S entſpringt, $= \frac{P}{S}$, ſo iſt $P = \frac{M - AS - B(p-qz)S - C(p-qz)^2 S}{(p-qz)^3}$ = einer ganzen Function. Hier muß zuvörderſt der Zähler $M - AS - B(p - qz) S - C(p - qz)^2 S$ durch $p - qz$ theilbar ſeyn; und ſetzt man daher $p - qz = 0$, oder $z = \frac{p}{q}$, ſo wird $M - AS - B(p - qz) S - C(p - qz)^2 S = 0$, und $M - AS = 0$, und folglich $A = \frac{M}{S}$ für $z = \frac{p}{q}$. Hat man auf dieſe Weiſe A gefunden, ſo iſt $M - AS$ durch $p - qz$, und wenn man

man

man $\frac{M - AS}{p - qz} = T$ ſetzt, $T - BS - C(p - qz)S$ noch durch $(p - qz)^n$ theilbar. Nimmt man daher $p - qz = 0$, ſo wird $T - BS - C(p - qz)S = 0$, und $B = \frac{T}{S}$, für $z = \frac{p}{q}$. Iſt auf dieſem Wege auch B gefunden worden, ſo ſetze man $\frac{T - BS}{p - qz} = V$; wo alſo $V - CS$ durch $q - pz$ theilbar, und daher $V - CS = 0$ werden muß, wenn man $p - qz = 0$ ſetzt. Es iſt daher $C = \frac{V}{S}$, wenn man $z = \frac{p}{q}$ nimmt; und kennt man nun die Zähler A, B und C, ſo ſind die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(p - qz)^3$ des Nenners N entſpringen, $\frac{A}{(p - qz)^3} + \frac{B}{(p - qz)^2} + \frac{C}{p - qz}$.

Exempel. Es ſey die gebrochene Function $\frac{zz}{(1 - z)^3\,(1 + zz)}$ gegeben, und die Partial-Brüche, die aus dem cubiſchen Faktor $(1 - z)^3$ des Nenners derſelben entſpringen, ſeyen $\frac{A}{(1 - z)^3} + \frac{B}{(1 - z)^2} + \frac{C}{1 - z}$. Alsdann iſt $M = zz$, und $S = 1 + zz$; und daraus ergiebt ſich zuvörderſt $A = \frac{zz}{1 + zz}$ für $1 - z = 0$, oder $z = 1$; alſo $A = \frac{1}{2}$. Ferner iſt nun hieraus und aus $T = \frac{M - AS}{1 - z}$, $T = \frac{\frac{1}{2}zz - \frac{1}{2}}{1 - z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z$; und daher $B = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z}{1 + zz}$, für $z = 1$, folglich $B = -\frac{1}{2}$. Endlich iſt $V = \frac{T - BS}{1 - z} = \frac{T + \frac{1}{2}S}{1 - z} = \frac{-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}zz}{1 - z} = -\frac{1}{2}z$; folglich $C = \frac{V}{S} = \frac{-\frac{1}{2}z}{1 + zz}$ für $z = 1$, alſo $C = -\frac{1}{4}$. Es ſind daher die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(1 - z)^3$ des Nenners entſpringen,

$$\frac{1}{2(1 - z)^3} - \frac{1}{2(1 - z)^2} - \frac{1}{4(1 - z)}.$$

Wenn der Nenner N der gebrochnen Function $\frac{M}{N}$ den Faktor $(p - qz)^n$ hat, ſo findet man die daraus entſpringenden Partialbrüche $\frac{A}{(p - qz)^n} + \frac{B}{(p - qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p - qz)^{n-2}} + \ldots \frac{K}{p - qz}$ auf folgende Art.

Man ſetze den Nenner $N = (p - q)^{zn}Z$, und ſchließe wie vorhin. Auf dieſe Art findet man

1. $A = \frac{M}{Z}$, für $z = \frac{p}{y}$, und wenn man nun $P = \frac{M - AZ}{p - qz}$ ſetzt,
2. $B = \frac{P}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$, und wenn man nun $Q = \frac{P - BZ}{p - qz}$ ſetzt,
3. $C = \frac{Q}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$, und wenn man nun $R = \frac{Q - CZ}{p - qz}$ ſetzt,
4. $D = \frac{R}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$, und wenn man nun $S = \frac{R - DZ}{p - qz}$ ſetzt,
5. $E = \frac{S}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$ u. ſ. w.

Beſtimmt man aber hiernach alle einzelne Zähler, oder die beſtändigen Größen A, B, C, D, E u. ſ w. ſo werden dadurch auch die Partialbrüche, die aus dem Faktor $(p - qz)^n$ des Nenners N entſpringen, gefunden.

Exempel. Es ſey die gebrochene Function $\frac{1 + zz}{z^5(1 + z^3)}$ gegeben, und die Partialbrüche, die aus dem Faktor z^5 des Nenners entſpringen, ſeyen $\frac{A}{z^5} + \frac{B}{z^4} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{z}$. Sollen nun die beſtändigen Zähler dieſer Brüche gefunden werden, ſo iſt $M = 1 + zz$; $Z = 1 + z^3$; und $\frac{p}{q} = 0$. Man rechne daher auf folgende Art.

Zuvörderſt iſt hier $A = \frac{M}{Z} = \frac{1 + zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich iſt $A = 1$.

Nun ſetze man $P = \frac{M}{Z} \frac{1 + zz}{- 1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich iſt $A = 1$.

Nun ſetze man $P = \frac{M - AZ}{z} = \frac{zz - z^3}{z} = z - zz$; ſo iſt zum andern $B = \frac{P}{Z} = \frac{z - zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; Folglich iſt $B = 0$.

Ferner ſetze man $Q = \frac{P - BZ}{z} = \frac{z - zz}{z} = 1 - z$; ſo iſt drittens $C = \frac{Q}{Z} = \frac{1 - z}{1 + z^3}$, für $z = 0$: folglich iſt $C = 1$

Weiter ſetze man $R = \frac{Q - CZ}{z} = \frac{-z - z^3}{z} = -1 - zz$; ſo iſt viertens $D = \frac{R}{Z} = \frac{-1 - zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich iſt $D = -1$.

Endlich ſetze man $S = \frac{R - DZ}{z} = \frac{-zz + {}^3}{z} = -zz + z$; ſo iſt fünf-

tens

tens $E = \frac{S}{Z} = \frac{-z + zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich iſt $E = 0$.

Es ſind daher die geſuchten Brüche, $\frac{1}{z^5} + \frac{0}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z}$.

Wenn daher irgend eine gebrochne rationale Function $\frac{M}{N}$ in ſummirende Theile aufgelöſet, und auf die einfachſte Art ausgedruckt werden ſoll, ſo kann ſolches auf folgende Weiſe geſchehen.

Man ſuche alle einfache Factoren des Nenners N, ſie mögen nun reel oder imaginär ſeyn; nimmt von denen, die nicht mehr als einmal vorkommen, einen jeden beſonders, und entwickelt den aus ihm entſpringenden Partialbruch. Kommt ein oder der andere Factor mehr als einmal vor, ſo ſucht man das Product aller einander gleichen Factoren, welches die Form $(p - qz)^n$ haben wird und entwickelt die dazu gehörigen Partialbrüche. Hat man auf dieſe Art aus den einzelnen einfachen Factoren des Nenners die daraus entſpringenden Partialbrüche gefunden: ſo iſt das Aggregat derſelben der gegebenen Function $\frac{M}{N}$ gleich, wofern ſie nicht eine unächte gebrochene Function iſt. Denn iſt ſie dies, ſo muß noch auſſerdem die ganze Function von ihr abgeſondert und zu jenen Partialbrüchen hinzugeſetzt werden, wenn der Werth der Function $\frac{M}{N}$, auf die einfachſte Art ausgedruckt, dargeſtellt werden ſoll. Es iſt indes gleich ob man dieſe Abſonderung der ganzen Function vor der Findung der Partialbrüche oder nach derſelben vornimmt Denn man erhält aus den einzelnen Factoren des Nenners N eben dieſelben Partialbrüche man mag den Zähler M ſelbſt oder dieſen Zähler um ein Vielfaches von N vermehrt oder vermindert nehmen; ſo wie ſolches wenn man die erklärten Regeln ſorgfältig überdenkt, bald in die Augen fällt.

Exempel. Soll z. B. der Werth der Function $\frac{1}{z^3 (1 - z)^2 (1 + z)}$ auf eine einfacheſte Art ausgedrückt werden; ſo nehme man zuerſt, den nur einmahl vorkommenden Factor $1 + z$ welcher $\frac{p}{q} = -1$ giebt. Nun iſt hie $M = 1$, und $Z = z^3 - 2z^4 + z^5$. Man hat alſo um den Bruch $\frac{A}{1 + z}$ zu finden $A = \frac{1}{z^3 - 2z^4 + z^5}$, wenn $z = -1$ geſetzt wird; und folglich iſt $A = -\frac{1}{4}$ und der aus $1 + z$ entſpringende Partielbruch $\frac{-1}{4(1 + z)}$

Hierauf nehme man den quadratiſchen Factor $(1 - z)^2$, der $\frac{p}{q} = 1$, $M = 1$. und $Z = z^3 + z^4$ giebt. Setzt man alſo die daraus entſpringenden Partial-

Brü-

Brüche $= \frac{A}{(1+z)^2} + \frac{B}{1-z}$; ſo wird $A = \frac{1}{z^3+z^4}$, wenn man $z = 1$ annimmt, und folglich $A = \frac{1}{2}$. Nun ſey $P = \frac{M-\frac{1}{2}Z}{1-z} = \frac{1-\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{2}z^4}{1-z}$ $= 1+z+z^2+\frac{1}{2}z^3$; ſo iſt $B = \frac{P}{Z} = \frac{1+z+z^2+\frac{1}{2}z^3}{z^2+z^3}$, wenn man $z=1$ ſetzt, folglich $B = \frac{7}{4}$, und die geſuchten Partialbrüche $= \frac{1}{2(1-z)^2}$ $\frac{7}{4(1-z)}$. Endlich giebt der dritte cubiſche Factor z^3, den Quotienten $\frac{p}{q} = 0$, $M=1$ und $Z = 1-z-z^2+z^3$. Setzt man daher die dazu gehörigen Partialbrüche $\frac{A}{z^3}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z}$; ſo iſt zuvörderſt $A = \frac{M}{Z}$ $= \frac{1}{1-z-z^2+z^3}$, wenn man $z = 0$ ſetzt; folglich $A = 1$. Nun ſey P $= \frac{M-Z}{z} = 1+z-z^2$, ſo iſt $B = \frac{p}{z}$, wenn man $z = 0$ ſetzt; folglich $c = z$. Es erhält alſo die gegebene Function $\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$ dieſe Form: $\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}\,\frac{1}{2(1-z)^2}+\frac{7}{4(1-z)}-\frac{1}{4(1+z)}$; denn es kommt hierzu kein ganzer Theil, weil die gegebene Function keine unächte Function iſt.
Eulers Anal. des Unendlichen. 1 B. S. 35.

Zuſatz zu (2.) Tempelhofs Analyſis endlicher Größen, Cap 10, §. 785.

Jede unächte gebrochene Function läßt ſich nach (1.) in eine ächte gebrochene Function auflöſen. und dies iſt der Grund warum hier in (2) blos von ächten Brüchen geredet wird.

Ferner läßt ſich, wenn der Zähler und Nenner einer ächten gebrochenen Function einen gemeinſchaftlichen Diviſor haben, dieſe Function nach bekannten Regeln in eine ſolche verwandeln, wo der Zähler und Nenner Primgrößen zu einander ſind, und man kann ſich daher bey dem Beweiſe des in (2) enthaltenen Satzes auf ſolche Brüche einſchränken, deren Zähler und Nenner durch keinen gemeinſchaftlichen Diviſor theilbar ſind.

Dies vorausgeſetzt, ſo läßt ſich die Unmöglichkeit der hier gelehrten Auflöſung einer ächten gebrochenen Function, wenn die Faktoren ihres Nenners keine Prim Größen zu einander ſind, auf folgende Art darthun.

Es ſey der gegebene Bruch $\frac{N}{D}$ in die beyden Partialbrüche $\frac{X}{M}+\frac{Y}{P}$ aufzulöſen, wo alſo vorausgeſetzt wird, daß $D = MP$, und N D, M, P, X und Y ganze rationale Functionen einer und derſelben veränderlichen Größe, z. B. von z, ſeyen, und daß z in N weniger Dimenſionen als in D, und N und D keinen gemeinſchaftlichen Diviſor haben.

Da alſo $\frac{N}{D} = \frac{X}{M} + \frac{Y}{P}$

ſeyn ſoll, ſo muß auch

$$\frac{N}{D} = \frac{PX + MY}{MP} = \frac{PX + MY}{D}$$

und alſo $N = PX + MY$, und

$$X = \frac{N - MY}{P}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - PX}{M}$$ ſeyn. Nun ſollen aber X und Y ganze rationale Functionen ſeyn, und es muß ſich daher $M - MY$ durch P, und $N - PX$ durch M ohne Reſt dividiren laſſen, und da N und D Prim-Größen zu einander ſind, ſo müſſen auch N und P, desgleichen N und M ſolche ſeyn. Wären aber dabey nicht auch M und P Prim-Größen zu einander, ſondern hätten den Diviſor p mit einander gemein, ſo könnte man $M = pQ$, und $P = pR$ ſetzen, und dann müßte, weil alsdann

$$X = \frac{N - pQY}{pR}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - pRX}{pQ}$$ würde, wider die Vorausſetzung auch N und D gemeinſchaftlich durch p getheilt werden können. Es läßt ſich alſo der Bruch $\frac{N}{D}$ unter den vorausgeſetzten Bedingungen nicht anders in die Partial-Brüche $\frac{X}{M} + \frac{Y}{P}$ auflöſen, als wenn M und D keinen gemeinſchaftlichen Diviſor haben.

3. Will man indeß dieſen Satz auch für die gebrochenen Functionen beweiſen, deren Zähler und Nenner einen gemeinſchaftlichen Diviſor, q, aber auch weiter keinen als dieſen, haben, ſo ſetze man $D = qS$ und $S = MP$, alſo $D = qMP$, und behalte übrigens die vorhin angenommenen Bedingungen bey. Hier hätte man alſo

$$\frac{N}{D} = \frac{X}{qM} + \frac{Y}{P} = \frac{PX + qMY}{D}, \text{ und folglich}$$

$$N = PX + qMY, \text{ und}$$

$$X = \frac{N - qMY}{P}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - PX}{qM},$$ ſo daß $N - qMY$ durch P, und $N - PX$ durch qM theilbar ſeyn müßte. Sollten nun qM und P nicht Prim-Größen zu einander, ſondern beyde durch irgend eine Größe p theilbar ſeyn, ſo würde $qM = pQ$ und $P = qR$; und alſo

$$X = \frac{N - pQY}{pR}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - pRX}{pQ}$$ werden, und folglich N und D auſſer q auch noch

durch p theilbar ſeyn, welches ebenfalls wider die angenommenen Bedingungen ſtreitet. Es iſt daher der im 62) enthaltene Satz auch ohne die vorhin feſtgeſetzte Einſchränkung von allen ächten gebrochenen Functionen wahr.

4. Was nun die Auflöſung der Function $\frac{N}{D}$ in die Functionen $\frac{X}{M}$ und $\frac{Y}{P}$ ſelbſt betrift, ſo muß, da $\frac{N}{D}$ eine ächte gebrochene Function ſeyn ſoll, Z in N weniger Dimenſionen als in D haben, und die Summe der Dimenſionen von Z in M und P muß der Anzahl der Dimenſionen eben dieſer Z in D gleich ſeyn. Man kann alſo, wenn man die Zahl der Dimenſionen von Z in D $= m$, und $m = n + \underset{\prime}{u}$ annimmt,

$$N = \mathfrak{A}Z^{m-1} + \mathfrak{B}Z^{m-2} + \mathfrak{C}Z^{m-3} + \ldots\ldots \mathfrak{Z}$$
$$M = AZ^{n} + BZ^{n-1} + CZ^{n-2} + \ldots\ldots K$$
$$P = aZ^{\underset{\prime}{u}} + bZ^{\underset{\prime}{n-1}} + cZ^{\underset{\prime}{u-2}} + \ldots\ldots K$$

und auſſerdem, wenn man zuvörderſt X finden will,

$$Y = \alpha Z^{\underset{\prime}{u-1}} + \beta Z^{\underset{\prime}{u-2}} + \gamma Z^{\underset{\prime}{u-3}} + \delta Z^{\underset{\prime}{u-4}} \ldots\ldots$$

ſetzen. Da nun $m = n + \underset{\prime}{u}$ iſt, ſo fließt hieraus

$$MY = A\alpha Z^{m-1} \left.\begin{matrix} + B\alpha \\ + A\beta \end{matrix}\right\} Z^{m-2} \left.\begin{matrix} + C\alpha \\ + B\beta \\ + A\gamma \end{matrix}\right\} Z^{m-3} \left.\begin{matrix} + D\alpha \\ + C\beta \\ + B\gamma \\ + A\delta \end{matrix}\right\} Z^{m-4} + \text{etc.}$$

und $N - MY =$

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{A} \\ - A\alpha \end{matrix}\right\} Z^{m-1} \left.\begin{matrix} + \mathfrak{B} \\ - B\alpha \\ - A\beta \end{matrix}\right\} Z^{m-2} \left.\begin{matrix} + \mathfrak{C} \\ - C\alpha \\ - B\beta \\ - A\gamma \end{matrix}\right\} Z^{m-3} \left.\begin{matrix} + \mathfrak{D} \\ - D\alpha \\ - C\beta \\ - B\gamma \\ - A\delta \end{matrix}\right\} Z^{m-4} + \text{etc.}$$

Da ferner $X = \frac{N - MY}{P}$ eine ganze rationelle Function ſeyn ſoll, ſo muß ſich dieſer für $N - MY$ gefundene Ausdruck durch P ohne Reſt dividiren laſſen, und folglich

$$X = A'Z^{\underset{\prime}{m-u-1}} + B'Z^{\underset{\prime}{m-u-2}} + C'Z^{\underset{\prime}{m-u-3}} + D'Z^{\underset{\prime}{m-u-4}} + \text{etc.}$$

ſeyn; vorausgeſetzt, daß A', B', C', D' etc. gehörig beſtimmt werden. Dieſe Beſtimmung iſt allemahl möglich. Denn da $PX = N - MY$ iſt, ſo hat man

$$A'aZ^{m-1} \left.\begin{matrix} + B'a \\ + A'b \end{matrix}\right\} Z^{m-2} \left.\begin{matrix} + C'a \\ + B'b \\ + A'c \end{matrix}\right\} Z^{m-3} \left.\begin{matrix} + D'a \\ + C'b \\ + B'c \\ + A'd \end{matrix}\right\} Z^{m-4} + \text{etc.}$$

=

$$= \left.\begin{matrix}\mathfrak{A}\\ -A\alpha\end{matrix}\right\} z^{m-1} \left.\begin{matrix}+\mathfrak{B}\\ -B\alpha\\ -A\beta\end{matrix}\right\} z^{m-2} \left.\begin{matrix}+\mathfrak{C}\\ -C\alpha\\ -B\beta\\ -A\gamma\end{matrix}\right\} z^{m-3} \left.\begin{matrix}+\mathfrak{D}\\ -D\alpha\\ -C\beta\\ -B\gamma\\ -A\delta\end{matrix}\right\} z^{m-4} + \text{etc.}$$

und folglich

$$A'a = \mathfrak{A} - A\alpha$$

$$B'a + A'b = \mathfrak{B} - B\alpha - A\beta$$

$$C'a + B'b + A'c = \mathfrak{C} - C\alpha - B\beta - A\gamma$$

$$D'a + C'b + B'c + A'd = \mathfrak{D} - D\alpha - C\beta - B\gamma - A\delta \text{ etc.}$$

Da ferner die Anzahl dieſer aus der vorhergehenden fließenden Gleichungen $= m$ iſt, und dieſelbe lauter einfache Gleichungen ſind, überdem darinn von den unbekannten Größen A', B', C', D', etc. nicht mehr als $m - u_{\prime}$, und von α, β, γ, δ etc. nicht mehr als $u_{\prime}$, alſo überhaupt nicht mehr als m unbekannte Größen vorkommen; ſo laſſen ſich daraus auch alle dieſe unbekannte Größen vollkommen entwickeln. Kennt man aber A', B', C', D' etc. ſo kennt man auch

$$X = A'Z^{m-u_{\prime}-1} + B'Z^{m-u_{\prime}-2} + C'Z^{m-u_{\prime}-3} + \text{etc.}$$

und kennt man α, β, γ, δ etc. ſo kennt man auch

$Y - \alpha Z'^{u-1} + \beta Z'^{u-2} + \gamma'^{u-3} + \text{etc}$, und dadurch denn auch die Partial-Brüche $\frac{X}{M}$ und $\frac{Y}{P}$.

Umformung der Functionen.

Functionen zu differenziiren.

A. Differenziazion der algebraiſchen Functionen einer veränderlichen Größe.

1. a. Wenn n unbeſtimmt genommen wird, oder jede Zahl bedeutet.

α. Erfindung des erſten Differenzials. Da das Differenzial der veränderlichen Größe $x = dx$ iſt, ſo wird x durch die nächſte Veränderung $x' = x + dx$.

Iſt daher y irgend eine Function von x, ſo gehet dieſelbe, wenn man darinnen $x + dx$ für x ſetzt, in y' über, und die Differenz $y' - y$ giebt das Differenzial von y. Wenn man alſo $y = x^n$ ſetzt, ſo wird

$$y' = (x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}dx^2 + \text{etc.}$$

und folglich $dy = y' - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}dx^2 + \text{etc.}$

Allein das zweyte und die folgenden Glieder dieſes Ausdrucks verſchwinden gegen das erſte Glied, und es iſt daher $nx^{n-1}dx$, das Differenzial von x^n oder $d.\,x^n = nx^{n-1}dx$. Wenn alſo a eine beſtändige Zahl oder Größe iſt, ſo iſt auch $d.\,ax^n = nax^{n-1}dx$ und man findet daher das Differenzial einer jeden Poteſtät von x, wenn man dieſelbe mit den Exponenten multiplicirt,

 durch

durch x dividirt, und den Quotienten durch dx multiplicirt; eine Regel, die ſich leicht dem Gedächtniß einprägen läßt.

β. Erfindung des zweyten und der übrigen Differenzialien. Kennet man das erſte Differenzial von x^n, ſo findet man daraus ohne viele Mühe das zweyte Differenzial, wenn man nur, ſo wie wir es hier immer thun, das Differenzial dx als eine beſtändige Größe betrachtet. Da nähmlich in dem Differenziale $nx^{n-1}dx$ der Faktor ndx beſtändig iſt, ſo muß man das Differenzial von x^{n-1} ſuchen, und dies iſt $(n-1)x^{n-1}dx$. Multipliciret man daſſelbe mit ndx, ſo bekommt man das zweyte Differenzial, $dd.\,x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2$. Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man das Differenzial von x^{n-2}, welches $(n-2)x^{n-3}dx$ iſt, mit $n(n-1)dx^2$ multipliciret, das dritte Differenzial

$$d.^3x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Ferner iſt das vierte Differenzial

$$d.^4x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$$

und das fünfte

$$d.^5x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}dx^5$$

Hieraus fällt zugleich in die Augen, wie die Form der folgenden Differenzialien beſchaffen iſt.

b). Wenn n eine poſitive Zahl vorſtellet. So oft n eine ganze poſitive Zahl iſt, ſo kommt man auch endlich zu verſchwindenden Differenzialien, d. h. die in ſo fern = 0 ſind, daß ſie gegen alle Poteſtäten von dx verſchwinden. Von dieſen muß man ſich die einfachern Fälle merken.

$d.x = dx$; $dd.x = 0$; $d.^3x = 0$; etc.

$d.x^2 = 2xdx$; $dd.x^2 = 2dx^2$; $d.^3x^2 = 0$;
$d.^4x^2 = 0$; etc.

$d.x^3 = 3x^2dx$; $dd.x^3 = 6xdx^2$; $d.^3x^3 = 6dx^3$;
$d.^4x^3 = 0$; $d.^5x^3 = 0$; etc.

$d.x^4 = 4x^3dx$; $dd.x^4 = 12x^2dx^2$; $d.^3x^4 = 24xdx^3$;
$d.^4x^4 = 24dx^4$; $d.^5x^4 = 0$; $d.^6x^4 = 0$; etc.

$d.x^5 = 5x^4dx$; $dd.x^5 = 20x^3dx^2$; $d.^3x^5 = 60x^2dx^3$;
$d.^4x^5 = 120xdx^4$; $d.^5x^5 = 12dx^5$; $d.^6x^5 = 0$;
$d.^7x^5 = 0$; etc.

Man ſieht hier, daß das Differenzial von x^n von der Ordnung n, wenn n eine ganze poſitive Zahl bedeutet, eine beſtändige Größe, nähmlich $= 1.2.3 \ldots\ldots ndx^n$ iſt, und daß die Differenzialien aller folgenden Ordnung = 0 ſind.

c) Wenn n eine negative Zahl iſt. Wenn n eine ganze negative Zahl iſt, ſo kann man die Differenzialien von ſolchen negativen Poteſtäten von x, als $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, ect. finden, indem $\frac{1}{x} = x^{-1}$; $\frac{1}{xx} = x^{-2}$, und überhaupt $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$ iſt. Wenn man daher in der vorhergehenden Formel $n = -m$ ſetzt, ſo iſt das erſte Differenzial von $\frac{1}{x^m} = \frac{-mdx}{x^{m+1}}$; das

zweyte

zweyte $= \frac{m(m+1)\,dx^2}{x^{m+2}}$; das dritte $= \frac{-m(m+1)(m+2)\,dx^3}{x^{m+3}}$; ect.

Hieraus fließen folgende einfache Fälle, die wohl gemerkt zu werden verdienen.

$$d.\frac{1}{x} = \frac{-dx}{x^2};\quad dd.\frac{1}{x} = \frac{2dx^2}{x^3};\quad d^3.\frac{1}{x} = \frac{-6dx^3}{x^4};$$

$$d.\frac{1}{x^2} = \frac{-2dx}{x^3};\quad dd.\frac{1}{x^2} = \frac{6dx^2}{x^4};\quad d^3.\frac{1}{x^2} = \frac{-24dx^3}{x^5};$$

$$d.\frac{1}{x^3} = \frac{-3dx}{x^4};\quad dd.\frac{1}{x^3} = \frac{12dx^2}{x^5};\quad d^3.\frac{1}{x^3} = \frac{-60dx^3}{x^6};$$

$$d.\frac{1}{x^4} = \frac{-4dx}{x^5};\quad dd.\frac{1}{x^4} = \frac{20dx^2}{x^6};\quad d^3.\frac{1}{x^4} = \frac{-120dx^3}{x^7};$$

$$d.\frac{1}{x^5} = \frac{-5dx}{x^6};\quad dd.\frac{1}{x} = \frac{30dx^2}{x^7};\quad d^3.\frac{1}{x^5} = \frac{-210dx^3}{x^8};$$

d) Wenn n eine gebrochene Zahl iſt. Setzt man ferner für n gebrochne Zahlen, ſo erhält man die Differenzialien der Wurzelgrößen. Macht man nähmlich $n = \frac{\mu}{\nu}$, ſo iſt das erſte Differenzial von der Formel $x^{\frac{\mu}{\nu}}$ oder $\sqrt[\nu]{x^\mu}$

$$= \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} dx = \frac{\mu}{\nu} dx \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}$$

das zweyte

$$= \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} dx^2 = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} dx^2 \sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}} \text{ ect.}$$

Hieraus fließt:

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}};\quad dd.\sqrt{x} = \frac{-2dx^2}{4x\sqrt{x}};\quad d.^3\sqrt{x} = \frac{1.\,3dx^3}{8x^2\sqrt{x}};$$

$$d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[3]{x^2}};\quad dd.\sqrt[3]{x} = \frac{-2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}};\quad d.^3\sqrt[3]{x} = \frac{2.\,5dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

$$d.\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}};\quad dd.\sqrt[4]{x} = \frac{-3dx^2}{16x\sqrt[4]{x^3}};\quad d.^3\sqrt[4]{x} = \frac{3\cdot 7dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}} \text{ ect.}$$

Betrachtet man dieſe Ausdrücke nur mit einiger Aufmerkſamkeit, ſo erwirbt man ſich bald eine Fertigkeit, dergleichen Differenzialien auch ohne eine vorläufige Reduction auf die Poteſtäten-Form zu finden.

Wenn μ nicht 1 ſondern eine andere poſitive, oder negative Zahl iſt, ſo laſſen ſich die Differenzialien eben ſo leicht angeben. Da aber die zweyten und die folgenden Differenzialien aus den erſten auf eben die Art gefunden werden, als dieſe aus den Poteſtäten ſelbſt: ſo wollen wir hier bloß die einfachen erſten Differenzialien herſetzen:

$d.\,x\sqrt{x} = \frac{3}{2}\,dx\sqrt{x}$; $d.\,x^2\sqrt{x} = \frac{5}{2}\,x\,dx\sqrt{x}$; $d.\,x^3\sqrt{x} = \frac{7}{2}\,x^2\,dx\sqrt{x}$;

$$d.\ \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}};\quad d.\ \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{-3dx}{2xx\sqrt{x}};\quad d.\ \frac{1}{xx\sqrt{x}} = \frac{-5dx}{2x^3\sqrt{x}};$$

$$d.\ \sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3}\,\frac{dx}{\sqrt[3]{x}};\quad d.\ x\sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}dx\sqrt[3]{x};\quad d.\ x\sqrt[3]{x^2} = \frac{5}{3}dx\sqrt[3]{x}$$

$$d.\ xx\sqrt[3]{x} = \frac{7}{3}xdx\sqrt[3]{x};\quad d.\ xx\sqrt[3]{x^2} = \frac{8}{3}xdx\sqrt[3]{x^2};\ \text{ect.}$$

$$d.\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}};\quad d.\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}};\quad d.\ \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{-4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}}$$

$$d.\ \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}};\quad d\ \frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{-7dx}{3x^3\sqrt[3]{x}};\ \text{ect.}$$

2. Wenn die gegebene veränderliche Größe irgend eine algebraiſche Function iſt.

a. Wenn dieſelbe irgend eine ganze rationale Function iſt.

α. Wenn dieſelbe die Form $p + q + r + ſ +$ etc. oder $ap + bq + cr + f$ hat. Aus dem was zuvor geſagt iſt man bereits im Stande, die Differenzialien aller ganzen rationalen algebraiſchen Functionen zu finden, indem die Glieder dieſer Functionen lauter Poteſtäten von x ſind, und deren Differenziazion bekannt iſt. Denn da eine Größe von dieſer Form,

$$p + q + r + s + \text{ect.}$$

wenn man darin $x + dx$ für x ſetzt, in folgende,

$$p + dp + q + dq + r + dr + s + ds + \text{ect.}$$

verwandelt wird: ſo iſt das Differenzial derſelben =

$$dp + dq + dr + ds + \text{ect.}$$

Kann man alſo das Differenzial einer jeden von den Größen p, q, r, s, angeben, ſo iſt auch das Differenzial des Vielfachen von p ein Gleich-Vielfaches von dp, oder $d.\ ap = adp$ iſt: ſo iſt das Differenzial der Größe.

$$ap + bq + cr = adp + bdq + cdr.$$

Da endlich die beſtändigen Größen kein Differenzial haben, ſo iſt auch das Differenzial von $ap + bq + cr + f = adp + bdq + cdr$.

β. Wenn darinnen Poteſtäten der veränderlichen Größen vorkommen.

aa. Wenn die Exponenten dieſer Poteſtäten ganze und poſitive Zahlen ſind. Da die Glieder der ganzen rationalen Functionen entweder beſtändige Größen oder Poteſtäten von x ſind, ſo laſſen ſich die Differenzialien dieſer Functionen nach den ertheilten Vorſchriften leicht finden. So iſt

$$d(a + x) = dx;\quad d(a + bx) = bdx;$$
$$d(a + xx) = 2xdx;\quad d(aa - xx) = -2xdx;$$
$$d(a + bx + cxx) = bdx + 2cxdx,$$
$$d(a + bx + cx^2 + ex^3) = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx$$
$$d(a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4) = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx + fx^3dx.$$

Und wenn die Exponenten unbeſtimmt ſind, ſo iſt

$$d(1 - x^n) = -nx^{n-1}dx;\ d(1 + x^m) = mx^{m-1}dx$$
$$d.(a + bx^m + cx^n) = mbx^{m-1}dx + ncx^{n-1}dx,$$

Da

Da man alſo die ganzen rationalen Functionen nach der höchſten Poteſtät von x in Grade eintheilt, ſo iſt klar, daß die Differenzialien dieſer Functionen, wenn man die gefundenen Differenzialien immer wieder von neuen differenziirt, und dabey dx als eine beſtändige Größe betrachtet, endlich ſelbſt beſtändige Größen werden, und darauf verſchwinden. So iſt das erſte Differenzial bdx der Function vom erſten Grade $a + bx$ eine beſtändige Größe, und das zweyte und die folgenden Differenzialien Null. Eben ſo iſt, wenn man die Function von zweyten Grade $a + bx + cxx = y$ ſetzt, $dy = bdx + 2cx\,dx$; $ddy = 2cdx^2$; $d^3y = 0$. Auf eine ähnliche Art iſt, wenn man die Function des dritten Grades $a + bx + cxx + ex^3 = y$ ſetzt, $dy = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx$; $ddy = 2cdx^2 + 6exdx^2$; $d^3y = 6edx^3$; und $d^4y = 0$. Gehört daher überhaupt eine ganze rationale Function zu dem nten Grade, ſo iſt ihr Differenzial von der Ordnung n eine beſtändige Größe, und die folgenden Differenzialien insgeſammt Null.

bb. Wenn dieſelben negative oder gebrochene Zahlen ſind. Dieſe ertheilten Vorſchriften ſind auch hinlänglich, das Differenzial einer Function zu finden, wenn unter den Poteſtäten von x, woraus die Function zuſammen geſetzt iſt, Poteſtäten mit negativen oder gebrochenen Exponenten vorkommen. Iſt daher

I. $y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$; ſo wird $dy = \frac{bdx}{2\sqrt{x}} + \frac{cdx}{x^2}$: Iſt ferner

II. $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} - ex$; ſo wird

$$dy = \frac{-adx}{2x\sqrt{x}} + \frac{cdx}{2\sqrt{x}} - edx, \text{ und}$$

$$ddy = \frac{3adx^2}{4xx\sqrt{x}} - \frac{cdx^2}{4x\sqrt{x}}. \text{ Iſt}$$

III. $y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{xx}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{f}{xx}$; ſo wird

$$dy = \frac{-2bdx}{3x\sqrt[3]{xx}} + \frac{4cdx^2}{3xx\sqrt[3]{x}} - \frac{2fdx}{x^3}, \text{ und}$$

$$ddy = \frac{10bdx^2}{9x^2\sqrt[3]{xx}} - \frac{28cdx^2}{9x^3\sqrt[3]{x}} + \frac{6fdx^2}{x^4}.$$

γ) Wenn ſie Poteſtäten von ſolchen Functionen ſind, deren Differenzial nach vorhergehenden gefunden werden kann. Iſt die Größe, deren Differenzial gefunden werden ſoll, eine Poteſtät einer ſolchen Function, deren Differenzial nach dem bisherigen gefunden werden kann: ſo reichen die ertheilten Vorſchriften ebenfalls zu, um das erſte Differenzial derſelben zu finden. Denn iſt p irgend eine Function von x, deren Differenzial dp man kennt, ſo iſt das erſte Differenzial der Poteſtät $p^n = np^{n-1}dp$. Hiernach laſſen ſich folgende Fälle behandeln.

I. Iſt $y = (a + x)^n$; ſo iſt $dy = n(a + x)^{n-1}dx$.

II. Iſt $y = (aa - xx)^2$; ſo iſt $dy = -4xdx(aa - xx)$.

III. Iſt $y = \frac{1}{aa + xx}$, oder $y = (aa + xx)^{-1}$, ſo iſt $dy = \frac{-2xdx}{(aa + xx)^2}$

IV. Iſt $y = \sqrt{(a + bx + cxx)}$, ſo iſt $dy = \frac{bdx + 2cxdx}{2\sqrt{(a + bx + cxx)}}$

V. Iſt $y = \sqrt[3]{(a^4 - x^4)^2}$, oder $y = (a^4 - x^4)^{\frac{2}{3}}$, ſo iſt $dy = -\frac{8}{3}$ $x^3 dx (a^4 - x^4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-8x^3 dx}{3\sqrt[3]{(a^4 - x^4)}}$

VI. Iſt $y = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$ oder $y = (1 - xx)^{-\frac{1}{2}}$; ſo iſt

$$dy = xdx (1 - xx)^{-\frac{3}{2}} = \frac{xdx}{(1 - xx)\sqrt{(1 - xx)}}.$$

VII. Iſt $y = \sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)}$ ſo iſt

$$dy = \frac{dx\sqrt{b} : 2\sqrt{x} + dx}{3\sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x)^2}} = \frac{dx\sqrt{b} + 2dx\sqrt{x}}{6\sqrt{x}.\sqrt[3]{(a + \sqrt{bx} + x^2)}}$$

VIII. Iſt $y = \frac{1}{x + \sqrt{(aa - xx)}}$, ſo iſt, weil $d.\sqrt{(aa - xx)} = -\frac{xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ iſt

$$dy = \frac{-dx + xdx : \sqrt{(aa - xx)}}{(x + \sqrt{(aa - xx)})^2}$$

$$= \frac{xdx - dx\sqrt{(aa - xx)}}{(x + \sqrt{(aa - xx)})^2\sqrt{(aa - xx)}} \text{ oder}$$

$$dy = \frac{dx\,(x - \sqrt{(aa - xx)})^3}{(2xx - aa)^2\sqrt{(aa - xx)}}$$

IX. Iſt $y = \sqrt[4]{(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - xx)^2})^3}$, ſo ſetze man $\frac{1}{\sqrt{x}} = p$ und $\sqrt[3]{(1 - xx)^2} = q$. Da auf dieſe Art $y = \sqrt[4]{(1 - p + q)^3}$ wird, ſo iſt

$$dy = \frac{-3dp + 3dq}{4\sqrt[4]{(1 - p + q)}}$$

Nun iſt aber aus dem Vorhergehenden

$dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}$ und $dq = \left(\frac{3\sqrt[3]{(1 - xx)}}{-4x\,dx}\right)\frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{(1 - xx)}}$; folglich, wenn man dieſe Werthe ſubſtituirt,

$$dy = \frac{3dx : 2x\sqrt{x} - 4xdx : \sqrt[3]{(1 - xx)}}{4\sqrt[4]{(-\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - xx)^2})}}$$

Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man jedesmal anſtatt der Glieder, die einigermaßen zuſammengeſetzt ſind, einzelne Buchſtaben ſetzt, die Differenzialien aller dergleichen Functionen leicht.

δ. Wenn ſie Produkte aus zweyen oder mehreren Functionen einer veränderlichen Größe und die Differenzialien dieſer Functionen bekannt ſind. Wenn die Größe, deren Differenzial gefunden werden ſoll, ein Produkt

aus

aus zweyen oder mehrern Functionen von x iſt, deren Differenzialien bekannt ſind: ſo findet man das Differenzial derſelben am bequemſten auf folgende Art. Es ſeyen p und q Functionen von x, deren Differenziallen dp und dq bekannt ſind. Da nun, wenn man $x + dx$ für x ſetzt, p in $p + dp$ und q in $q + dq$ übergeht, ſo wird dadurch das Produkt pq in

$$(p + dp)(q + dq) = pq + pdq + qdp + dpdq$$

verwandelt, und es iſt alſo das Differenzial des Produkts $pq = pdq + qdp + dpdq$, oder $dpq = pdq + qdp$, weil das unendlich Kleine von der zweyten Ordnung dpdq gegen die unendlich Kleinen von der erſten Ordnung pdq, verſchwindet. Es beſteht alſo das Differenzial des Produkts pq aus zwey Gliedern, welche man findet, wenn man einen jeden Faktor mit dem Differenziale des andern Faktors multiplicirt. Hieraus läßt ſich ferner die Art, das Differenzial des Produkts pqr, welches aus 3 Faktoren beſtehet, zu finden, leicht ableiten. Denn ſetzt man $qr = z$, ſo wird $pqr = pz$, und $d.\,pqr = pdz + zdp$. Da aber $z = qr$ iſt, ſo wird $dz = qdr + rdq$, und ſubſtituirt man dieſe Werthe, ſo findet man

$$d.\,pqr = pqdr + prdq + qrdp.$$

Auf eine ähnliche Art iſt, wenn die zu differenziirende Größe ein Produkt aus vier Faktoren iſt,

$$d.\,pqrs = pqrds + pqsdr + prsdq + qrsdp;$$

und hieraus läßt ſich die Differenziation der Produkte, die aus mehreren Faktoren beſtehen, ſehr leicht erkennen.

I. Iſt alſo $y = (a + x)(b - x)$ ſo wird

$$dy = 1dx\,(a + x) + dx\,(b - x) = - adx + bdx - 2xdx;$$

und dieſes Differenzial findet man ebenfalls, wenn man die gegebene Größe zuvor entwickelt. Denn es wird alsdann $y = ab - ax + bx - xx$, und daraus nach den obigen Regeln $dy = - adx + bdx - 2xdx$.

II. Iſt $y = \frac{1}{x}\sqrt{(aa - xx)}$

ſo ſetze man $\frac{1}{x} = p$ und $\sqrt{(aa - xx)} = q$.

Weil nun $dp = \frac{-dx}{xx}$, und $dq = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ iſt, ſo wird

$$dy = pdq + qdp = \frac{-dx}{\sqrt{(aa - xx)}} - \frac{dx}{xx}\sqrt{(aa - xx)};$$

Da man aber durch die Reduktion auf einerley Nenner hieraus

$$\frac{-xxdx - aadx + xxdx}{xx\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$$

erhält, ſo iſt das geſuchte Differenzial $dy = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$.

III. Iſt $y = \frac{xx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}}$;

ſo ſetze man $xx = p$, und $\frac{1}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = q$.

Da nun $dp = 2xdx$, und $dq = \frac{-2x^3dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}}$ iſt, ſo wird

$$pdq + qdp = \frac{-2x^5dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2xdx}{\sqrt{(a^4+x^4)}} = \frac{2a^4xdx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}},$$

und alſo das geſuchte Differenzial

$$dy = \frac{2a^4xdx}{(a^4+x^4)\sqrt{(a^4+x^4)}}.$$

IV. Iſt $y = \frac{x}{x+\sqrt{(1+xx)}}$;

ſo ſetze man $x = p$ und $\frac{1}{x+\sqrt{(1+xx)}} = q$, wodurch denn $dp = dx$, und

$$dq = \frac{-dx - xdx : \sqrt{(1+xx)}}{(x+\sqrt{(1+xx)})^2} = \frac{-dx(x+\sqrt{(1+xx)})}{(x+\sqrt{(1+xx)})^2\sqrt{(1+xx)}}$$

$$= \frac{-dx}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$$ wird. Hieraus aber findet man

$$pdq + qdp = \frac{-xdx}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{x+\sqrt{(1+xx)}}$$

$$= \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-x)}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$$ und es iſt alſo das geſuchte Differenzial

$$dy = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}) - x}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}},$$ oder, wenn man den Zähler und Nenner dieſes Bruchs durch $\sqrt{(1+xx)} - x$ multipliciret,

$$dy = \frac{dx(1+2xx-2x\sqrt{(1+xx)})}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

Eben dieſes Differenzial hätte man auch noch bequemer auf folgende Art finden können. Da $y = \frac{x}{x+\sqrt{(1+xx)}}$ iſt; ſo multiplicire man Zähler und Nenner durch $\sqrt{(1+xx)} - x$, wodurch man $y = x\sqrt{(1+xx)} - xx = \sqrt{(x^2+x^4)} - xx$ erhält, und davon iſt das Differenzial nach der vorhergehenden Regel,

$$dy = \frac{xxd + 2x^3dx}{\sqrt{(xx+x^4)}} - 2xdx = \frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

V. Iſt $y = (a+x)(b-x)(x-c)$ ſo iſt

$$dy = (a+x)(b-x)dx - (a+x)(x-c)dx + (b-x)(x-c)dx.$$

VI. Iſt $y = x(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)}$ ſo findet man, weil dies Produkt aus drey Faktoren beſtehet,

$$dy = dx(aa + xx)\sqrt{(aa - xx)} + 2xxdx\sqrt{(aa - xx)} - \frac{xxdx(aa + xx)}{\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{dx\,(a^4 + aaxx - 4x^4)}{\sqrt{(aa - xx)}}.$$

ε. Beſondere Regeln in den Fällen, wenn Brüche in den Faktoren vorkommen. Ob nun gleich hierbey auch Brüche in den Faktoren enthalten ſeyn können, ſo iſt es doch bequemer die Brüche nach einer beſondern Regel zu differenziiren. Es ſey alſo das Differenzial des Bruches $\frac{p}{q}$ zu finden. Da dieſer Bruch durch die Subſtitution von $x + dx$ für x in folgenden Bruch $\frac{p + dp}{q + dq} = (p + dp)\,(\frac{1}{q} - \frac{dq}{qq}) = \frac{p}{q} - \frac{pdq}{qq} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{qq}$ übergeht, ſo iſt das Differenzial des Bruches $\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, weil das letzte Glied $\frac{dpdq}{qq}$ verſchwindet. Es iſt alſo

$$d.\ \frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{qq}$$

und man findet das Differenzial eines jedes Bruches, wenn man von dem Produkte aus dem Nenner in das Differenzial des Zählers das Produkt aus dem Zähler in das Differenzial des Nenners abzieht, und die gefundene Differenz durch das Quadrat des Nenners dividirt. Der Gebrauch dieſer Regel wird durch folgende Beyſpiele deutlich werden.

I. Iſt $y = \frac{x}{aa + xx}$, ſo iſt nach dieſer Regel

$$dy = \frac{(aa + xx)\,dx - 2xxdx}{(aa + xx)^2} = \frac{(aa - xx)\,dx}{(aa + xx)^2}.$$

II. Iſt $y = \frac{\sqrt{(aa + xx)}}{aa - xx}$, ſo findet man

$$dy = \frac{(aa - xx)\,xdx : \sqrt{(aa + xx)} + 2xdx\,\sqrt{(aa + xx)}}{(aa - xx)^2}$$

und wenn man dieſen Bruch reducirt,

$$dy = \frac{(3aa + xx)\,xdx}{(aa - xx)^2\,\sqrt{(aa + xx)}}.$$

Oft iſt es vortheilhafter nach der Regel zu handeln, welche dieſer Ausdruck, $d.\ \frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, enthält, und nach welcher das Differenzial eines Bruches dem Differenziale des Zählers durch den Nenner dividirt, weniger dem Differenziale des Nenners durch den Zähler multipliciret, und durch das Quadrat des Nenners dividiret, gleich iſt. Iſt z. B.

III. $y = \frac{aa - xx}{a^4 + aaxx + x^4}$, ſo iſt

$$dy = \frac{-2xdx}{a^4 + aaxx + x^4} - \frac{(aa - xx)(2aaxdx + 4x^3d)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}$$
$$= \frac{-2xdx(2a^4 + 2aaxx - x^4)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}.$$

b. Wenn die gegebene veränderliche Größe irgend eine gebrochene Function iſt.

α. allgemeine Regel. Die zuvor gegebenen Vorſchriften reichen hin, um das Differenzial einer jeden rationalen Funktion von x zu finden. Denn iſt dieſelbe eine ganze Function, ſo iſt die Art, ihr Differenzial zu finden, ſchon vorhin beſchrieben worden. Iſt ſie aber eine gebrochene Function, ſo kann man ſie allemal auf folgende Form reduciren:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.}}$$

Setzt man nun den Zähler = p und den Nenner = q, ſo, daß $y = \frac{p}{q}$ wird, ſo iſt $dy = \frac{qdp - pdq}{qq}$.

Da nun $p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$
und $q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}$ iſt,
ſo wird $dp = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \text{etc.}$
und $dq = \beta dx + 2\gamma xdx + 3\delta x^2dx + 4\varepsilon x^3dx + \text{etc.}$

Multiplicirt man alſo, ſo findet man:

$$\begin{array}{rlllll} qdp = & \alpha Bdx & + 2\alpha Cxdx & + 3\alpha Dx^2dx & + 4\alpha Ex^3dx & + \text{etc.} \\ & & + \beta Bxdx & + 2\beta Cx^2dx & + 3\beta Dx^3dx & + \text{etc.} \\ & & & + \gamma\beta x^2dx & + 2\gamma Cx^3dx & + \text{etc.} \\ & & & & + \delta Bx^3dx & + \text{etc.} \\ qdp = & \beta Adx & + \beta Bxdx & + \beta Cx^2dx & + \beta Dx^3dx & + \text{etc.} \\ & & + 2\gamma Axdx & + 2\gamma Bx^2dx & + 2\gamma Cx^3dx & + \text{etc.} \\ & & & + 3\delta Ax^2dx & + 3\delta Bx^3dx & + \text{etc.} \\ & & & & + 4\varepsilon Ax^3dx & + \text{etc.} \end{array}$$

Hieraus aber wird das geſuchte Differenzial

$$dy = \frac{\left\{\begin{array}{lllll} +\alpha B & +2\alpha C & +3\alpha D & +4\alpha E & +\alpha F \\ \quad dx & \quad xdx & & & \\ -\beta A & -2\gamma A & +\beta C & +2\beta D & +3\beta E \\ & & \quad x^2dx & \quad x^3dx & \\ & & -\gamma B & -2\delta B & +\gamma D \\ & & & & \quad x^4dx\ \text{etc.} \\ & & -3\delta A & -4\varepsilon A & -\delta C \\ & & & & -3\varepsilon B \\ & & & & -5\zeta A \end{array}\right.}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})^2}$$

Die-

Dieſer Ausdruck kann ſehr gut gebraucht werden, um darnach das Differenzial einer jeden rationalen Function ſchnell zu finden; denn die Art, wie der Zähler des Differenzials aus den Coefficienten des Zählers und des Nenners der gegebenen Function zuſammen geſetzt wird, iſt leicht zu erkennen, und der Nenner des Differenzials iſt das Quadrat des Nenners der gegebenen Function.

β) Beſondere Regeln. Wenn der Zähler oder der Nenner des gegebenen Bruchs oder beyde aus Faktoren beſtehen, ſo erhält man zwar durch eine wirklich vorgenommene Multiplication eine ſolche Form, als wir eben differenziirt haben; allein es iſt doch beſſer, dergleichen Fälle nach einer beſondern Regel zu behandeln. Es ſey alſo der Bruch $y = \frac{pr}{q}$ gegeben. Man ſetze $pr = p$, wodurch $dp = pdr + rdp$, und weil $y = \frac{p}{q}$ iſt, $dy = \frac{qdp - pdq}{qq}$ wird. Setzt man nun für p und dp die Werthe daran, ſo wird

I. Wenn $y = \frac{pr}{q}$ iſt, $dy = \frac{pqdr + qrdp - prdq}{qq}$.

Iſt hingegen $y = \frac{p}{qs}$, ſo ſetze man $qs = Q$, wodurch denn $dQ = qds + sdq$ und $dy = \frac{Qdp - pdQ}{qqss}$ wird. Iſt alſo

II. $y = \frac{p}{qs}$, ſo wird $dy = \frac{qsdp - pqds - psdq}{qqss}$.

Iſt endlich $y = \frac{pr}{qs}$, ſo ſetze man $pr = p$ und $qs = Q'$, wodurch man $y = \frac{p}{Q}$ und $dy = \frac{Qdp - PdQ}{QQ}$ erhält. Da aber $dp = pdr + rdp$, und $dQ = qds + sdq$ iſt, ſo wird, wenn

III. $y = \frac{pr}{qs}$ iſt, $dy = \frac{pqsdr + qrsdp - pqrds - prsdq}{qqss}$

$$= \frac{rdp}{qs} + \frac{pdr}{qs} - \frac{prdq}{qqs} - \frac{prds}{qqs}.$$

Auf eine ähnliche Art findet man die Differenzialien, wenn der Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs aus mehrern Faktoren beſtehen, und es braucht alſo hiezu keine beſondere Anleitung gegeben zu werden. Ich füge daher auch keine zu dieſen Fällen gehörende Beyſpiele hinzu, zumal da bald eine allgemeine Regel das Differenzial zu finden gegeben werden wird, welche alle bisherigen beſondern Regeln unter ſich begreift.

γ. Wenn die gegebene Function ein Bruch. Es giebt aber ſo wohl bey den Produkten als bey den Brüchen Fälle, wo ſich das Differenzial bequemer ausdrucken läßt, als ſolches nach den allgemeinen bis jetzt erklärten Regeln geſchiehet. Dies findet ſtatt, wenn die Faktoren, die entweder die Function ſelbſt oder den Zähler oder Nenner derſelben ausmachen, Poteſtäten ſind.

Es ſey alſo die Function $y = p^m q^n$ zu differenziiren gegeben. Setzt man hier $p^m = p$, und $q^n = Q$ ſo wird $y = pQ$ und $dy = pdQ + Q dp$. Da nun $dp = m p^{m-1} dp$, und $dQ = n q^{n-1} dq$ iſt, ſo findet man, wenn man dieſe Werthe braucht,

$$dy = np^m q^{n-1} dq + m p^{m-1} q^n dp = p^{m-1} q^{n-1} (n p dq + m q dp).$$

Iſt daher

I. $y = p^m q^n$ ſo wird $dy = p^{m-1} q^{n-1} (npdq + m q dp)$

Auf eine ähnliche Art läßt ſich auch das Differenzial eines Produkts aus 3 Faktoren finden. Iſt nähmlich

II. $y = p^m q\, r^k$, ſo wird

$$dy = p^{m-1} q^{n-1} r^{k-1} (m q r dp + n p r dq + kpqdr).$$

3. Wenn die gegebene Function ein Bruch iſt, deſſen Zähler oder Nenner, einen Faktor hat, der eine Poteſtät iſt. Iſt ein Bruch gegeben, deſſen Zähler oder Nenner einen Faktor hat, der eine Poteſtät iſt, ſo laſſen ſich auch für dieſen Fall beſondere Regeln geben. Es ſey zuvörderſt der Bruch $y = \frac{p^m}{q}$ gegeben. Hier findet man nach der Regel für die Differenziation der Brüche, $dy = \frac{mp^{m-1}qdp - p^m dq}{qq}$; allein dieſes Differenzial läßt ſich bequemer ausdrucken. Iſt nähmlich

I. $y = \frac{p^m}{q}$, ſo wird

$dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - pdq)}{qq}$. Nun ſey $y = \frac{p}{q^n}$. Hier findet man nach der angeführten Regel

$dy = \frac{q^n dp - npq^{n-1} dq}{q^{2n}}$. Dividirt man aber den Zähler und Nenner dieſes Ausdrucks durch q^{n-1} ſo wird $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$. Iſt daher

II. $y = \frac{p}{q^n}$, ſo wird

$$dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}.$$

Wäre $y = \frac{p^m}{q^n}$ gegeben, ſo fände man

$dy = \frac{mp^{m-1}q^n dp - np^m q^{n-1} dq}{q^{2n}}$, und hieraus durch die Reduktion

$y = \frac{mp^{m-1}qdp - np^m dq}{q^{n+1}}$. Wenn alſo

III. $y = \frac{p^m}{q^n}$ iſt, ſo wird

dy =

$dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - npdq)}{q^{n+1}}$. Iſt endlich das Differenzial von

$y = \frac{r}{p^m q^n}$ zu finden, ſo giebt die angeführte Regel

$$dy = \frac{p^m q^n dr - mp^{m-1}q^n rdp - np^m q^{n-1} rdq}{p^{2m} q^{2n}}$$

und da die Zähler und Nenner dieſes Ausdrucks durch $p^{m-1}q^{n-1}$ theilbar ſind, ſo wird, wenn

IV. $y = \frac{r}{p^m q^n}$ iſt

$$dy = \frac{pqdr - mqrdp - nprdq}{p^{m+1}q^{n+1}}$$

Kommen mehr Faktoren vor, ſo kann man hiernach für jeden einzelnen Fall ſehr leicht eine beſondere Regel finden. Es wäre indeß überflüßig, die gefundenen Regeln durch Worte auszudrucken.

3. Wenn die gegebene Function irgend eine algebraiſche Function iſt.

a. Wie man die irrationalen Functionen durch Reduction auf rationale unter vorhergehende Regeln bringt. Die bisher ertheilten Regeln der Differenziation erſtrecken ſich ſo weit, daß ſich keine algebraiſche Function von x gedenken läßt, deren Differenzial man nicht darnach finden könnte. Denn iſt die gegebene Function eine rationale entweder ganze oder gebrochene Function, ſo iſt für den erſten Fall im (β. aa) und für den andern in (b. α) gezeiget worden, wie man ſich dabey zu nehmen hat; auch ſind zugleich die kurzen Arten bey vorkommenden Faktoren mitgetheilt worden. Auſſerdem kann man darnach auch die Differenzialien der Irrational Größen finden; indem man dieſelben, ſie mögen in der gegebenen Function addirt oder ſubtrahirt ſeyn, als Multiplicatoren oder als Diviſoren darin vorkommen, jedesmal auf die unterſuchten Fälle zurückführen kann. Es iſt dieſes indeß von den entwickelten Functionen zu verſtehen; denn was die unentwickelten Functionen betrift, deren Natur durch eine Gleichung beſtimmt wird, ſo werden wir davon erſt weiter unten, nachdem wir das Differenzial der Functionen zweyer und mehrerer veränderlichen Größen werden finden gelehrt haben, reden können.

b. Allgemeine Regel der Differenziation jeder algebraiſchen Function. Wenn man die bisher gegebenen Regeln aufmerkſam überdenkt und unter einander vergleicht, ſo ſieht man bald, daß ſie insgeſammt auf eine einzige allgemeine Regel zurück geführt werden können, deren Wahrheit auch hier nicht ſchwer zu erkennen iſt, wenn gleich der ſtrenge Beweis derſelben erſt weiter hin gegeben werden kann. Es beſtehet nähmlich eine jede algebraiſche Function aus Theilen, die durch die Addition, oder Subtraktion, oder Multiplication oder Diviſion unter einander verbunden, und theils rational theils irrational ſind. Man nenne alſo die Größen, welche die Function ausmachen, Theile der Function. Dann ſuche man das Differenzial eines jeden Theils ſo, als wenn nur dieſer Theil veränderlich und die übrigen alle beſtändige Größen wären, und vereinige darauf alle gefunde-

ne

ne Differenzialien zu einer Summe. Vermittelſt dieſer Regel laſſen ſich alle Functionen ohne Ausnahme, ſelbſt die transcendenten differenziiren, wie nachher gezeigt werden wird.

Beyſpiele. Wo $y = p \pm q$ iſt. Um dieſe Regel zu erläutern beſtehe zuvörderſt y aus zwey Theilen, die entweder durch Addition oder durch Subtraktion mit einander verbunden ſind, oder es ſey $y = p \pm q$. Man denke ſich alſo erſtlich bloß p als eine veränderliche; und q als eine beſtändige Größe, wo man denn das Differenzial dp findet. Dann nehme man bloß $\pm q$ veränderlich an, und laſſe p beſtändig ſeyn, wodurch man das Differenzial $\pm dq$ erhält. Aus dieſen beyden Differenzialien findet man nun das geſuchte Differenzial ſo, daß $dy = dp \pm dq$ wird, gerade ſo, wie wir es bereits gefunden haben. Hieraus fällt zugleich in die Augen, daß auch das Differenzial ſolcher Functionen, die aus mehrern entweder zu einander addirten oder von einander ſubtrahirten Theilen beſtehen, nach dieſer Regel gefunden werden kann. Iſt z. B. $y = p \pm q \pm r \pm s$, ſo findet man darnach $dy = dp \pm p \pm dr \pm ds$, welches mit dem Obigen auf das genaueſte übereinſtimmt.

Wo $y = pq$ iſt. Sind die Theile mit einander multiplicirt und alſo $y = pq$, ſo iſt bekannt, daß das Differenzial wenn man bloß p als eine veränderliche Größe betrachtet, qdp, und wenn man bloß q veränderlich ſeyn läßt; pdq iſt. Addirt man aber dieſe beyden Differenzialien, ſo erhält man das geſuchte Differenzial $dy = qdp + pdq$ ſo wie es oben gefunden worden iſt. Sind mehrere Größen mit einander multiplicirt und alſo $y = pqrs$: ſo erhält man, wenn man nach und nach jede von dieſen Größen allein veränderlich ſeyn läßt, die Differenzialien

$qrsdp$, $prsdq$, $pqrdr$, $pqrds$,

und die Summe derſelben giebt das geſuchte Differenzial

$$dy = qrsdp + prsdq + pqstr + pqstr$$

ganz ſo wie es oben gefunden wurde. Das Differenzial beſteht daher jedesmal aus ſo viel Theilen, als Theile in der Function addirt oder ſubtrahirt, oder mit einander multiplicirt ſind.

Wo $y = \frac{p}{q}$ iſt. Wenn die Theile der Function durch die Diviſion verbunden ſind, und alſo $y = \frac{p}{q}$ iſt: ſo laſſe man nach der gegebenen Regel erſt bloß p veränderlich ſeyn. Weil alſo q eine beſtändige Größe iſt, ſo iſt das Differenzial $= \frac{dp}{q}$. Dann nehme man bloß q als eine veränderliche Größe an, wodurch, weil $y = pq^{-1}$ iſt, das Differenzal $= -\frac{pdq}{qq}$ wird. Vereiniget man nun die gefundenen Differenzialien, ſo wird das geſuchte Differenzial

$$dy = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq} = \frac{qdp - pdq}{qq}$$

ſo

ſo wie wir es bereits oben gehabt haben. Iſt $y = \frac{pq}{rs}$, ſo findet man, wenn man wieder die einzelnen Größen p, q, r, und s nach und nach als veränderliche Größen betrachtet, die Differenzialien

$$\frac{qdp}{rs};\ \frac{pdq}{rs};\ \frac{-pqdr}{rrs};\ \frac{-pqds}{rss};$$ und es wird daher

$$dy = \frac{qrsdp + prsdq - pqstr - pqrds}{rrss}.$$

C. Noch einige allgemeine Betrachtungen. Wenn alſo nur diejenigen Theile woraus die Function beſtehet, ſo beſchaffen ſind, daß man das Differenzial derſelben finden kann: ſo iſt man auch zugleich im Stande das Differenzial der ganzen Function zu finden. Wenn nun die Theile rationale Functionen ſind, ſo laſſen ſich ihre Differenzialien nicht nur nach den oben ertheilten Regeln finden, ſondern man kann dieſelben auch nach der mitgetheilten allgemeinen Regel erforſchen; ſind aber die Theile irrational, ſo kann man, da ſich die Irrational-Größen auf Poteſtäten mit gebrochenen Exponenten reduciren laſſen, das Differenzial derſelben nach der Regel für die Differenziation der Poteſtäten, wornach
$d.\,x^n = nx^{n-1}dx$ iſt, finden. Und da aus eben dieſer Quelle auch die Regeln für die Differenziation ſolcher irrationalen Ausdrücke, die auſſerdem noch andere irrationale Größen enthalten, fließen, ſo erhellet, daß die hier gegebene und weiter hin zu beweiſende allgemeine Regel, verbunden mit der Regel für die Differenziation der Poteſtäten zur Erfindung der Differenzialien aller algebraiſchen Functionen hinreichend iſt.

Aus dieſen allen folgt ſehr deutlich, daß wenn y irgend eine algebraiſche Function von x iſt, das Differenzial von y die Form hat, $dy = pdx$, und daß der Werth von p nach den ertheilten Regeln allemal gefunden werden kann. Es iſt aber auch p eine algebraiſche Function von x, weil es durch keine andere Operationen gefunden wird, als die in den algebraiſchen Functionen gewöhnlichen. Wenn daher y eine algebraiſche Function von x iſt, ſo iſt auch $\frac{dy}{dx}$ eine algebraiſche Function von x; und iſt auch z eine algebraiſche Function von x; ſo daß $dz = qdx$ iſt, ſo iſt auch, weil q eine algebraiſche Function von x iſt, $\frac{dz}{dy}$ eine algebraiſche Function von x, indem $\frac{dy}{dy} = \frac{p}{q}$ iſt. Wenn alſo Ausdrücke wie $\frac{dz}{dy}$ in einem Ausdrucke, der übrigens algebraiſch iſt, vorkommen, ſo hindern dieſelben nicht, daß der ganze Ausdruck algebraiſch ſey, wofern nur y und z algebraiſche Functionen ſind.

Man kann dieſen Schluß auch auf die zweyten und übrigen höhern Differenzialien ausdehnen. Bleibt nähmlich y eine algebraiſche Function von x und ſetzt man $dy = pdx$, und $dp = qdx$; ſo iſt, wenn man das Differenzial dx als eine beſtändige Größe betrachtet, $ddy = qdx^2$, wie oben gezeigt worden iſt. Da nun der angeführten Gründe wegen q eine algebraiſche Function von x iſt, ſo iſt auch $\frac{ddy}{dx^2}$ nicht nur eine endliche Größe, ſondern auch eine alge-

algebraiſche Function von x, wenn y eine algebraiſche Function von x iſt. Auf eben die Art erhellet, daß auch $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^4y}{dx^4}$; ect. algebraiſche Functionen von x ſeyn werden, wenn y eine ſolche iſt; und wenn z ebenfalls eine algebraiſche Function von x iſt, ſo ſind auch alle endliche Ausdrücke, die aus den Differenzialien aller Ordnungen von y und z und aus dx zuſammen geſetzt ſind, z. B. $\frac{ddy}{ddz}$; $\frac{d^3y}{dzddy}$; $\frac{dxd^4y}{dy^3ddz}$; ect. algebraiſche Functionen von x.

Da alſo die Art und Weiſe erklärt worden iſt, wie man das erſte Differenzial einer jeden algebraiſchen Function von x findet; ſo können wir nunmehr auf eben die Art die zweyten und höhern Differenzialien finden. Iſt nähmlich y irgend eine algebraiſche Function von x, ſo findet man durch Aufſuchung des Differenzials $dy = pdx$ den Werth von p. Differenziirt man nun von neuem, und findet man $dp = qdx$, ſo wird, wenn man dx beſtändig ſeyn läßt, $ddy = qdx^2$, und auf dieſe Weiſe wird das zweyte Differenzial gefunden. Differenziirt man nun weiter, und ſucht man $dq = rdx$, ſo erhält man das dritte Differenzial $d^3y = rdx^3$, und ſo laſſen ſich, wenn man auf dieſem Wege fortfährt, alle übrige höhere Differenzialien finden, weil die Größen p, q, r, ect. insgeſammt algebraiſche Functionen von x ſind, deren Differenziation nach den gegebenen Regeln in unſerer Gewalt ſteht. Man muß alſo zu dieſem Ende die Differenziation fortſetzen. Läßt man nähmlich bey der Differenziation von y die dx weg, ſo findet man $\frac{dy}{dx} = p$, und differenziirt man dieſe Größe von neuem, und dividirt dabey das Kommende durch dx, welches geſchiehet, wenn man allenthalben dx wegläßt, ſo bekommt man $q = \frac{ddy}{dx^2}$. Auf eine ähnliche Art erhält man $r = \frac{d^3y}{dx^3}$, u. ſ. w.

I. Iſt alſo $y = \frac{aa}{aa+xx}$, ſo findet man das erſte ſowohl als die folgenden Differenzialien auf dieſe Art.

Zuvörderſt findet man durchs Differenziiren und durch Dividiren mit dx

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2aax}{(aa+xx)^2};$$ und hieraus ferner

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa+xx)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^4 - 24aax^3}{(aa+xx)^4};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24a^6 - 240a^4xx + 120aax^4}{(aa+xx)^5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-720a^6x + 2400a^4x^3 - 720aax^5}{(aa+xx)^6};$$ ect.

II.

II. Iſt $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ ſo iſt das erſte und die folgenden Differenzialien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}};$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}};$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x = 4050x^2+5400x^4+720x^6}{(1-xx)^{\frac{13}{2}}};\ \text{etc.}$$

Dieſe Differenzialien laſſen ſich leicht weiter fortſetzen, allein das Geſetz, nach welchem die Glieder derſelben auf einander folgen, entdeckt ſich nicht ſo leicht, obgleich der Coefficient der höchſten Poteſtät von x immer ein Produkt aus den Zahlen von 1 bis zu der Ordnung des Differenzials, welches man ſucht, iſt. Setzt man indeß die Differenziation weiter fort, und überlegt dabey das Gefundene genau, ſo findet man, daß überhaupt, wenn

$y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ iſt,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}}\left(x^n + \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{}x^{n-2} + \frac{1.3!}{2.4}x\right.$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.2\ldots6}x^{n-6} +$$
$$\left.\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-7)}{1.2.\ldots\ldots8}x^{n-8} + \text{etc.}\right)$$

iſt. Dergleichen Exempel dienen alſo nicht blos dazu, um ſich eine Fertigkeit im Differenziiren zu erwerben, ſondern es ſind auch die Geſetze, die man bey den Differenzialien aller Ordnungen wahrnimmt, an und für ſich ſehr merkwürdig, und leiten zu verſchiedenen andern Erfindungen.

B. Functionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen zu differenziiren.

1. Wenn zwey oder mehrere veränderliche Größen x, y, z, von einander unabhängig ſind, ſo kann, obgleich eine jede von ihnen veränderlich iſt, dennoch die eine davon wachſen oder abnehmen, ohne daß deswegen die übrigen eine Veränderung erfahren; denn da ſie keinen Zuſammenhang unter einander haben, ſo zieht auch die Veränderung der einen die Veränderung der übrigen nicht nach ſich. Es hängen daher auch die Differenzialien von y und z nicht von dem Differenziale von x ab, und es können folglich, wenn x um ſein Differenzial dx vermehrt wird, y und z entweder dieſelben bleiben, oder nach Gefallen verändert werden. Wenn man daher dx das Differenzial von x ſeyn läßt, ſo bleiben die Differenzialien der übrigen Größen, nähm-

lich dy und dz unbeſtimmt, und können nach Gefallen als Null oder als unendlich kleine Größen, die zu dx ein gewiſſes Verhältniß haben, betrachtet werden.

2. Es pflegen aber meiſtens die Buchſtaben y und z unbekannte oder ſolche Functionen von x zu bedeuten, deren Verhältniß zu x nicht bekannt iſt, und in dieſem Falle haben die Differenzialien dy und dz ein gewiſſes Verhältniß. Es mögen indeß y und z von x abhangen oder nicht, ſo bleibt die Art die Differenzialien dieſer Größen zu finden, welche wir jetzt betrachten wollen, dieſelbe. Wir wollen nähmlich das Differenzial einer Function mehrerer veränderlicher Größen x, y, z ſuchen, welches ſie bekömmt, wenn alle ihre veränderlichen Größen x, y, z um ihre Differenzialien dx, dy, dz wachſen, und dabey kann die Function übrigens beſchaffen ſeyn, wie ſie will. Um dieſes Differenzial zu finden, ſetzt man in der Function anſtatt der veränderlichen Größen x, y, z, allenthalben x + dx, y + dy, z + dz, und zieht von dem daraus ſich ergebenden Ausdrucke die gegebene Function ab. Der Reſt giebt, wie aus dem, was wir über die Natur der Differenzialien geſagt haben, hinlänglich erhellet, das geſuchte Differenzial.

3. Es ſey X eine Function von x, und ihr Differenzial, oder ihr Zuwuchs, wenn x um dx wächſt, ſey = Pdx. Ferner ſey Y eine Function von y, und ihr Differenzial = Qdy, welches ſie bekömmt, wenn y in y + dy übergeht. Endlich ſey Z eine Function von z, und ihr Differenzial = Rdz. Wie man die Differenzialien Pdx, Qdy, Rdz aus den Functionen X, Y, Z findet, ſolches iſt bereits gezeigt worden. Iſt nun die Größe X + Y + Z gegeben, welches offenbar eine Function dreyer veränderlichen Größen iſt: ſo iſt ihr Differenzial = Pdx + Qdy + Rdz. Ob dieſe drey Differenzialien unter einander homogen ſind oder nicht? darauf kommt hier nichts an. Denn die Glieder, welche Poteſtäten von dx enthalten, verſchwinden gegen Pdx eben ſo, als wenn Qdy und Rdz gar nicht da wären, und auf gleiche Art verhält es ſich mit den Gliedern, die bey der Differenziation von Y und Z aus der Acht gelaſſen worden ſind.

4. Nun ſey das Differenzial der Function XYZ von x, y, z, indem X, Y und Z die ihnen vorhin beygelegte Bedeutung behalten, zu ſuchen. Setzt man hier x + dx für x, y + dy für y, und z + dz für z; ſo geht X in X + Pdx, Y in Y + Qdy, und Z in Z + Rdz über, und es verwandelt ſich daher die Function XYZ in

$$(X + Pdx)(Y + Qdy)(Z + Rdz)$$
$$= XYZ + YZPdx + XZQdy + XYRdz$$
$$+ ZPQdxdy + YPRdxdz + XQRdydz + PQRdxdydz.$$

Da aber dx, dy und dz unendlich kleine Größen ſind, ſo verſchwindet das letzte Glied gegen ein jedes von den vorhergehenden, und dieſes geſchiehet, dx dy, dz mögen homogen oder heterogen ſeyn. Ferner verſchwindet das Glied ZPQdxdy ſo wohl gegen YZPdx als gegen XZQdy, und auf ähnliche Art verſchwinden auch die Glieder YPRdxdz und XQRdydz. Zieht man alſo die gegebenen Functionen XYZ ab, ſo wird das Differenzial derſelben = YZPdx + XZQdy + XYRdz.

5. Dieſe Beyſpiele von Functionen dreyer veränderlichen Größen x, y und z, deren Anzahl jeder nach Belieben vermehren kann, geben hinlänglich zu erkennen, daß das Differenzial jeder Function dreyer veränderlicher Größen x, y und z, wie darin auch immer dieſe Größen unter einander vermiſcht ſeyn

ſeyn mögen, allemal die Form haben werde: $pdx + qdy + rdz$; und dabey werden p, q, r entweder Functionen von allen drey veränderlichen Größen x, y und z, oder nur von zweyen, oder auch nur von einer derſelben ſeyn, je nachdem die gegebene Function von x, y und z ſelbſt beſchaffen iſt. Eben ſo muß, wenn eine Function von vier veränderlichen Größen x, y, z und v gegeben wird, ihr Differenzial die Form $pdx + qdy + rdz + sdv$ bekommen.

6. Wir wollen zuvörderſt die Functionen betrachten, die nicht mehr als zwey veränderliche Größen enthalten. Es ſey alſo V eine Function von x und y, deren Differenzial folglich die Form $pdx + qdy$ haben wird. Betrachtete man hier y als eine beſtändige Größe, wodurch $dy = 0$ würde: ſo würde das Differenzial der Function $V = pdx$, und betrachtete man x als beſtändig, wodurch $dx = 0$ würde: ſo würde das Differenzial von $V = qdy$ ſeyn. Da alſo, wenn man beyde Größen x und y als veränderliche Größen betrachtet, $dV = pdx + qdy$ wird: ſo ergiebt ſich hieraus folgende Regel für die Differenziation der Functionen zweyer veränderlicher Größen: Man behandele zuvörderſt blos x als eine veränderliche und y als eine beſtändige Größe, und ſuche das Differenzial von V, welches $= pdx$ ſeyn wird. Dann behandle man bloß y als eine veränderliche und x als eine beſtändige Größe, und ſuche abermals das Differenzial von V, welches $= qdy$ ſeyn wird. Iſt dies geſchehen, ſo wird für x und y, beyde als veränderliche Größen betrachtet, $dV = pdx + qdy$.

7. Da ferner das Differenzial einer Function dreyer veränderlicher Größen x, y und z, welche wir wieder $= V$ ſetzen wollen, die Form $pdx + qdy + rdz$ hat: ſo erhellet auf eine ähnliche Art, daß, wenn man blos x als eine veränderliche Größe, und y und z als beſtändige Größen betrachtet, wodurch dy und $dz = 0$ wird, das Differenzial von $V = pdx$ iſt. Auf eben den Wege ergiebt ſich ferner das Differenzial von $V = qdy$, wenn man x und z als beſtändige, und y allein als eine veränderliche Größe behandelt; und läßt man endlich bloß z veränderlich ſeyn, ſo wird das Differenzial von $V = rdz$. Um alſo das Differenzial einer Function dreyer veränderlicher Größen zu finden, betrachte man jede dieſer Größen für ſich als eine veränderliche Größe, und ſuche ihr Differenzial, als wenn die übrigen Größen keine veränderlichen Größen wären. Dann addire man die auf dieſe Art gefundenen Differenzialen, worauf das Aggregat derſelben das geſuchte Differenzial der gegebenen Function ſeyn wird.

8. In dieſer Regel, welche wir für die Differenziation der Functionen von jeder Anzahl veränderlicher Größen gefunden haben, iſt der Beweis der oben für die Differenziation der Functionen einer veränderlichen Größe gegebenen allgemeinen Regel enthalten. Denn wenn man für jeden der daſelbſt gedachten Theile einen beſondern Buchſtaben ſetzt, ſo bekommt die Function die Geſtalt einer Function von ſo viel veränderlichen Größen, und läßt ſich alſo nach der hier gegebenen Regel differenziiren, indem man erſt jeden Theil auf die Art behandelt, als ob er allein veränderlich wäre, und darauf die gefundenen Differenzialien zu einer Summe vereiniget. Dieſe Summe iſt jedesmal, nachdem man für jeden Buchſtaben wieder ſeinen Werth geſetzt hat, das geſuchte Differenzial. Dieſe Regel hat alſo einen ſehr weiten Umfang, und erſtreckt ſich auch auf die Functionen mehrerer veränderlichen Grö-

ſen, wie ſie auch immer beſchaffen ſeyn mögen. Es iſt daher dieſelbe auch in der ganzen Differenzial-Rechnung von dem größten Nutzen.

9. Nachdem wir alſo eine allgemeine Regel gefunden haben, nach welcher alle Functionen mehrerer veränderlicher Größen, die Anzahl derſelben mag ſeyn welche ſie will, differenziirt werden können: ſo wollen wir den Gebrauch derſelben an einigen Beyſpielen zeigen.

I. Wenn $V = xy$ iſt; ſo iſt $dV = xdy + ydx$.

II. Wenn $V = \frac{x}{y}$ iſt; ſo iſt $dV = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$.

III. Wenn $V = \frac{y}{\surd(aa - xx)}$; ſo iſt

$$dV = \frac{dy}{\surd(aa - xx)} + \frac{yxdx}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}$$

IV. Wenn $V = (\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n$ iſt; ſo iſt

$$dV = m(\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta x + \varepsilon y + \zeta)(\alpha dx + \beta dy)$$
$$+ n(\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1}(\delta dx + \varepsilon dy)$$

oder $dV = (\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1} x$

$$\left(\begin{array}{l} m\alpha\delta \\ \quad xdx \\ n\alpha\delta \end{array} \begin{array}{l} + m\beta\delta \\ \quad xdy \\ + n\alpha\varepsilon \end{array} \begin{array}{l} + m\alpha\varepsilon \\ \quad ydx \\ + n\beta\delta \end{array}\right.$$
$$\begin{array}{lll} + m\beta\varepsilon & + m\alpha\zeta & + m\beta\zeta \\ \quad ydy & \quad dx & \quad dy) \\ + n\beta\varepsilon & + n\gamma\delta & + n\gamma\varepsilon \end{array}$$

V. Wenn $V = ylx$ iſt; ſo iſt $dV = dylx + \frac{ydx}{x}$.

VI. Wenn $V = x^y$ iſt; ſo iſt $dV = yx^{y-1}dx + x^y dylx$.

VII. Wenn $V = A.\ \mathrm{tang}\ \frac{y}{x}$ iſt; ſo iſt $dV = \frac{xdy - ydx}{xx + yy}$

VIII. Wenn $V = \sin x \cos y$ iſt; ſo iſt
$dV = dx \cos x \cos y - dy \sin x \sin y$.

IX. Wenn $V = \frac{e^z y}{\surd(xx + yy)}$ iſt; ſo iſt

$$dV = \frac{e^z ydz}{\surd(xx + yy)} + \frac{e^z(xxdy - yxdx)}{(xx + yy)\surd(xx + yy)}$$

X. Wenn $V = e^z A \sin \frac{x - \surd(xx - yy)}{x + \surd(xx - yy)}$ iſt; ſo iſt

$$dV = e^z dz\ A \sin \frac{x - \surd(xx - yy)}{x + \surd(xx - yy)}$$
$$+ e^z \cdot \frac{}{(x + \surd(xx - yy))(xx - yy)^{\frac{3}{4}}\surd x}$$

10. Da wir geſehen haben, daß das Differenzial von V, wenn V eine Function zweyer veränderlichen Größen x und y iſt, dieſe Form, $dV = Pdx + Qdy$, hat, worin P und Q Functionen ſind, die von V abhängen, und durch

durch daſſelbe beſtimmt werden: ſo folgt, daß dieſe beyden Größen P und Q auch auf eine gewiſſe Art von einander abhängen, indem jede derſelben von einer und derſelben Function V abhängig iſt. Wie nun aber auch der Zuſammenhang zwiſchen den endlichen Größen P und Q, den wir nachher unterſuchen wollen, beſchaffen ſeyn mag: ſo iſt klar, daß nicht alle Differenzial Formeln von dieſer Form $Pdx + Qdy$, worin P und Q aus x und y nach Willkühr formirt ſind, Differenzialien jeder endlichen Function V von x und y ſeyn können. Denn wofern nicht P und Q das Verhältniß zu einander haben, welches die Natur der Differenziation erfordert: ſo kann das Differenzial $Pdx + Qdy$ auf keine Weiſe durch die Differenziation entſtehen, und hat daher auch kein Integral.

C) Betrachtungen über die Eigenſchaften der Differenzialien zweyer und mehrerer veränderlichen Größen.

1. Es kommt daher bey der Integration ſehr viel darauf an, daß man das Verhältniß zwiſchen den Größen P und Q kenne, damit man die Differenzialien, die wirklich durch die Differenziation irgend einer endlichen Function entſtanden ſind, von denen zu unterſcheiden im Stande ſey, die man nach Belieben angenommen hat und die kein Integral haben. Ob wir uns nun gleich hier noch nicht mit der Integration beſchäftigen, ſo iſt es doch zur genauen Kenntniß der reellen Differenzialien ſehr nützlich, daß wir dieſes Verhältniß unterſuchen: denn es iſt dieſelbe nicht nur in der Integral-Rechnung, wozu wir uns hier den Weg bahnen, höchſt nothwendig, ſondern es wird dadurch auch in der Differenzial Rechnung vieles weit deutlicher. Zuvörderſt alſo iſt klar, daß in dem Differenziale von V, wenn V eine Function zweyer veränderlicher Größen x und y iſt, das Differenzial jeder dieſer Größen vorkommen muß. Es kann daher weder $P = 0$ noch $Q = 0$ ſeyn. Wenn daher P eine Function von x und y iſt, ſo kann die Formel Pdx kein Differenzial einer endlichen Größe ſeyn, oder es giebt alsdenn keine endliche Größe, deren Differenzial Pdx wäre.

2. So giebt es keine weder algebraiſche noch tranſcendente endliche Größe V, deren Differenzial $yxdx$ wäre, wenn y eine veränderliche Größe iſt, die nicht von x abhängt. Denn ſollte es eine ſolche endliche Größe V geben, ſo müßte, da ſich y in ihrem Differenziale findet, y auch in der Größe V ſelbſt anzutreffen ſeyn; allein wenn y in V enthalten wäre, ſo müßte da y eine veränderliche Größe iſt, auch das Differenzial dy in dem Differenziale von V befindlich ſeyn. Da alſo daſſelbe darin nicht anzutreffen iſt, ſo iſt es unmöglich, daß das Differenzial $yxdx$ durch die Differenziation irgend einer endlichen Größe entſtehen könnte. Da alſo ausgemacht iſt, daß die Formel $Pdx + Qdy$, wenn $Q = 0$ iſt, und P die veränderliche Größe y enthält, kein reelles Differenzial ſeyn kann: ſo erhellet zugleich, daß man der Größe Q keinen willkührlichen Werth geben darf, ſondern daß derſelbe von dem Werthe P abhängt.

3. Um alſo das Verhältniß zwiſchen den Größen P und Q in dem Differenziale $Pdx + Qdy = dV$ zu unterſuchen, wollen wir zuvörderſt V eine Function von keiner Dimenſion von x und y ſeyn laſſen, und ſo von beſondern Fällen zum Allgemeinen aufſteigen. Setzt man alſo $y = tx$, ſo verſchwindet x aus der Function V gänzlich, und man findet bloß eine Function von t, die wir gleich T ſetzen wollen, und deren Differenzial alſo $= \Theta dt$ iſt, wenn Θ eine Function von t bedeutet. Setzt man daher auch in dem Differenziale $Pdx + Qdy$ al-

lenthalben $y = tx$, und $dy = tdx + xdt$, ſo bekommt man $Pdx + Qtdx + Qxdt$; und da dx darin nicht enthalten ſeyn ſoll, ſo muß $P + Qt = 0$ ſeyn. Es iſt alſo $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}$, oder $Px + Qy = 0$, und hieraus erhellet das Verhältniß zwiſchen P und Q für dieſen Fall. Ferner muß auch $\odot = Qx$, und alſo $Qx =$ einer Function von t, d. h. einer Function von keiner Dimenſion von x und y ſeyn. Weil aber $Q = \frac{\odot}{x}$ iſt, ſo wird $P = -\frac{\odot y}{xx}$, und es ſind alſo ſowohl Px als Qy Functionen von keiner Dimenſion von x und y.

4. Wenn alſo eine Function von keiner Dimenſion von x und y, die wir $= V$ ſetzen, differenziirt wird, ſo iſt ihr Differenzial $dV = Pdx + Qdy$ allezeit ſo beſchaffen, daß $Px + Qy = 0$ iſt. Das heißt, wenn man in dem Differenziale anſtatt der Differenziallen dx und dy die Größen x und y ſetzt, ſo erhält man 0, wie ſolches in folgenden Exempeln ſtatt findet.

I. Wenn $V = \frac{x}{y}$ iſt, ſo wird $dV = \frac{ydx - xdy}{yy}$,

und ſetzt man x für dx, und y für dy,

ſo wird $\frac{yx - xy}{yy} = 0$.

II. Wenn $V = \frac{x}{\sqrt{(xx - yy)}}$ iſt; ſo wird

$$dV = \frac{-yydx + yxdy}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}}, \text{ und hieraus } \frac{-yyx + yyx}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

III. Wenn $V = \frac{y + \sqrt{(xx + yy)}}{-y + \sqrt{(xx + yy)}}$, alſo eine Function von keiner Dimenſion von x und y iſt; ſo wird

$$dV = \frac{2xxdy + 2xydx}{(\sqrt{(xx + yy)} - y)^2 \sqrt{(xx + yy)}}$$

und dieſe Formel verwandelt ſich, wenn man x für dx und y für dy ſetzt, in 0.

IV. Wenn $V = l\,\frac{x + y}{x - y}$ iſt; ſo wird

$$dV = \frac{2xdy - 2ydx}{xx - yy}, \text{ und } \frac{2xy - 2yx}{xx - yy} = 0.$$

V. Wenn $V = A.\sin\frac{\sqrt{(x - y)}}{\sqrt{(x + y)}}$ iſt; ſo wird

$$dV = \frac{ydx - xdy}{(x + y)\sqrt{2y(x - y)}}$$

welche Formel eben dieſe Eigenſchaft hat.

5. Nun wollen wir uns zur Betrachtung anderer homogenen Functionen wenden. Es ſey alſo V eine Function von n Dimenſionen von x und y.

Setzt

Setzt man daher $y = tx$, ſo erhält V die Form Tx^n, wo T eine Function von t bedeutet; und iſt $dT = \odot\, dt$, ſo wird $dV = x^n \odot dt + nTx^{n-1}dx$. Wenn man alſo $dV = Pdx + Qdy$ ſetzt, ſo wird, weil $dy = tdx + xdt$ iſt, $dV = Pdx + Qtdx + Qxdt$; und da dieſe Formel mit der vorhergehenden übereinſtimmen muß, ſo wird, da auch $V = Tx^n$ iſt,

$$P + Qt = nTx^{n-1} = \frac{nV}{x}.$$

Da nun $t = \frac{y}{x}$ iſt, ſo wird hieraus $Px + Qy = nV$, und dieſe Gleichung beſtimmt das Verhältniß zwiſchen P und Q auf eine ſolche Art, daß man jede dieſer Größen leicht findet, ſo bald die andere bekannt iſt. Da ferner $Qx = x^n \odot$ iſt, ſo iſt Qx und folglich auch Qy und Px Functionen von n Dimenſionen von x und y.

6. Wenn alſo in dem Differenziale einer homogenen Function von x und y, anſtatt dx und dy die Größen x und y geſetzt werden: ſo iſt die daher entſpringende Größe der Function, deren Differenzial gegeben wurde, mit der Anzahl der Dimenſionen multiplicirt, gleich.

I. Wenn $V = \sqrt{(xx+yy)}$ iſt; ſo iſt $n = 1$: und da $dV = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx+yy)}}$ iſt, ſo wird $\frac{\sqrt{(xx+yy)}}{xx+yy} = V = \sqrt{(xx+yy)}$.

II. Wenn $V = \frac{y^3+x^3}{y-x}$ iſt; ſo iſt $n = 2$; und dV

$$= \frac{2y^3\,dy - 3yyxdy + 3yxxdx - 2x^3dx + y^3dx - x^3dy}{(y-x)^2}$$

Setzt man nun x für dx, und y für dy, ſo wird

$$\frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{(y-x)^2} = \frac{2y^3 - 2x^3}{y-x}$$

III. Wenn $V = \frac{1}{(yy+xx)^2}$ iſt, ſo iſt $n = -4$, und $dV = -\frac{4ydy - 4xdx}{(yy+xx)^3}$. ſetzt man aber x für dx, und y für dy, ſo verwandelt ſich dieſe Formel in $-\frac{4yy - 4xx}{(yy+xx)^3} = -4V$.

IIII. Wenn $V = xxl\frac{y+x}{y-x}$ iſt; ſo wird $n = 2$, und

$$dV = 2xdxl\frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(ydx - xdy)}{yy - xx}.$$

Nimmt man aber hier die beſchriebene Subſtitution vor, ſo findet man $2xxl\frac{y+x}{y-x} = 2V$.

7. Eine ähnliche Eigenſchaft bemerkt man, wenn V eine homogene Function mehrerer veränderlicher Größen iſt. Es ſey V eine Function von den Größen,

ßen x, y und z, ſo daß dieſelben allenthalben dieſelbe Anzahl von Dimenſionen ausmachen, wo denn bekannt iſt, daß das Differenzial die Form $Pdx + Qdy + Rdz$ haben muß. Setzt man nun $y = tx$ und $z = sx$, ſo daß $dy = tdx + xdt$, und $dz = sdx + xds$ wird, ſo bekommt die Function V die Form Ux^n, wenn U eine Function der beyden veränderlichen Größen t und s iſt. Setzt man daher $dU = pdt + qds$, ſo wird

$$dV = x^n pdt + x^n qds + nUx^{n-1}dx.$$

Die erſte Form aber giebt.

$$dV = Pdx + Qtdx + Qxdt + Rsdx + Rxds,$$

und aus der Vergleichung dieſer beyden Differenzialien ergiebt ſich

$$P + Qt + Rs = nUx^{n-1} = \frac{nV}{x}$$

und daraus fließt $Px + Qy + Rz = nV$, und eben dieſe Eigenſchaft erſtreckt ſich auch auf mehrere veränderliche Größen.

8. Wenn alſo eine homogene Function von irgend einer Anzahl veränderlicher Größen x, y, z, v, &c. gegeben iſt, ſo iſt das Differenzial derſelben jederzeit ſo beſchaffen, daß man, wenn man anſtatt der Differenzialien dx, dy, dz, dv, &c. die endlichen Größen x, y, z, v ſetzt, die gegebene Function, durch die Anzahl der Dimenſionen multipliciret, bekommt. Dieſe Behauptung gilt auch, wenn V eine homogene Function von nicht mehr als von einer einzigen veränderlichen Größe iſt. Es iſt nähmlich in dieſem Falle V eine Poteſtät von x, oder $V = ax^n$, welches eine homogene Function von n Dimenſionen iſt, denn es giebt keine andere Function von x, worin x allenthalben n Dimenſionen hätte, als die Poteſtät x^n. Da nun $dV = nax^{n-1}dx$ iſt, ſo bekommt man, wenn man x für dx ſetzt, $nax^n = V$. Es verdient daher dieſe wichtige Eigenſchaft der homogenen Functionen aufs ſorgfältigſte gemerkt zu werden, indem ſie in der Integral-Rechnung den größten Nutzen gewährt.

9. Um nun das Verhältniß der Größen P und Q, welche das Differenzial $Pdx + Qdy$ einer jeden Function V von zwey veränderlichen Größen x und y beſtimmen, allgemein zu unterſuchen, müſſen wir folgendes überlegen. Es ſey V eine Function von x, und y, und dabey nehme man an, daß V, wenn man $x + dx$ für x ſetzt, in R, hingehen, wenn man $y + dy$ für y ſetzt, in S, und wenn man ſowohl $x + dx$ für x, als $y + dy$ für y ſetzt, in V^I übergehe. Da alſo R aus V entſtehet, wenn man darin $x + dx$ ſtatt x ſetzt, ſo iſt offenbar, daß ſich, wenn man in R $y + dy$ für y ſetzt, V^I ergeben wird; denn es iſt dieſes eben ſo viel, als ob man in V ſowohl $x + dx$ für x, als $y + dy$ für y ſetzte. Eben ſo entſteht auch V^I aus S, wenn man in S die Größe $x + dx$ für x ſetzt, weil S aus V entſtanden iſt, indem darin $y + dy$ für y geſetzt wurde. Alles dies wird durch folgende Tafel deutlicher.

Die

Die Größe	geht über in	wenn man für	ſetzt.
V	R	x	$x + dx$
V	S	y	$y + dy$
V	V^I	x y	$x + dx$ $y + dy$
R	V^I	y	$y + dy$
S	V^I	x	$x + yx$

10. Wenn alſo V ſo differenziirt wird, als wenn blos x eine veränderliche, y aber eine beſtändige Größe wäre, ſo wird, weil V durch die Subſtitution von $x + dx$ für x in R übergeht, das Differenzial derſelben $R - V$; und da aus der Form $dV = Pdx + Qdy$, eben dieſes Differenzial $= Pdx$ iſt, ſo wird $R - V = Pdx$. Wenn man hingegen $y + dy$ für y ſetzt, x aber als eine beſtändige Größe behandelt; ſo wird, weil alsdenn R in V^I, und V in S übergeht, die Größe $R - V$ in $V^I - S$ verwandelt, und folglich das Differenzial von $R - V = Pdx$, welches entſteht, wenn bloß y als eine veränderliche Größe behandelt wird, $= V^I - R - S + V$. Eben ſo wird, da, wenn man $y + dy$ für y ſetzt, V in S übergeht, $S - V$ das Differenzial von V, wenn man blos y als eine veränderliche Größe betrachtet, und es iſt daher $S - V = Qdy$. Weil nun, wenn man $x + dx$ für x ſetzt, S in V^I und V in R übergeht, ſo wird dadurch die Größe $S - V$ in $V^I - R$ verwandelt, und es iſt folglich das Differenzial von $S - V = Qdy$, welches entſteht, wenn man bloß x als eine veränderliche Größe betrachtet, $= V^I - R - S + V$, und es ſtimmt alſo dieſes Differenzial mit dem vorhergehenden auf das genaueſte überein.

11. Aus dieſer Uebereinſtimmung fließt: Wenn das Differenzial einer Function V. zweyer veränderlichen Größen x und $y = dV = Pdx + Qdy$ iſt; ſo iſt das Differenzial von Pdx, welches entſteht, wenn man blos y als eine veränderliche, x aber als eine beſtändige Größe behandelt, dem Differenziale von Qdy gleich, welches entſteht, wenn man blos x als eine veränderliche, y aber als eine beſtändige Größe betrachtet. Iſt nähmlich, wenn man blos y als eine veränderliche Größe betrachtet, $dP = Zdy$, ſo iſt das Differenzial von Pdx, auf die beſchriebene Art geſucht, $= Zdxdy$; und nimmt man blos x als eine veränderliche Größe an, ſo wird auch $dQ = Zdx$, denn alsdenn wird auch das Differenzial von Qdy, auf die beſchriebene Art genommen, $= Zdxdy$. Auf dieſe Art erhellet das Verhältniß, welches die Größen Q und P zu einander haben, und welches, kurz es auszudrücken, darin beſteht, daß das Differenzial von Pdx, wenn man x beſtändig ſeyn läßt, dem Differenziale von Qdy, wenn man y als eine beſtändige Größe betrachtet, gleich iſt.

12. Um dieſe merkwürdige Eigenſchaft in ein helleres Licht zu ſetzen, wollen wir ſie durch einige Beyſpiele erläutern.

I. Iſt alſo $V = yx$; ſo iſt $dV = ydx + xdy$, und folglich $P = y$ und $Q = x$. Läßt man daher x beſtändig ſeyn, ſo wird $d. Pdx = dxdy$, und nimmt y man als beſtändig an, ſo wird $d. Qdy = dxdy$, und alſo beyde Differenzialien einander gleich.

II. Iſt $V = \sqrt{(xx + 2xy)}$; ſo wird $dV = \frac{xdx + ydx + xdy}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, und folglich $P = \frac{x + y}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, und $Q = \frac{x}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$.

Setzt man alſo x beſtändig, ſo wird $d. Pdx = \frac{xydxdy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$, und läßt man y beſtändig ſeyn, ſo wird $d. Qdy = \frac{xydxdy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$.

III. Iſt $V = x \sin A. y + y. \sin A. x$; ſo wird
$dV = dx. \sin Ay + xdy. \cos y + dy. \sin Ax + ydx \cos x$. und es iſt daher

$$Pdx = dx. \sin Ay + ydx. \cos x,$$ und

$$Qdy = dy. \sin Ax + xdy. \cos y.$$

läßt man alſo x beſtändig ſeyn, ſo wird

$$d. Pdx = dxdy. \cos y + dxdy \cos x,$$

und nimmt man y beſtändig an, ſo wird

$$d. Qdy = dxdy. \cos y + dxdy. \cos x.$$

IV. Iſt $V = x^y$; ſo wird $dV = x^y dy\, lx + xy^{y-1}dx$, und
$Pdx = yx^{y-1}dx$, und $Qdy = x^y dy lx$.

Wenn man alſo x als eine beſtändige Größe betrachtet, ſo wird

$$d. Pdx = x^{y-1}dxdy + yx^{y-1}dxdylx,$$

und behandelt man y als eine beſtändige Größe, ſo wird

$$d. Qdx = yx^{y-1}dxdylx + x^{y-1}dxdy.$$

13. Dieſe Eigenſchaft läßt ſich auch auf folgende Art beſchreiben, wodurch denn die ſo merkwürdige Beſchaffenheit aller Functionen zweyer veränderlichen Größen in die Augen fällt. Wenn man eine Function V zweyer veränderlichen Größen x und y differenziirt, daß man blos x als eine veränderliche Größe behandelt, und darauf von neuem das Differenzial dieſes Differenzials ſo ſucht, daß man blos y als eine veränderliche Größe betrachtet: ſo findet man nach dieſer doppelten Differenziation eben das, was man gefunden haben würde, wenn man in umgekehrter Ordnung die Function V zuerſt ſo, als ob blos y veränderlich wäre, differenziirt, und darauf blos x als eine veränderliche Größe behandelt, und von dem gefundenen Differenziale von neuem das Differenzial geſucht hätte; in beyden Fällen erhält man nähmlich Zdxdy. Der Grund dieſer Gleichheit liegt ſehr deutlich in der vorhin betrachteten Eigenſchaft. Denn differenziirt man V, als ob blos x veränderlich wäre, ſo findet man Pdx; und differenziirt man V, als ob blos y veränderlich wäre, ſo erhält man Qdy; daß aber die Differenzialien von dieſen Differenzialien gleich ſind, iſt vorhin bewieſen worden. Uebrigens fließt dieſe Eigenſchaft auch unmittelbar aus den Schlüſſen des 10.

14. Es läßt ſich aber das Verhältniß von P und Q, wenn Pdx + Qdy das Differenzial einer Function V iſt, auch auf folgende Art anzeigen. Da P und Q Functionen von x und y ſind, ſo differenziire man beyde Größen, ſo daß man ſowohl x als y als veränderliche Größen behandele. Iſt nähmlich

$$dV = Pdx + Qdy$$

ſo ſetze man

$$dP = pdx + rdy$$

und $dQ = qdx + sdy$,

Be-

Behandelt ma alſo x als eine beſtändig Grö ſo wird

$dP = rdy$, und d. $Pdx = rdxdy$, und behandel man darauf y als beſtändig, ſo wird

$dQ = qd$. und d. Qdx $qdxd$

Da nun dieſe beyden Differenzialien einander gleich ſind, ſo folgt, daß $q = r$ iſt. Es ſind daher die Functionen P und Q auf die Art mit einander verbunden, daß die Größen q und r, wenn man jene Functionen auf die Art differenziirt, wie wir gethan haben, einander gleich werden. Der Kürze wegen können aber, wenigſtens in dem gegenwärtigen Capitel die Größen r und q bequem auf die Art angezeigt werden, daß man r durch $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ ausdruckt; es ſoll nähmlich dadurch geſagt werden: wenn man P auf die Art differenzirt, daß man bloß y als eine veränderliche Größe betrachtet, und darauf das gefundene Differenzial durch dy dividiret; denn dadurch bekommt man die endliche Größe r. Auf eine ähnliche Art drückt $(\frac{dQ}{dx})$ die endliche Größe q aus, weil dadurch angezeiget wird, daß man Q ſo, als wenn bloß x veränderlich wäre, differenziiren, und dann das Differenzial durch dx dividiren ſoll.

15. Wir wollen uns daher dieſer Bezeichnungsart bedienen, ob ſie gleich ſonſt zweydeutig ſeyn kann, welches indeß hier durch die Einſchließung in Klammern verhindert wird. Wir vermeiden dadurch die Weitläuftigkeit in der Beſchreibung der Art, wie differenziirt werden ſoll, und können das Verhältniß zwiſchen P und Q nun kurz alſo ausdrucken, daß wir ſagen: es iſt $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$. Es zeigt nähmlich in dergleichen Brüchen der Nenner, auſſer ſeiner eigentlichen Bedeutung, nach welcher dadurch dividirt werden muß, auch an, daß das Differenzial des Nenners ſo genommen werden ſoll, als wenn blos die Größe, deren Differenzial den Nenner ausmacht, veränderlich wäre. Auf dieſe Art fallen die Differenzialien durch die Diviſion ganz aus der Rechnung weg, und es ſtellen daher die Brüche $(\frac{dP}{dy})$ und $(\frac{dQ}{dx})$ endliche Größen vor, die in dem gegenwärtigen Falle einander gleich ſind. Nach dieſer Bezeichnungsart kann man alſo auch die Größen p und s auf die Art ausdrucken, daß man $p = (\frac{dP}{dx})$ und $s = (\frac{dQ}{dy})$ ſetzt, indem die Differenziation des Zählers, nach der gemachten Anmerkung durch den Nenner eingeſchränkt wird.

16. Zwiſchen dieſer und der vorhin von den homogenen Functionen bewieſenen Eigenſchaft findet ſich eine ſehr ſchöne Uebereinſtimmung. Iſt nähmlich V eine Function von n Dimenſionen von x und y, ſo iſt, wenn man $dV = Pdx + Qdy$ ſetzt, $nV = Px + Qy$, und alſo

$$Q = \frac{nV}{y} - \frac{Px}{y}.$$

Setzt man nun $dP = pdx + rdy$; ſo wird $(\frac{dP}{dy}) = r$, und daß dieſer Größe $(\frac{dQ}{dx})$ gleich ſey, läßt ſich auf dieſe Art beweiſen. Man differenzire Q, als wenn bloß x veränderlich wäre, und weil unter dieſer Vorausſetzung $dQ = \frac{nPdx}{y} - \frac{Pdx}{y} - \frac{xpdx}{y}$ iſt, ſo wird

$$(\frac{dQ}{dx}) = \frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y}, \text{ und es muß daher}$$

$$\frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y} = r, \text{ oder } (n-1)P = px + ry \text{ ſeyn.}$$

Dieſe Gleichheit erhellet daher, weil P eine homogene Function von $n-1$ Dimenſionen von x und y iſt, woher denn ihr Differenzial, $dP = pdx + rdy$, wegen der Eigenſchaft der homogenen Functionen ſo beſchaffen ſeyn muß, daß $(n-1)P = px + ry$ iſt.

17. Dieſe Eigenſchaft, daß nähmlich $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$ iſt, welche wir als allgemeine Eigenſchaft aller Functionen zweyer veränderlichen Größen x und y kennen gelernt haben, bahnt uns den Weg zur Unterſuchung der Natur der Functionen dreyer oder mehrerer veränderlicher Größen. Es ſey V eine Function dreyer veränderlicher Größen x, y, z und dabey ſey $dV = Pdx + Qdy + Rdz$. Wenn man alſo bey dieſer Differenziation z als eine beſtändige Größe behandelte, ſo würde $dV = Pdx + Qdy$ werden, und in die dieſem Falle müßte nach dem vorhergehenden $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$ ſeyn. Betrachtete man ferner y als eine beſtändige Größe, ſo würde $dV = Pdx + Rdz$, und alſo $(\frac{dP}{dz}) = (\frac{dR}{dx})$ werden. Endlich gäbe x, als eine beſtändige Größe betrachtet, $(\frac{dQ}{dz}) = (\frac{dR}{dy})$. Es hängen alſo in dem Differenziale $Pdx + Qdy + Rdz$ der Function V die Größen P, Q und R auf die Art von einander ab, daß $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$; $(\frac{dP}{dz}) = (\frac{dR}{dx})$; $(\frac{dQ}{dz}) = (\frac{dR}{dy})$ iſt.

18. Hieraus folgt eine Eigenſchaft der Functionen dreyer veränderlicher Größen, die derjenigen ähnlich iſt, die wir oben in 13 bey den Functionen zweyer veränderlicher Größen kennen gelernt haben. Wenn V eine Function dreyer veränderlicher Größen x, y und z iſt, und dieſelbe nach einander dreymal auf die Art differenzirt wird, daß man bey der erſten Differenziation bloß die eine von jenen Größen, z. B. x, ferner bey der zweyten bloß y und bey der dritten bloß z als eine veränderliche Größe behandelt; ſo findet man einen Ausdruck von der Form $Zdxdydz$, und dieſen Ausdruck findet man jedesmal, man mag die Größen x, y und z in einer Ordnung auf einander folgen laſſen, in welcher man will. Man gelangt alſo auf ſechs verſchiedene Arten nach einer dreymaligen Differenziation, zu dem Ausdrucke $Zdxdydz$, weil die Ordnung der Buchſtaben x, y und z ſechsmal verändert werden kann.

kann. In was für einer Ordnung man auch dieſe Größen nimmt, ſo wird ſich doch allemal, wenn man die Function V ſo differenziirt, als ob bloß die erſte Größe veränderlich wäre, denn das Differenzial von dieſem Differenziale ſucht, ſo daß man bloß die zweyte als eine veränderliche Größe betrachtet, und endlich von dieſem Differenziale von neuem das Differenzial auf die Art nimmt, daß man bloß die dritte als veränderlich behandelt, immer ein und derſelbe Ausdruck ergeben.

19. Um den Grund von dieſer Eigenſchaft deutlich zu machen, wollen wir $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ ſetzen, und nun die Differenzialien der Größen P, Q und R ſuchen. Nach dem bereits Erwieſenen werden dieſe Differenzialien ſeyn

$$dP = pdx + sdy + tdz$$
$$dQ = sdx + qdy + udz$$
$$dR = tdx + udy + rdz.$$

Differenziirt man nun V, als wenn bloß x veränderlich wäre, ſo findet man Pdx; differenziirt man ferner dieſes Differenzial, als wenn bloß y veränderlich wäre, ſo findet man $sdxdy$; und ſucht man endlich auch hiervon das Differenzial, ſo daß man z allein als eine veränderliche Größe behandelt, ſo findet man, nachdem man durch $dx\,dy\,dz$ dividirt hat, $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Setzt man nun die veränderlichen Größen ſo, y, x, z, ſo giebt die erſte Differenziation Qdy, die zweyte $sdx\,dy$, und die dritte (nach der Diviſion durch $dx\,dy\,dz$) $\left(\frac{ds}{dz}\right)$ wie vorhin. Nun laſſe man die veränderlichen Größen in dieſer Ordnung auf einander folgen, z, y, x, wo denn die erſte Differenziation Rdz, die zweyte $udydz$, und die dritte (nach der Diviſion durch $dx\,dy\,dz$) $\left(\frac{du}{dx}\right)$ giebt. Da nun aber, wenn man y als eine beſtändige Größe betrachtet, $dQ = sdx + udz$ iſt; ſo iſt $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$ wie gleichfalls bewieſen worden iſt.

20. Es ſey $V = \frac{xxy}{aa - zz}$. Wir wollen dieſe Function ſo oft dreymal differenziiren, als die Ordnung von x, y und z verändert werden kann.

wenn man	I. Differenz.	II. Differenz.	III. Differenz.
veränderlich ſetzt,	bloß x	bloß y	bloß z.
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.
veränderlich ſetzt,	bloß x	bloß z	bloß y
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{4xyzdxdz}{(aa - zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.
veränderlich ſetzt	bloß y	bloß x	bloß z
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$

ver-

veränderlich ſetzt bloß y, bloß z, bloß x

$$\frac{xxdy}{aa - zz}; \quad \frac{2xxzdydz}{(aa - zz)^2}; \quad \frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2},$$

, , , , , bloß z, bloß x, bloß y

$$\frac{2xxyzdz}{(aa - zz)^2}; \quad \frac{4xyzdxdz}{(aa - zz)^2}; \quad \frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$$

, , , , , bloß z, bloß y, bloß x

$$\frac{2xxyzdz}{(aa - zz)^2}; \quad \frac{2xxzdydz}{(aa - zz)^2}; \quad \frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$$

Dieſes Exempel zeigt, daß man nach einer dreymaligen Differenziation immer auf einerley Ausdruck, $\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$ kommt, man mag die drey veränderlichen Größen in einer Ordnung nehmen, in was für einer man will.

21. So wie man aber nach einer dreymaligen Differenziation immer auf einerley Ausdruck kommt, ſo findet ſich auch unter den Differenzialien, welche man durch die zweyte Differenziation findet, eine Uebereinſtimmung. Unter dieſen Differenzialien kömmt nähmlich jeder Ausdruck zweymal vor, und es erhellet daher, daß alle die Formeln in denen einerley Differenzialien vorkommen, auch einander gleich ſind, und daß deswegen alle dritten Differenzialien gleich ſind, weil in ihnen dieſelben Differenzialien dxdydz enthalten ſind. Wir ſchließen hieraus: Wenn V eine Function von einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen x, y, z, v, u, etc. iſt, und dieſelbe nach und nach öfters auf die Art differenziirt wird, daß nur immer eine von dieſen Größen als eine veränderliche Größe betrachtet wird: ſo ſind, ſo oft man auf Ausdrücke von gleichen Differenzialien kommt, dieſe Ausdrücke auch einander gleich. So entſteht nach einer zweymaligen Differenziation unter andern der Ausdruck Zdxdy, einmal, wenn man x, und zweytens wenn man y allein als eine veränderliche Größe behandelt hat, und es iſt daher gleich, welche man von dieſen Größen zuerſt, und welche man zuletzt nehmen will. Auf eine ähnliche Weiſe entſteht nach einer dreymaligen Differenziation der Ausdruck Zdxdydz auf ſechs verſchiedene Arten, und nach einer viermaligen Differenziation der Ausdruck Zdxdydzdv auf vier und zwanzig Arten u. ſ. f.

22. Die Wahrheit dieſer Lehrſätze wird bey einiger Aufmerkſamkeit ein jeder aus den vorhergehenden Sätzen einſehen, und durch eigenes Nachdenken darüber beſſer faſſen, als wenn dieſelben mit der hier unvermeidlichen Weitläuftigkeit vollſtändig geführet worden wären. Da aber die Kenntniß dieſer Eigenſchaften in der Integral-Rechnung von der größten Wichtigkeit iſt, ſo müſſen ſich Anfänger nicht bloß daran begnügen, daß ſie die Wahrheit derſelben erkennen, ſondern ſie auch an vielen Beyſpielen prüfen, um ſich dieſen Gegenſtand ganz geläufig, und des in der Folge daraus entſpringenden Nutzens fähig zu machen. Ja, nicht bloß Anfänger, ſondern auch die, die ſchon die Anfangsgründe der Differenzial-Rechnung kennen, ſollten dieſes thun; weil dieſer Gegenſtand faſt in allen Anleitungen zu dieſem Theile der Analyſis übergangen wird. Denn man begnügt ſich gewöhniglich damit, die Regeln der Differenziation vorgetragen, und ihren Gebrauch in der höhern Geometrie gezeigt zu haben, und bekümmert ſich dabey nicht um die

Na-

Natur und die Eigenſchaften der Differenzialien, ſo groß auch der Nutzen iſt, der daher für die Integral-Rechnung entſpringt. Wir haben es daher für nützlich gehalten, dieſe faſt ganz neue Materie in dem gegenwärtigen Capitel ausführlich zu betrachten, damit der Weg zu den ſchweren Integrationen gebahnt, und dieſe Beſchäftigung in der Folge leicht werden mögte.

23. Bey dieſer Kenntniß der Eigenſchaften der Differenzialien der Functionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen iſt man leicht im Stande zu beurtheilen, ob eine gegebene Differenzial Formel, worin zwey oder mehr veränderliche Größen vorkommen, aus der Differenziation irgend einer endlichen Function entſtanden ſey oder nicht?

Denn wenn in der Formel $Pdx + Qdy$ nicht $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$ iſt, ſo kann man mit Gewißheit behaupten, daß es keine Function von x und y gebe, deren Differenzial $= Pdx + Qdy$ wäre, und daß man alſo in der Integral-Rechnung dergleichen Formeln nicht integriren könne. Da z. B. $yxdx + xxdy$ die gedachte erforderliche Eigenſchaft nicht hat, ſo giebt es keine Function, deren Differenzial $= yxdx + xxdy$ wäre. Ob aber, wenn $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$ iſt, die Formel allemal durch die Differenziation irgend einer Function entſtanden ſey? iſt eine Frage, die erſt in der Integral-Rechnung gründlich beantwortet werden kann.

24. Wenn in der gegebenen Differenzial-Formel drey oder mehrere veränderliche Größen vorkommen, wie z. B. in $Pdx + Qdy + Rdz$; ſo kann dieſelbe nur dann durch die Differenziation entſtanden ſeyn, wenn dabey die Bedingungen ſtatt finden, daß $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$; $(\frac{dP}{dz}) = (\frac{dR}{dx})$; $(\frac{dQ}{dz}) = (\frac{dR}{dy})$ iſt. So bald eine von dieſen Bedingungen fehlt, ſo kann man ſicher behaupten, daß es keine Function gebe, deren Differenzial $Pdx + Qdy + Rdz$ wäre. Dergleichen Differenzial-Formeln ſind daher gar keines Integrals fähig, und man muß daher auch nicht einmal nach ihren Integralien fragen. Das aber iſt leicht einzuſehen, daß man in der Integral-Rechnung allemal erſt wiſſen muß, ob eine gegebene Differenzial-Formel eines Integrals fähig ſey oder nicht, ehe man dieſe Integration wirklich unternimmt.

Eulers Differ. R. I. 180.

D. Inexplicable Functionen zu differenziiren.

I. Erſte Art. [1. Vorläufige Betrachtungen. Um die inexplicablen Functionen zu differenziiren muß man vor allen Dingen die Werthe aufſuchen, welche ſie durch die Subſtitution $x + \omega$ für x erhalten. Es ſey alſo

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

Σ der Werth, welchen S durch die Subſtitution $x + \omega$ für x bekommt, und Z das Glied der Reihe, welches zu dem Anzeiger $x + \omega$ gehört. Ferner mögen die Glieder, deren Anzeiger $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ etc. ſind durch X', X'', X''', etc. und dasjenige, deſſen Anzeiger $x + \infty$ iſt durch $X|\infty|$ angedeutet werden. Auf ähnliche Art ſollen Z', Z'', Z''' etc. die Glieder, deren Anzeiger $x + \omega + 1$, $x + \omega + 2$, $x + \omega + 3$ etc. ſind, und $Z|\infty|$ das Glied, welchem der Anzeiger $x + \omega + \infty$ zugehöret, ausdrucken. Dieſes

ſes vorausgeſetzt iſt

$$S' = S + X'$$
$$S'' = S + X' + X''$$
$$S''' = S + X' + X'' + X''' \text{ etc.}$$
$$S|\infty| = S + X' + X'' + X''' + \ldots + X|\infty|$$

Auf ähnliche Art iſt, wenn Σ nach und nach durch die Glieder Z', Z'', etc. vergrößert wird

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$
$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$
$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z''' \text{ etc.}$$
$$\Sigma|\infty| = \Sigma + Z' + Z'' + Z''' \ldots + Z|\infty|.$$

2. Von der Differenziation der inexplicablen Functionen der erſten Art ſelbſt. Nun muß man die Natur der Reihe S, S', S'', S''', etc. erwägen, wenn ſie ohne Ende fortgeſetzt wird. Wenn dieſelbe im Unendlichen mit einer arithmetiſchen Reihe zuſammen fällt; und dies findet ſtatt, wenn die Glieder X, X', X'', X''', etc. im Unendlichen einander gleich werden ſo daß die Reihe S, S', S'', S''', etc. endlich gleiche Differenzen bekommt: ſo ſind in dieſem Falle $S|\infty|$, $S|\infty+2|$, $S|\infty+3|$, $S|\infty+4|$, etc. in einer arithmetiſchen Progreſſion; und da

$\Sigma|\infty| = S|\infty+\omega|$ wird, weil

$S|\infty+\omega| = S|\infty| + \omega(S|\infty+1| - S|\infty|) = \omega S|\infty+1| + (1-\omega)S|\infty|$. iſt: ſo hat man

$\Sigma|\infty| = \omega S|\infty+1| + (1-\omega)S|\infty|$. Nun iſt

$$S|\infty+1| = S|\infty| + X|\infty+1|$$

alſo $\Sigma|\infty| = S|\infty| + \omega X|\infty+1|$.

Hierdurch bekommt man die Gleichung

$$\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z|\infty| =$$
$$S + X' + X'' + X''' + \ldots + X|\infty| + \omega X|\infty+1|$$

woraus ſich der Werth von Σ beſtimmen läßt, den die Function S bekommt, wenn man darin $x+\omega$ für x ſetzt. Es iſt nähmlich

$$\Sigma = S + \omega X|\infty+1| + X' + X'' + X''' + \text{etc. ohne Ende.}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - \text{etc. ohne Ende.}$$

Wenn daher die unendlichſten Glieder der Reihe A, B, C, D, etc. verſchwinden, ſo wird $\omega X|\infty+1| = 0$ und kann weggelaſſen werden.

Es wird alſo der Werth Σ durch eine neue unendliche Reihe ausgedruckt, welche ſich darſtellen läßt, wenn das allgemeine Glied der Reihe $A+B+C$ etc. bekannt iſt, um daraus die Werthe der Glieder Z', Z'', Z''' &c. zu beſtimmen. Nimmt man demnach ω unendlich klein, ſo wird, da $\Sigma - S$ das Differenzial von S iſt, das Differenzial dS durch eine unendliche Reihe ausgedruckt. Läßt man ferner dabey auch die höhern Poteſtäten von ω nicht aus der Acht, ſo bekommt man das vollſtändige Differenzial der inexplicablen Function S, deſſen Beſchaffenheit deutlich darzulegen, die Abſicht bey folgenden Exempeln ſeyn ſoll.

Erſtes Exempel. Das Differenzial der inexplicablen Function:

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}$ zu finden.

Da das allgemeine Glied dieſer Reihe $X = \frac{1}{x}$, und daher

$X' = \frac{1}{x+1}$	$Z' = \frac{1}{1+1+\omega}$
$X'' = \frac{1}{x+2}$	$Z'' = \frac{1}{x+1+\omega}$
$X''' = \frac{1}{x+3}$ &c.	$Z''' = \frac{1}{x+3+\omega}$ &c.

iſt, ſo erhält man, da $X|\infty + 1| = \frac{1}{x+\infty+1} = 0$ iſt, wenn $x+\omega$ für x geſetzt wird, Σ für S, ſo daß

$$\Sigma = S + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \&c.$$
$$- \frac{1}{x+1+\omega} - \frac{1}{x+2+\omega} - \frac{1}{x+3+\omega} - \&c.$$

oder, wenn man die Glieder paarweiſe addirt:

$$\Sigma = S + \frac{\omega}{(x+1)(x+1+\omega)} + \frac{\omega}{(x+2)(x+2+\omega)}$$
$$+ \frac{\omega}{(x+3)(x+3+\omega)} + \text{etc.}$$

oder, da $\frac{1}{x+1+\omega} = \frac{1}{x+1} - \frac{\omega}{(x+1)^2} + \frac{\omega^2}{(x+1)^3} - \frac{\omega^3}{(x+1)^4} + \&c.$

$$\frac{1}{x+2+\omega} = \frac{1}{x+2} - \frac{\omega}{(x+2)^2} + \frac{\omega^2}{(x+2)^3} - \frac{\omega^3}{(x+2)^4} + \text{etc.}$$

iſt, wenn man die Reihen nach den Poteſtäten ordnet

$$\Sigma = S$$
$$+ \omega \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \text{etc.}\right)$$
$$- \omega^2 \left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \omega^3 \left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \&c.\right)$$
$$- \omega^4 \left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \&c.\right.$$

wird. Schreibt man alſo dx für ω, ſo iſt das vollſtändige Differenzial der gegebenen Function S

dS =

$$dS = dx \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \&c.\right)$$
$$- dx^2 \left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^4} + \&c.\right)$$
$$+ dx^3 \left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \&c.\right)$$
$$- dx^4 \left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} \frac{}{(x+4)^5} + \&c.\right) \&c.$$

Zweytes Exempel. Das Differenzial der inexplicablen Function:
$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2x-1}$ zu finden.

Da das allgemeine Glied dieſer Reihe $X = \frac{1}{2x-1}$ iſt, ſo wird

$X' = \frac{1}{2x+1}$	$Z' = \frac{1}{2x+1+2\omega}$
$X'' = \frac{1}{2x+3}$	$Z'' = \frac{1}{2x+3+2\omega}$
$X''' = \frac{1}{2x+5}$ &c.	$Z''' = \frac{1}{2x+5+2\omega}$ &c.

und da die unendlichen Glieder dieſer Reihe verſchwinden und einander gleiche Größen werden, ſo bekommt man für S, wenn man $x + 1$ für x ſetzt.

$$\Sigma = S + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \&c.$$
$$- \frac{1}{2x+1+2\omega} - \frac{1}{2x+3+2\omega} - \frac{1}{2x+3+2\omega} - \text{etc. oder}$$
$$\Sigma = S + \frac{2\omega}{(2x+1)(2x+1+2\omega)} + \frac{2\omega}{(2x+3)(2x+3+2\omega)}$$
$$+ \frac{2\omega}{(2x+5)(2x+5+2\omega)} + \&c.$$

Löſet man aber die einzelnen Glieder in Reihen nach den Dignitäten von ω auf, ſo wird

$$\Sigma = S + 2\omega \left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c.\right)$$
$$- 4\,\omega^2 \left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c.\right.$$
$$+ 8\,\omega^3 \left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \&c.\right.$$
$$- 16\,\omega^4 \left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \&c.\right.$$

und ſetzt man endlich dx für ω, ſo erhält man das vollſtändige Differenzial der inexplicablen Function S

$$dS =$$

$$2\,dx\left(\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+3)^2}+\frac{1}{(2x+5)^2}+\&c.\right.$$

$$-4\,dx^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3}+\frac{1}{(2x+3)^3}+\frac{1}{(2x+5)^3}+\&c.\right.$$

$$+8\,dx^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4}+\frac{1}{(2x+3)^4}+\frac{1}{(2x+5)^4}+\&c.\right.$$

$$-16\,dx^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5}+\frac{1}{(2x+3)^5}+\frac{1}{(2x+5)^5}+\&c.\right)\ \&c.$$

Drittes Exempel. Das Differenzial der inexplicablen Function.

$S = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\ldots+\frac{1}{x^n}$ zu finden.

Daſs das allgemeine Glied dieſer Reihe $= \frac{1}{x^n}$ iſt, ſo ſind die unendlichſten Glieder verſchwindende und einander gleiche Größen. Da alſo

$X' = \frac{1}{(x+1)^n}$	$Z' = \frac{1}{(x+1+\omega)^n}$
$X'' = \frac{1}{(x+2)^n}$	$Z'' = \frac{1}{(x+2+\omega)^n}$
$X''' = \frac{1}{(x+3)^n}$	$Z''' = \frac{1}{(x+3+\omega)^n}$
&c.	&c.

iſt: ſo wird $X^{I} - Z^{I} =$

$$\frac{n\omega}{(x+1)^{n+1}}-\frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+1)^{n+2}}+\frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+1)^{n+3}}$$

$$X^{II} - Z^{II} =$$

$$\frac{n\omega}{(x+2)^{n+1}}-\frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+2)^{n+2}}+\frac{n(n+1)(n+2)\omega^2}{6(x+2)^{n+3}}-\&c.\ \&c.$$

$$\Sigma - S =$$

$$n\omega\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+2)^{n+1}}+\frac{1}{(x+3)^{n+1}}+\&c.\right.$$

$$-\frac{n(n+1)}{1.2}\omega^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}}+\frac{1}{(x+2)^{n+2}}+\frac{1}{(x\right.$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3}\omega^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}}+\frac{1}{(x+2)^{n+3}}+\frac{1}{(x+3)^{n+3}}+\&c.\right)$$

und ſetzt man alſo dx für ω, ſo bekommt man das geſuchte Differenzial

$$dS =$$

$$n\,dx\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+2)^{n+1}}+\frac{1}{(x+3)^{n+1}}+\&c.\right)$$

$$-\frac{n(n+1)}{1.\,2}dx^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}}+\frac{1}{(x+2)^{n+2}}+\frac{1}{(x+3)^{n+2}}+\text{rc.}\right)$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3}dx^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}}+\frac{1}{(x+2)^{n+3}}+\frac{1}{(x+3)^{n+3}}+\&c.\right)$$

Hieraus laſſen ſich auch die Summen jener Reihen interpoliren, oder die Werthe der ſummatoriſchen Glieder finden, wenn die Zahl der Glieder keine ganze Zahl iſt. Denn ſetzt man $x = 0$, ſo wird auch $S = 0$, und Σ druckt die Summe ſo vieler Glieder aus, als ω Einheiten enthält, wenn gleich ω keine ganze Zahl iſt. Setzt man z. B. im erſten Exempel

$$\Sigma = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\omega}\text{ ſo wird}$$

$$\Sigma = \frac{\omega}{(1+\omega)}+\frac{\omega}{2(2+\omega)}+\frac{\omega}{3(3+\omega)}+\frac{\omega}{4(4+\omega)}+\&c.\text{ oder}$$

$$\Sigma = \omega\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\&c.\right)$$
$$-\omega^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\&c.\right.$$
$$+\omega^3\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\&c.\ \&c.\right.$$

Im dritten Exempel hingegen iſt

$$\Sigma = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\ldots+\frac{1}{\omega^n}$$

und der Werth von Σ wird, ω mag eine ganze Zahl oder ein Bruch ſeyn, durch folgende Reihen ausgedruckt:

$$\Sigma = n\omega\left(+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}+\&c.\right)$$

$$-\frac{n(n+1)}{1.\,2}\omega^2\left(1+\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{3^{n+2}}+\frac{1}{4^{n+2}}+\&c.\right)$$

$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \omega^3 \left(1 + \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{3^{n+3}} + \frac{1}{4^{n+3}} + \&c.\right) \&c.$$

Eben dieſes läßt ſich auch auf die allgemeine Reihe anwenden. Denn da $S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \overset{\cdots\cdots}{\ldots\ldots} + \overset{x}{X}$ iſt, und wenn man $x + \omega$ für x ſetzt, X in Z und S in Σ übergeht: ſo iſt $Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3\,dx^3} + \&c.$ und da auf ähnliche Art Z', Z'', Z''', &c. durch X' X'', X''', &c. ausgedruckt werden, ſo findet man

$$\Sigma = S + \omega X\,|\infty + 1|$$
$$- \frac{\omega}{dx} d(X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.)$$
$$- \frac{\omega^2}{1.2dx^2} dd(X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.)$$
$$- \frac{\omega^3}{1.2.3dx} d^3(X' + X'' + X''' + X^{IV} + etc.)\ etc.$$

Iſt nun $X\,|\infty + 1|$ nicht $= 0$, ſo kann man es, um das Unendliche wegzubringen, auf folgende Art ausdrücken:

$$X\,|\infty + 1| = X' + (X'' - X') + (X''' - X'') + (X^{IV} - X''') + etc.$$

und es iſt alſo

$$\Sigma = S + \omega X' + \omega((X'' - X') + (X''' - X'') + (X^{IV} - X''') + etc.$$
$$- \frac{\omega}{dx} d(X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + etc.)$$
$$- \frac{\omega^2}{2dx^2} dd(X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + etc.)$$
$$- \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3(X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + etc.)$$

Setzet man daher dx für ω, ſo erhält man folgendes vollſtändige Differenzial von $S = A + B + C + \ldots + X$

$$dS = X'dx + dx((X'' - X') + (X''' - X'') + (X^{IV} - X''') + etc.)$$
$$- d.(X' + X'' + X''' + X^{IV} + etc.)$$
$$- \tfrac{1}{2}dd(X' + X'' + X''' + X^{IV} + etc.)$$
$$- \tfrac{1}{6}d^3(X' + X'' + X''' + X^{IV} + etc.)\ etc.$$

Setzt man $x = 0$, ſo wird $X' = A$, $X'' = B$, ect. und alſo $X' + X'' + X''' +$ ect. eine unendliche Reihe, deren allgemeines Glied $= X$ iſt. Formirt man nun Reihen aus dieſen allgemeinen Gliedern

$$\frac{dX}{dx};\ \frac{ddX}{2dx^2};\ \frac{d^3X}{6dx^3};\ \frac{d^4X}{24dx^4};\ ect.$$

welche

welche Reihen, ohne Ende fortgeſetzt, folgende Summen haben mögen.

$$\text{ſ}.\ X = \mathfrak{A}.$$

$$\text{ſ}.\ \frac{dX}{dx} = \mathfrak{B}.$$

$$\text{ſ}.\ \frac{ddX}{2dx^2} = \mathfrak{C}.$$

$$\text{ſ}.\ \frac{d^3X}{6dx^3} = \mathfrak{D}.$$

$$\text{ſ}.\ \frac{d^4X}{24dx^4} = \mathfrak{E}.\ \text{etc.}$$

ſo wird, weil für $x = 0$ auch $S = 0$ iſt, Σ die Summe der Reihe $A + B + C + D + \ldots + Z$, bis zu dem ωten Gliede, weil Z das Glied iſt, welches dem Anzeiger ω zugehöret, ω mag eine ganze Zahl oder ein Bruch ſeyn. Man hat daher

$$\Sigma = \omega A + |\omega\,((B - A) + (C - B) + (D - C) + \text{ect.})$$
$$- \omega\,\mathfrak{B} - \omega^2\,\mathfrak{C} - \omega^3\,\mathfrak{D} - \omega^4\,\mathfrak{E} - \text{ect.}$$

wo man die erſte Reihe weglaſſen kann, wenn die Glieder der gegebenen Reihe endlich verſchwinden.

Schreibt man nun x für ω, ſo geht Σ in S über, ſo daß

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

wird, und eben dieſer Werth von S läßt ſich auf folgende Art durch eine unendliche Reihe ausdrucken:

$$S = Ax + x\,((B - A) + (C - B) + (D - C) + \text{ect.})$$
$$- \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \mathfrak{F}x^5 - \text{ect.}$$

Da dieſer Ausdruck gleich paſſend iſt, x mag eine ganze Zahl oder ein Bruch ſeyn, ſo laſſen ſich die Differenzialien jeder Ordnung von S dadurch ſehr leicht darſtellen. Es iſt nähmlich

$$\frac{dS}{dx} = A + (B - A) + (C - B) + (D - C) + \text{ect.}$$
$$- \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}x - 3\mathfrak{D}x^2 - 4\mathfrak{E}x^3 - \text{ect.}$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = - \mathfrak{C} - 3\mathfrak{D}x - 6\mathfrak{E}x^2 - 10\mathfrak{F}x^3 - \text{ect.}$$

$$\frac{d^3S}{6dx^3} = - \mathfrak{D} - 4\mathfrak{E}x - 10\,\mathfrak{F}x^2 - 20\mathfrak{G}x^3 - \text{ect.}$$

$$\frac{d4S}{24dx^4} = - \mathfrak{E} - 5\mathfrak{F}x - 15\mathfrak{G}x^2 - \text{ect. ect.}$$

Da alſo das vollſtändige Differenzial

$$= dS + \tfrac{1}{2}\,ddS + \tfrac{1}{6}\,d^3S + \tfrac{1}{24}\,d^4S + \text{ect.}$$

iſt: ſo iſt das vollſtändige Differenzial der Function S

$$dS = Adx + (B - A)\,dx + (C - B)\,dx + (D - C)\,dx + \text{ect.}$$
$$- \mathfrak{B}dx - \mathfrak{C}\,(2xdx + dx^2) - \mathfrak{D}\,(3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3)$$
$$- \mathfrak{E}.\,(4x^3dx + 6x^2dx^2 + 4xdx^3 + dx^4) - \text{ect.}$$

Auf dieſe Art läßt ſich alſo das Differenzial einer jeden inexplicablen Function S ausdrucken, wenn die unendlichſten Glieder der Reihe $A + B + C$ +

+ D + ect. entweder verſchwinden oder einander gleich werden. Denn ſind die unendlichſten Glieder dieſer Reihe nicht = 0, ſo wird die Summe der Reihe B, welche aus dem allgemeinen Gliede $\frac{d'x}{dx}$ formirt wird, unendlich, giebt aber mit der Reihe A + (B — A) + (C — B) + (D — C) + ect. zuſammengenommen eine endliche Summe. Es können aber die Glieder der Reihe A + B + C + D + ect. ſo ins Unendliche vermehret werden, daß nicht nur die Summe der Reihe A + B + C + D + ect. ſondern auch die der Reihe C unendlich wird, und in dieſem Falle iſt es nicht genug, die Reihe A + (B — A) + (C — B) + (D — C) + ect. hinzugefügt zu haben, ſondern es muß dann auch auf die unendlichſten Glieder

$$S|\infty|,\ S|\infty + 1|,\ S|\infty + 2| \text{ect.}$$

deren oben Erwähnung geſchehen iſt, da ſie in keiner arithmetiſchen Progreſſion mehr ſind, Rückſicht genommen werden. So wie wir daher die erſten Differenzen dieſer Glieder gleich angenommen haben, ſo müſſen wir nun, um die erklärte Methode weiter auszudehnen, erſt die zweyten, oder die dritten Differenzen u. ſ. f. gleich ſeyn laſſen.

Mit Beybehaltung der Schlußart, welcher wir uns oben bedient haben, wollen wir daher jetzt annehmen, daß die zweyten Differenzen der angeführten Werthe gleich ſeyen.

$S\infty|,\ S|\infty + 1|,\ S|\infty + 2|;$

Erſte Differ. $X|\infty + 1|;\ X|\infty + 2|$

Zweyte Differ. $X|\infty + 2| - X|\infty + 1|.$

Hiernach iſt $\Sigma|\infty| = S|\infty + \omega|$

$$= S|\infty| + \omega X|\infty + 1| + \frac{\omega(\omega - 1)}{1.\ 2}(X|\infty + 2| - X|\infty + 1|)$$

$$= S|\infty| - \frac{\omega(\omega - 3)}{1.\ 2} X|\infty + 1| + \frac{\omega(\omega - 1)}{1.\ 2} X|\infty + 2|$$

Wir haben demnach folgende Gleichung

$$\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z|\infty| =$$
$$S + X' + X'' + X''' + \ldots + X|\infty|$$
$$- \frac{\omega(\omega - 3)}{1.\ 2} X|\infty + 1| + \frac{\omega(\omega - 1)}{1\ 2} X|\infty + 2|$$

und daraus findet man

$$\Sigma = S + X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c. \text{ ohne Ende}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - Z^{IV} - \text{ect. ohne Ende}$$
$$+ \omega X|\infty + 1| + \frac{\omega(\omega - 1)}{1.\ 2}(X|\infty + 2| - X|\infty + 1|).$$

Dieſe unendlichſten Glieder laſſen ſich auf die Art darſtellen, daß

$$\Sigma = S + X' + X'' + X''' + X^{IV} + \text{etc.}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - Z^{IV} - \text{etc.}$$

$$+\omega X' + \omega\left\{\begin{array}{l}+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{ect.}\\ -X'-X''-X'''-X^{IV}+\text{ect.}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}X'' \qquad +\frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}\left\{\begin{array}{l}+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{ect.}\\ -2X''-2X'''-2X^{IV}-\text{ect.}\\ +X'-X''+X'''+\text{ect.}\end{array}\right.$$

$$-\frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}X'$$

wird, und hieraus erhellet zugleich das Geſetz, nach welchem dieſer Ausdruck eingerichtet ſeyn muß, wenn die dritten, vierten und fernern Differenzen gleich werden.

Da alſo, wie wir oben bewieſen haben

$$Z = X + \frac{\omega dX}{2dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

iſt; ſo erhalten wir durch die Subſtitution der Werthe, welche ſich hieraus für Z′, Z″, Z‴, etc. ergeben, für Z′, Z″, Z‴, etc. wenn in dem Werthe von S, x + ω für x geſetzt wird,

$$\Sigma = S + \omega X' + \omega\left\{\begin{array}{l}+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{etc.}\\ -X'-X''-X'''-X^{IV}-\text{etc.}\end{array}\right.$$

$$+\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}X'' \qquad +\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\left\{\begin{array}{l}+X'''+X^{IV}+X^{V}+X^{VI}+\text{etc.}\\ -2X''-2X'''-2X^{IV}-2X^{V}-\text{etc.}\\ +X'+X''+X'''+X^{IV}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}X'$$

$$\frac{-\omega}{dx}\, d.\ X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{etc.}$$

$$\frac{-\omega^2}{2dx^2}\, dd.\ (X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{etc.}$$

$$\frac{-\omega^3}{6dx^3}\, d^3.\ (X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{etc.}$$

Setzt man alſo dx für ω, ſo bekommt man folgenden Ausdruck für das vollſtändige Differenzial von S

$$dS = X'dx + dx\left(\begin{array}{l}+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{etc.}\\ -X'-X''-X'''-X^{IV}-\text{etc.}\end{array}\right.$$

$$
\begin{array}{l}
- X'' \dfrac{dx\,(1-dx)}{1.\ 2} \\
\qquad\qquad - \dfrac{dx\,(1-dx)}{1.\ 2} \left\{ \begin{array}{l} + X''' + X^{IV} + X^{V} + \text{etc.} \\ - 2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - \text{etc.} \\ + X' + X'' + X''' + \text{etc.} \end{array} \right\} \\
+ X' \dfrac{dx\,(1-dx}{1.\ 2} \\
+ X''' \dfrac{dx\,(1-dx)\,2-dx)}{1.\ 2.\ 3} \\
- 2X'' \dfrac{dx\,(1-dx)\,(2-dx)}{1.\ 2.\ 3.} + \dfrac{dx\,(1-dx)\,(2-dx}{1.\ 2.\ 3} \left\{ \begin{array}{l} + X^{IV} + X^{V} + \text{etc.} \\ -3X''' - 3X^{IV} - \text{etc} \\ +3X'' + 3X''' + \text{etc.} \\ - X' - X'' - \text{etc.} \end{array} \right\} \\
+ X' \dfrac{dx\,(1-x)}{1.\ 2.}\dfrac{2-dx}{3}\ \text{etc.} \\
- d\,(X' + X'' + X''' + X'''' + X^{V} + \text{etc.}) \\
- \tfrac{1}{2} dd(X' + X'' + X''' + X'''' + X^{V} + \text{etc.}) \\
- \tfrac{1}{6} d^3(X' + X'' + X''' + X'''' + X^{V} + \text{etc.}) \\
- \tfrac{1}{24} dx(X' + X'' + X''' + X'''' + X^{V} + \text{etc.})
\end{array}
$$

Dieſer Ausdruck iſt von dem weitläufigſten Umfange und giebt das geſuchte Differenzial, was für Differenzen auch gleich ſeyn mögen. Es iſt nähmlich dieſe Formel darnach eingerichtet, daß die Differenzen gleich werden, und man erkennt daraus bald das Geſetz ihrer Fortſetzung, wenn dieſe Fortſetzung etwa nöthig ſeyn ſollte.

Wenn die Reihe A + B + C + D etc. aus welcher die inexplicable Function

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots\ldots + \overset{x}{X}$$

formiret wird, ſo beſchaffen iſt, daß ihre unendlichſten Glieder verſchwinden: ſo iſt, wie wir bereits angemerkt haben,

$$
\begin{array}{l}
dS = - d.\,(X' + X'' + X''' + X'''' + X^{V} + \text{etc}). \\
\qquad - \tfrac{1}{2} dd(X' + X'' + X''' + X'''' + X^{V} + \text{etc.}) \\
\qquad - \tfrac{1}{6} d^3\,(X' + X'' + X''' + X'''' + X^{V} + \text{etc.}) \\
\qquad - \tfrac{1}{24} d^4\,(X' + X'' + X''' + X'''' + X^{V} + \text{etc.})\ \text{etc.}
\end{array}
$$

Sind aber dieſe unendlichſten Glieder nicht = 0, ſondern ihre Differenzen, ſo muß man zu jenem Ausdrucke noch

$$dx \left(X' \begin{array}{l} + X'' + X''' + X'''' + X^{V} + \text{etc.} \\ - X' - X'' - X''' - X'''' - \text{etc.} \end{array} \right)$$

addiren. Verſchwinden erſt die zweyten Differenzen der unendlichen Glieder der Reihe A + B + C + D + etc. ſo muß man auſſerdem noch

$$\frac{dx\,(dx-1)}{1.\ 2} \left\{ \begin{array}{ll} + X'' & + X''' + X'''' + X^{V} + \text{etc.} \\ & - 2X'' - 2X''' - 2X'''' - \text{etc.} \\ - X' & + X' + X'' + X''' + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

dazu ſetzen. Verſchwinden erſt die dritten Differenzen, ſo muß man noch hinzufügen,

$$\frac{dx\,(dx-1)\,(dx-2)}{1.\ 2.\ 3}\left|\begin{array}{ll} & X''' + X'''' + X^{v} + X^{vi} + \text{etc.} \\ -2X'' - & -3X''' - '''' - 3X^{v} - \text{etc.} \\ & +3X'' + 3X''' + 3X'''' + \text{etc.} \\ +X' & -X' - X'' - X''' + \text{etc.} \end{array}\right|$$

und auf eben dieſe Art ferner verfahren. Haben alſo die unendlichſten Glieder der Reihe A + B + C + D + etc. nur endlich verſchiedene Differenzen, ſo läßt ſich hiernach allemal das Differenzial der aus der Reihe formirten inexplicablen Function beſtimmen.

Setzt man X = o, ſo wird X′ = A, X″ = BX‴ = C ect. So wie daher A + B + C + D ect eine Reihe mit dem allgemeinen Gliede X iſt, ſo ſuche man auch aus den allgemeinen Gliedern

$$\frac{dX}{dx};\ \frac{ddX}{2dx^2};\ \frac{d^3X}{6dx^3};\ \frac{d^4X}{24dx^4};\ \text{etc.}$$

ähnliche unendliche Reihen, deren Summe durch die Buchſtaben 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, ꝛc. angezeiget werden mögen. Alsdann wird die Summe von ω Gliedern der Reihe A + B + C + ect. auf die Art ausgedruckt, daß es gleichviel iſt, ω mag eine ganze Zahl oder einen Bruch bedeuten. Setzt man x für ω, ſo daß

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} \ldots\ldots + \overset{x}{X}$$

wird, ſo iſt wenn die unendlichſten Glieder verſchwinden

$$S = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^3 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \text{ect.}$$

Haben hingegen dieſe unendlichſten Glieder die erſten Differenzen verſchwindend, ſo muß man noch dazu ſetzen

$$x\left\{\begin{array}{l} \quad + B + C + D + E + \text{etc.} \\ A \\ \quad - A - B - C - D - \text{etc.} \end{array}\right.$$

Verſchwinden erſt die zweyten Differenzen, ſo muß man auſſerdem dazu nehmen,

$$\frac{x\,(x-1)}{1.\ 2}\left\{\begin{array}{ll} & + C + D + E + F + \text{etc.} \\ + B & \\ & - 2B - 2C - 2D - 2E - \text{etc.} \\ - A & \\ & + A + B + C + D + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

ſo wie man, wenn erſt die dritten Differenzen = o werden, noch dazu ſetzen muß.

$$\frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{1.\ 2.\ 3}\left\{\begin{array}{ll} & + D + E + F + G + \text{etc.} \\ + C & \\ & - 3C - 3D - 3E - 3F - \text{etc.} \\ - 2B & \\ & + 3B + 3C + 3D + 3E + \text{etc.} \\ + A & \\ & - A - B - C - D - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

II. Der

II. Der andern Art. Nunmehr wollen wir dieſe Methode auf die andere Gattung der inexplicablen Functionen anwenden, welche aus einem Produkte einiger unmittelbar auf einander folgenden Glieder der Reihe A + B + C + D + ect. beſtehen, dabey

$$S = \overset{1}{A}.\ \overset{2}{B}.\ \overset{3}{C}.\ \overset{4}{D}\ldots\overset{z}{X}$$

ſetzen, und zuvörderſt den Werth Σ ſuchen, worin S übergeht, wenn man x + ω für x ſetzt. Es ſoll aber auch hier Z, wie vorhin das Glied bedeuten, deſſen Anzeiger x + ω iſt; ſo wie X dem Anzeiger x zugehört. Um dieſen Fall auf den vorhergehenden zurück zu führen, muß man die Logarithmen nehmen, wo denn

$$lA = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$$

wird. Verſchwinden die unendlichen Glieder dieſer Reihe, ſo findet man, nach der bey der erſten Gattung der inexplicablen Function gebrauchten Methode,

$$l\Sigma = lS + lX' + lX'' + lX''' + \text{etc.}$$
$$- lZ' - lZ'' - lZ''' - \text{etc.}$$

und hat alſo, wenn man zu den Zahlen zurückgeht,

$$\Sigma = S.\frac{X'}{Z'}.\frac{X''}{Z''}.\frac{X'''}{Z'''}.\frac{X''''}{Z''''}, \text{ect.}$$

Verſchwinden die Logarithmen der unendlichen Glieder jener Reihe aber nicht, ſondern erſt ihre Differenzen, ſo muß zu der Reihe, welche wir für lΣ gefunden haben, noch

$$\omega\, lX' + \omega\,(l\frac{X'}{Z'}.\frac{X''}{Z''}.\frac{X'''}{Z'''}.\frac{X''''}{Z''''}, \text{ect.}$$

Verſchwinden die Logarithmen der unendlichen Glieder jener Reihe aber nicht, ſondern erſt ihre Differenzen, ſo muß zu der Reihe, welche wir für lΣ. gefunden haben, noch

$$\omega\, lX' + \omega\,(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X''}{X''} + l\frac{X''''}{X'''} + \text{etc.})$$

hinzugeſetzt werden, und dadurch bekommt man, wenn man wieder die Zahlen nimmt,

$$\Sigma =$$

$$X'\omega\frac{X'\omega X'(1-\omega)}{Z'}.\ \frac{X'''\omega.X''(1-\omega)}{Z''}.\ \frac{X''''\omega.X'''(1-\omega)}{Z'''}\ \text{ect.}$$

Setzt man alſo x = o, in welchem Falle S = 1, und X′ = A, X″ = B, X‴ = C, ect wird ſo bedeutet Σ ein Produkt aus ω Gliedern der Reihe A, B, C, D, ect. Setzt man alſo x für ω, damit Σ den Werth erhalte, welchen wir vorhin S beygelegt haben, ſo daß

$$S = \overset{1}{A}.\ \overset{2}{B}.\ \overset{3}{C}.\ \overset{4}{D}\ldots\overset{x}{X}$$

iſt, ſo bekommt man für S, weil nun Z′, Z″, Z‴, ect. in X′, X″, X‴, ect. übergehen, für den Fall, daß die Logarithmen der unendlichſten Glieder jener Reihe verſchwinden, den Ausdruck

$$S = \frac{A}{X'} \cdot \frac{B}{X''} \cdot \frac{C}{X'''} \cdot \frac{D}{X''''} \cdot \frac{E}{X^V} \cdot \text{ect.}$$

Verſchwinden aber erſt die Differenzen der Logarithmen, ſo kann man hieraus ohne Mühe herleiten, was für Faktoren zu den vorhergehenden hinzugeſetzt werden müſſen; wir verweilen aber hierbey nicht, da dieſer Fall ſchwerlich vorkommen wird. Den Nutzen dieſer Ausdrücke werden wir bey der Interpolation der Reihen zu zeigen Gelegenheit haben.

Da es uns hier vorzüglich um die Differenziation von dergleichen inexplicablen Functionen zu thun iſt: ſo ſey das Differenzial der Function

$$S = A.\, B.\, C\, D. \ldots X$$

zu finden. Zu dieſem Ende wollen wir die vorhin gefundene Gleichung

$$l\Sigma = lS + lX' + lX'' + lX''' + \text{etc.}$$
$$- lZ - lZ'' - lZ''' - \text{etc.}$$

zu Hülfe nehmen. Da lZ aus dem lX entſpringt, wenn man $x + \omega$ für x ſetzt, ſo iſt

$$lZ = lX + \frac{\omega}{dx}\, d.\, lX + \frac{\omega^2}{2dx^2}\, dd.\, lX + \frac{\omega^3}{6\,dx^3}\, d^3.\, lX + \text{etc.}$$

und braucht man dieſe Werthe für lZ', lZ'', lZ''', ect. ſo bekommt man

$$l\Sigma = lS - \frac{\omega}{dx}\, d.\,(lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{etc.})$$
$$- \frac{\omega^2}{2dx^2}\, dd.\,(lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{etc.})$$
$$- \frac{\omega^3}{6dx^3}\, d^3.\,(lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{etc.})$$

Setzt man nun $\omega = dx$, ſo wird $l\Sigma = lS + d.\, lS$, und alſo

$$dS = -d.\,(lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{etc.})$$
$$- \tfrac{1}{2}\, dd.\,(lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{etc.})$$
$$- \tfrac{1}{6}\, d^3.\,(lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{etc.})\ \text{ect.}$$

Dieſe Reihen gelten, wenn die Logarithmen der unendlichſten Glieder der Reihe A, B, C, D, ect. verſchwinden; verſchwindet dieſe aber nicht, ſondern erſt ihre Differenzen, ſo muß zu dem vorhergehenden Ausdrucke noch

$$dx\, lX' + dx\,(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X''''}{X'''} + \text{ect.})$$

hinzugefügt werden, um das vollſtändige Differenzial zu erhalten.

Es giebt hierzu aber noch einen andern Weg. Man ſetze $x = 0$, in welchem Falle auch $lS = 0$ wird. Dann formire man Reihen, deren allgemeine Glieder

$$lX;\ \frac{d.\, lX}{dx};\ \frac{dd.\, lX}{2dx^2};\ \frac{d^3.\, lX}{6dx^3}\ \text{etc.}$$

ſind, und ſetze ihre Summen 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 etc. Schreibt man nun x für ω, damit $\Sigma = S$ werde; ſo iſt

$$lS = -𝔅x - ℭx^2 - 𝔇x^3 - 𝔈x^4\ \text{etc.}$$

wenn

wenn die Logarithmen der unendlichſten Glieder der Reihe A, B, C, D etc. deren allgemeines Glied X iſt, verſchwinden. Geſchiehet dies erſt bey den Differenzen dieſer Logarithmen, ſo iſt

$$lS = x\,lA + x\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{etc.}\right)$$
$$- \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \text{etc.}$$

Hiernach iſt das Differenzial von lS

$$\frac{dS}{S} = dx\,lA + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{etc.}\right)$$
$$- \mathfrak{B}dx - 2\mathfrak{C}xdx - 3\mathfrak{D}x^2dx - 4\mathfrak{E}x^3dx - \text{etc.}$$

und das vollſtändige Differenzial

$$\frac{dS}{S} = dx\,lA + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{etc.}\right)$$
$$- \mathfrak{B}xdx - \mathfrak{C}(2xdx + dx^2) - \mathfrak{D}(3x^2dx\,3xdx^3 + dx^3) - \text{etc.}$$

Den Gebrauch dieſer Form in zu zeigen, mögen folgende Exempel hier ſtehen, welche wir auf beyde Arten behandeln wollen.

Erſtes Exempel. Das Differenzial der inexplicablen Function:

$$S = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\ldots\frac{2x-1}{2x}$$ zu finden.

Hier iſt vor allen Dingen zu bemerken, daß die unendlichſten Glieder dieſer Faktoren Einheiten werden, und alſo ihre Logarithmen verſchwinden.

Da alſo $X = \frac{2x-1}{2x}$ iſt, ſo iſt

$$X' = \frac{2x+1}{2x+2};\ X'' = \frac{2x+3}{2x+4};\ X''' = \frac{2x+5}{2x+6};\ \text{etc.}$$

und überhaupt $X\,|n| = \frac{2x+2n-1}{2x+2n}$;

Folglich $l\,X\,|n| = d\,(2x+2n-1) - l(2x+2n)$

$$d.\,lX\,|n| = \frac{2dx}{(2x+2n-1)} - \frac{2dx}{(2x+2n)}$$

$$dd.\,lX\,|n| = -\frac{4dx^2}{(2x+2n-1)^2} + \frac{4dx^2}{(2x+2n)^2}$$

$$d^3.\,lX\,|n| = +\frac{2.2.4dx^3}{(2x+2n-1)^3} - \frac{2.2.4dx^3}{(2x+2x)^3}$$

$$d^4.\,lX\,|n| = -\frac{2.2.4\,6dx^4}{(2x+2n-1)^4} + \frac{2.2.4.6dx^4}{(2x+2n)^4}\ \&c.$$

und alſo das vollſtändige Differenzial

$$\frac{dS}{S} = -2dx\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \&c.\\ -\frac{1}{2x+2} - \frac{1}{2x+4} - \frac{1}{2x+6} - \&c.\end{array}\right\}$$

$+\frac{4}{2}$

$$+\tfrac{4}{2}\,dx^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c. \\ -\frac{1}{(2x+2)^2} - \frac{1}{(2x+4)^2} - \frac{1}{(2x+6)^2} - \&c. \end{array} \right\}$$

$$-\tfrac{8}{3}\,dx^3 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c. \\ -\frac{1}{(2x+2)^3} - \frac{1}{(2x+4)^3} - \frac{1}{(2x+6)^3} - \&c. \end{array} \right\} \&c.$$

Sucht man bloß das erſte Differenzial, ſo iſt ſolches

$$\frac{dS}{S} = 2dx \times$$

$$\left(\frac{1}{(2x+1)(2x+2)} + \frac{1}{(2x+3)(2x+4)} + \frac{1}{(2x+5)(2x+6)} + \&c.\right.$$

welches man nach der andern Methode auf folgende Art finden kann. Da

$$lX = l\,\frac{2x-1}{2x}$$ iſt, ſo iſt

$$\frac{d\,lX}{dx} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dd.\,lX}{2\,dx^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2} + \frac{1}{2xx}$$

$$\frac{d^3.\,lX}{6dx^3} = +\frac{8}{3(2x-1)^2} - \frac{1}{3x^3}\ \&c.$$

und folglich

$$\mathfrak{A} = 1\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{3}{4} + 1\tfrac{5}{6} + 1\tfrac{7}{8} + \&c.$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \&c. \\ -\frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \frac{2}{6} - \frac{2}{8} - \frac{2}{10} - \&c. \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{C} = -\tfrac{4}{2} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. \\ -+\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \&c. \end{array} \right|$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{3}{8} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \&c. \\ -\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} - \frac{1}{8^3} - \&c.\ \&c. \end{array} \right.$$

oder

$$\mathfrak{B} = +\tfrac{2}{1}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \&c.\right.$$

$$\mathfrak{C} = -\tfrac{4}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \&c.\right)$$

$$\mathfrak{D} = +\tfrac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \&c.\right)$$

$$\mathfrak{E}. = -\tfrac{16}{4}\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \&c.\right)\&c.$$

Durch die Subſtitution dieſer Werthe wird

$$\frac{dS}{S} = -2dx(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\&c.)$$

$$+4xdx(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\&c.)$$

$$-8x^2dx(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\&c.)$$

$$+16x^3dx(1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\&c.)$$

Iſt alſo $x = 0$, in welchem Falle $lS = 0$ und $S = 1$ wird, ſo iſt $dS = -2\,dxl2$.

Zweytes Exempel.

Das Differenzial der inexplicablen Function.
$S = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots.\ x$ zu finden.

Die Glieder dieſer Reihe 1, 2, 3, 4, ꝛc. wachſen im Unendlichen ſo, daß die Differenzen der Logarithmen verſchwinden, indem

$$l(\infty+1)-l\,\infty = l\,(1+\frac{1}{\infty}) = \frac{1}{\infty} = 0.$$

iſt. Da alſo $X = x$ und $lX = lx$ iſt, ſo wird

$$X' = x+1$$
$$X'' = x+2$$
$$X''' = x+3$$
$$\&c$$

$$d.\,lX = \frac{dx}{dx}$$

$$dd.\,lX = \frac{dx^2}{x^2}$$

$$^3.\,lX = \frac{2dx^3}{x^3}$$

$$d^4.\,lX = -\frac{2.\,3dx^4}{x^4}$$

Wenn alſo die Logarithmen verſchwänden, ſo würde

$$\frac{dS}{S} = -dx\,(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\&c.)$$

$$+\frac{dx^2}{2}\,(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\&c.)$$

$$-\frac{dx^3}{3}\,(\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+3)^3}+\&c.\ \&c.)$$

ſeyn. Da aber erſt die Differenzen der Logarithmen = 0 werden, ſo muß dazu noch

$$dx\,l(x+1)+dx\,(l\frac{x+2}{x+1}+l\frac{x+3}{x+2}+l\frac{x+4}{x+3}+\&c.)$$

addirt werden. Nun iſt

$$l\frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^4} + \&c.$$

$$l\frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(2x+2)} + \frac{1}{3(x+2)^3} - \frac{1}{4(x+2)^4} + \&c.\ \&c.$$

alſo das wahre vollſtändige Differenzial.

$$\frac{dS}{S} = dx\, l(x+1)$$

$$-\tfrac{1}{2}(dx - dx^2)\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \&c.\right.$$

$$+\tfrac{1}{3}(dx - dx^3)\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \&c.\right.$$

$$-\tfrac{1}{4}(dx - dx^4)\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \&c.\right.$$

$$+\tfrac{1}{5}(dx - dx^5)\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \&c.\right)$$

Will man aber dieſes Differenzial auf die andere Art ausdrucken, ſo hat man, da

$$lX = lx;\ \frac{d.\,lX}{dx} = 1;\ \frac{dd.\,lX}{2dx^2} = -\frac{1}{2x^3};$$

$$\frac{d^3.\,lX}{6dx^3} = \frac{1}{3x^3};\ \frac{d^4.\,lX}{24dx^4} = -\frac{1}{4x^4};$$ &c. iſt, folgende Reihen:

$$\mathfrak{A} = l\,1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \&c.$$

$$\mathfrak{B} = 1\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \&c.\right)$$

$$\mathfrak{C} = -\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c.\right.$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right.$$

$$\mathfrak{E} = -\tfrac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right)\ \&c.$$

Da alſo $lA = l1 = 0$ iſt, ſo wird

$$lS = x\left(l\tfrac{2}{1} + l\tfrac{3}{2} + l\tfrac{4}{3} + l\tfrac{5}{4} + \&c.\right)$$

$$-\,x\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \&c.\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}x^2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.\right)$$

$$-\tfrac{1}{3}x^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.\right)$$

$$+\tfrac{1}{4}x^4\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{ect.}\ \&c.\right)$$

Die beyden erſten Reihen, womit x multipliciret worden, haben zwar jede für ſich genommen, eine unendliche Summe, allein zuſammen geben ſie eine endliche Größe. Denn nimmt man von jeder n Glieder, ſo bekommt man

$l(n+1 - 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n}$. Nun haben wir

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} = C + \mathrm{l}n$$

gefunden, und für C ergiebt ſich 0,5772156649015325.

Setzt man demnach $n = \infty$, ſo wird

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{\infty} = C + \mathrm{l}n$$

und es iſt daher der Werth jener beyden Reihen, wenn man ſie ohne Ende fortſetzt,

$$= \mathrm{l}(\infty + 1) - C - \mathrm{l}\,\infty = - C$$

Hieraus ergiebt ſich

$$\mathrm{l}S = - x.\ 0,5772156649015325$$
$$+ \tfrac{1}{2} x^2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{1}{3} x^3 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4} x^4 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc. etc.}\right)$$

woraus ſich ferner die Differenzialien einer jeden Ordnung leicht beſtimmen laſſen. Es iſt nähmlich

$$\frac{dS}{S} = - dx.\ 0,5772156649015325$$
$$+ x dx \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c.\right)$$
$$- x^2 dx \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right)$$
$$+ x^3 dx \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right)$$

Vereinigt man aber dieſe Reihen in eine, ſo wird

$$\frac{dS}{S} = - dx.\ 0,5772156649015325$$
$$+ \frac{x dx}{1(1+x)} + \frac{x dx}{2(2+x)} + \frac{x dx}{3(3+x)} + \frac{x dx}{4(4+x)}\ \&c.$$

Iſt daher $x = 0$, ſo wird

$$\frac{dS}{S} = - dx.\ 0,5772156649015325$$

Aus dem erſten Ausdrucke aber iſt in dieſem Falle

$$\frac{dS}{S} = - \tfrac{1}{2}\, dx \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}\, dx \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.\right)$$
$$- \tfrac{1}{4}\, dx \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c.\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5}\, dx \left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \&c.\right)$$

 Da

Da die Differenzialien, welche wir bisher geſucht haben, vollſtändige Differenzialien ſind, ſo laſſen ſich daraus auch die Differenzialien in beſondern Fällen herleiten. Wenn daher in den gegebenen Ausdrücken ſolche Functionen vorkommen, welche unbeſtimmt zu ſeyn ſcheinen, dergleichen im Vorhergehenden unterſucht worden ſind: ſo kann man die Werthe derſelben nach eben der Methode finden. Wir wollen auch dieſes durch einige Beyſpiele erläutern.

Erſtes Exempel. Den Werth des Ausdrucks:

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x}}{x(x-1)\ldots\ldots(x-1)(2x-1)}$$

für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ geſetzt wird.

Setzt man $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x} = S$

$$\text{ſo iſt } S = x\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.\right)$$
$$- x^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ x^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c.\right)$$

Da aber auch

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4+x} - \frac{1}{5+x} - \text{etc.}$$

iſt, ſo erhält man, wenn man jedes Glied der obern Reihe mit dem vorhergehenden der untern verbindet,

$$S = 1 + \frac{x-1}{2(1+x)} + \frac{x-1}{3(2+x)} + \frac{x-1}{4(3+x)} + \text{etc.}$$

und dieſer Ausdruck iſt bequemer, wenn $x = 1$ geſetzt werden ſoll. Es iſt alſo $x = 1 + \omega$, ſo wird

$$S = 1 + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \text{etc. oder}$$

$$S = 1 + \omega\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.}\right) = 1 + \mathfrak{B}.$$
$$- \omega^2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right) \quad - \mathfrak{C}\omega^2.$$
$$+ \omega^3\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right) + \mathfrak{D}\omega^3 \text{ ect.}$$

und es geht alſo der ganze Ausdruck, wenn man $x = 1 + \omega$ annimmt, in

$$\frac{1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \text{etc.})}{\omega(1+\omega)} - \frac{1}{\omega(1+2\omega)} \text{ oder}$$

$$\frac{\omega + \mathfrak{B}\omega + 2\mathfrak{B}\omega^2 - \mathfrak{C}\omega^2 - \text{etc.}}{\omega(1+\omega)(1+2\omega)} = \frac{1 + \mathfrak{B} + 2\mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega - \text{etc.}}{(1+\omega)(1+2\omega)}$$

über. Nimmt man daher $\omega = 0$, ſo wird der Werth des gegebenen Ausdrucks

drucks für den Fall $x = 1$, $= 1 + \mathfrak{B} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.$ und folglich da dieſe Reihe $= \frac{1}{6}\pi^2$ iſt, $= \frac{1}{6}\pi^2$.

Zweytes Exempel. Den Werth des Ausdrucks:

$$\frac{2x - xx}{(x-1)^2} + \frac{\pi\pi x}{6(x-1)} - \frac{(2x-1)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x})}{x(x-1)^2}$$ für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ geſetzt wird.

Es ſey $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} = S$, und $x = 1 + \omega$ ſo wird, wie wir vorhin gefunden haben,

$S = 1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \&c.$ ſo daß

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c. = \tfrac{1}{6}\pi\pi - 1.$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc. etc.}$$

iſt. Setzt man daher $x = 1 + \omega$, ſo bekommt der gegebene Ausdruck die Form

$$\frac{1 - \omega\omega}{\omega\omega} + \frac{(1+\mathfrak{B})(1+\omega)}{\omega} - \frac{(1+2\omega)(1+\mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \&c.}{(1+\omega)\,\omega^2}$$

und bringt man dieſelbe auf einerley Nenner $\omega^2(1+\omega)$, ſo erhält man

$$\frac{\begin{array}{l}1 + \omega - \omega^2 - \omega^3 + \omega + 2\omega^2 + \omega^3 + \mathfrak{B}\omega(1 + 2\omega + \omega\omega)\\ -1 - \mathfrak{B}\omega + \mathfrak{C}\omega^2 - \mathfrak{D}\omega^3 - 2\omega - \mathfrak{B}\omega^2 + 2\,\mathfrak{C}\omega^3 - \&c.\end{array}}{\omega^2(1+\omega)}$$

oder $$\frac{\omega^2 + \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{B}\omega^3 - 2\,\mathfrak{C}\omega^3 - \mathfrak{D}\omega^3 - \&c.}{\omega^2(1+\omega)}$$

Wenn alſo nunmehr $\omega = 0$ angenommen wird; ſo ergiebt ſich $1 + \mathfrak{C}$. Es iſt folglich der Werth des gegebenen Ausdrucks für den Fall $x = 1$, $= 1 + \mathfrak{C}$, oder $= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}$

Da aber die Summe dieſer Reihe weder durch die Logarithmen noch durch den Umfang des Kreiſes dargeſtellt werden kann, ſo läßt ſich auch der geſuchte Werth bloß auf dieſe Art durch endliche Größen ausdrucken. Aus dieſen beyden Beyſpielen erhellet übrigens der Nutzen, welchen die Lehre von den inexplicablen Functionen in der Theorie der Reihen haben kann, hinlänglich.

Bisher haben wir angenommen, daß die unendlichſten Glieder der Reihe A′ B′ C′ D′ E′ etc. = 0 ſeyn, oder doch endlich verſchwindende Differenzen haben, und es findet daher die erklärte Methode nicht ſtatt, wenn dieſe Bedingungen mangeln. Wir wollen daher noch eine andere, von dieſen Bedingungen unabhängige, Methode hinzufügen, welche die allgemeine Summirung der Reihen aus dem allgemeinen Gliede, in die Hand giebt. Bedeuten

demnach 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, etc. die Bernouilliſchen Zahlen, und iſt die gegebene inexplicable Function

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots\ldots + \overset{x}{X}$$

ſo läßt ſich daraus,

$$S = \int X\, dx + \tfrac{1}{2} X \cdot \frac{\mathfrak{A}\, dX}{1.2 dX^2} - \frac{\mathfrak{B}\, d^3 X}{1.2.3.4\, dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\, d^5 X}{1.2\ldots 6\, dx^5}$$

das Differenzial der Function S leicht darſtellen. Es iſt nähmlich

$$dS = X dx + \frac{\mathfrak{A}\, ddX}{1.2.\, dx} - \frac{\mathfrak{B}\, d^4X}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\, d^6 X}{1.2\ldots 6\, dx^5} - \text{etc.}$$

Iſt aber eine arithmetiſche Progreſſion mit einer geometriſchen verbunden, in welchem Falle die unendlichſten Glieder nie beſtändige Differenzen bekommen, und alſo die erſte Methode gar keine Anwendung zuläßt, ſo gewährt die oben erklärte Methode Vortheil. Iſt nähmlich die Function

$$S = Ap + Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + \ldots + Xp^x$$

gegeben, ſo ſuche man die Werthe der Buchſtaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ect. ſo daß

$$\frac{p-1}{p-e^u} = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{ect.}$$

ſey. Hat man dieſelben gefunden, wie wir ſie oben mitgetheilt haben, ſo iſt

$$S = \frac{p}{p-1}\, p^x \left(X - \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \text{ect.}\right) \pm C$$

oder einer beſtändigen Größe, welche die Summe = 0 giebt, wenn x = 0 geſetzt wird, oder irgend einem andern Falle ein Genüge thut. Nimmt man nun das Differenzial, ſo fällt dieſe beſtändige Größe weg, und es wird

$$dS = \frac{p}{p-1} \cdot p^x dx\, lp \left(X - \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \text{ect.}\right)$$

$$+ \frac{p}{p-1} \cdot p^x \left(dX - \frac{\alpha\, ddX}{dx} + \frac{\beta d_3 X}{dx^2} - \frac{\gamma d^4X}{dx^2} + \text{ect.}\right)$$ oder $dS =$

$$\frac{p^{x+1}}{p-1} \Big(X dx\, lp - (\alpha\, lp - 1)\, dX + (\beta\, l\, p - \alpha)$$

$$\frac{ddX}{dx} - (\gamma\, lp - \beta)\, \frac{d^3X}{dx^3} + \text{ect.}\Big)$$

und dieſes iſt das geſuchte Differenzial der Function S.

Iſt die gegebene inexplicable Function ein Produkt, ſo kann man das Differenzial derſelben, die Logarithmen der unendlichſten Glieder mögen beſtändige Differenzen haben oder nicht, allemal nach dieſer Methoce finden. Es ſey nähmlich

$$S = \overset{1}{A}.\ \overset{2}{B}.\ \overset{3}{C}.\ \overset{4}{D}. \ldots \overset{x}{X}$$ Da hieraus

$$lS = lA + lB + lC + lD + \ldots lX$$

fließt, ſo wird, wenn man die Bernoulliſchen Zahlen braucht,

$$lS = l dx\, lX + \tfrac{1}{2} lX + \frac{\mathfrak{A}.\, d.\, lX}{1,\, 2dx} - \frac{\mathfrak{B}. d^3\, lX}{1.2.3.4 dx^3} + \text{ect.}$$

und

und dieſer Ausdruck giebt, wenn man ihn differenziirt,

$$\frac{dS}{S} = dx\,lX + \tfrac{1}{2}\,d.\,lX + \frac{\mathfrak{A}.\,dd\,lX}{1.\;2dx} - \frac{\mathfrak{B}.\,d^4.\,lX}{1,2,3\ldots4dx^3}$$

$$+ \frac{\mathfrak{C}d^6.\,lX}{1.\,2\ldots6dx^5} - \frac{\mathfrak{D}d^8.\,lX}{1.2.3\ldots8dx^7} + \text{ect.}$$ Iſt daher $X = x$, oder

$S = 1, 2.\ 3.\ 4.\ \ldots x$ ſo wird

$$\frac{dS}{S} = dxlx + \frac{dx}{2x} - \frac{\mathfrak{A}dx}{2xx} + \frac{\mathfrak{B}dx}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}dx}{6x^6} + \text{ect.}$$

und dieſe Formel wird, wenn x eine ſehr große Zahl iſt, mit mehrerer Bequemlichkeit gebraucht, als diejenigen, welche wir vorher gefunden haben. Eulers Differenzialrechnung III. 206.

E. Differenzialien für beſondere Fälle.

1) Wenn y irgend eine Function von x iſt, und dieſe veränderliche Größe x um den Zuwachs ω vermehrt wird oder x in $x + \omega$ übergehet, ſo bekommt dadurch y folgenden Werth:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ect.}$$

und alſo y den Zuwachs

$$\frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ect.}$$

Wird alſo $\omega = dx$, oder x um das Differenzial dx vermehrt, ſo wird der Zuwachs von y

$$dy + \tfrac{1}{2}\,ddy + \tfrac{1}{6}\,d^3y + \tfrac{1}{24}\,d^4y + \text{ect.}$$

und dieſer Zuwachs iſt das vollſtändige Differenzial von y. Da indeß jedes Glied dieſer Reihe zu dem folgenden ein unendliches Verhältniß hat, ſo verſchwinden alle folgende Glieder gegen das erſte; ſo daß dy das gewöhnliche erſte Differenzial von y wird. Auf ähnliche Art ſind die zweyten, dritten und vierten Differenzialien u. ſ. f. von y folgende

$$dd.\,y = ddy + \tfrac{3}{3}\,d^3y + \frac{7}{3.\ 4}\,d^4y + \frac{15}{3.4.5}\,d^5y + \frac{31}{3.4.5.6}\,d^6 + \text{ect.}$$

$$d^3y = d^3y + \tfrac{6}{4}\,d^4y + \frac{25}{4.\ 5}\,d^5y + \frac{90}{4.5.6}\,d^6y + \frac{301}{4.5.6.7}\,d^7y + \text{ect}$$

$$d^4y = d^4y + \tfrac{10}{5}\,d^5y + \frac{65}{5.6}\,d^6y + \frac{350}{5.6.7}\,d^7y + \text{ect.}$$

$$d^5y = d^5y + \tfrac{15}{6}\,d^6y + \frac{140}{6.\ 7}\,d^7y + \text{ect.}$$

$$d^6y = d^6y + \tfrac{21}{7}\,d^7y + \text{ect.}$$

und man erhält dieſe Differenzialien, nach dem Artickel Differenzen aus den Differenzialien zu erfinden II. 3, durch die Subſtitution dx für ω. Dieſe Differenzialien ſind die vollſtändigen Differenzialien von y, weil darin auch die Glieder beybehalten ſind, welche gegen das erſte verſchwinden. Man findet aber dieſe Glieder einzeln durch eine fortgeſetzte Differenziation von y, indem man dx als beſtändig betrachtet. Iſt z. B. $y = ax - xx$ ſo ſind, weil

dy

$dy = adx - 2xdx$, und $ddy = -2dx^2$ wird, die vollſtändigen Differenzialien von y

$$dy = adx - 2xdx - dx^2$$

$$ddy = -2dx^2$$ und die übrigen $= 0$.

2) Wenn aber gleich überhaupt die folgenden Glieder in dieſen Differenzial-Ausdrücken gegen die erſten verſchwinden, ſo fällt doch in beſondern Fällen, wenn das erſte Glied ſelbſt verſchwindet, der Grund davon hinweg und es dürfen alſo dann auch die folgenden Glieder nicht aus der Acht gelaſſen werden. So iſt z. B in dem vorhergehenden Falle, wo $y = ax - xx$ war, das Differenzial im allgemeinen zwar $= (a - 2x)\, dx$, und man hat nicht nöthig $- dx^2$ beyzubehalten, weil dieſes Glied unendlich kleiner iſt als das erſte; allein es liegt dabey die Vorausſetzung zum Grunde, daß das erſte Glied ſelbſt nicht verſchwinde. Wenn daher das Differenzial von $y = ax - xx$ für den Fall geſucht wird, wo $x = \frac{1}{2} a$ iſt, ſo muß man ſagen, es ſey $= - dx^2$, weil die Function y in dem Falle $x = \frac{1}{2} a$, wenn x um dx wächſt, um dx^2 abnimmt. Dieſen einzigen Fall ausgenommen, iſt das Differenzial der Function y allemal $= (a - 2x)\, dx$, denn, wenn nicht $x = \frac{1}{2} a$ wird, läßt man $- dx^2$ mit Recht aus der Acht. Auch kann die Vernachläßigung des Gliedes dx^2 ſelbſt in dem Falle, daß $x = \frac{1}{2} a$ iſt, zu keinem Irrthume verleiten. Denn da man die erſten Differenzialien unter ſich zu vergleichen pflegt, ſo iſt es, weil $dy = - dx^2$ im Falle $x = \frac{1}{2} a$, gegen die erſten Differenziale dx verſchwindet, gleichviel, ob man $dy = 0$, oder $dy = - dx^2$ habe.

3. Es bedeutet y irgend eine Function von x, und man erhalte dabey durch eine fortgeſetzte Differenziation

$$dy = pdx;\; dp = qdx;\; dq = rdx;\; dr = sdx, \text{ etc.}$$

ſo ſind die vollſtändigen Differenzen von y, wobey nichts aus der Acht gelaſſen wird,

$$dy = pdx + \tfrac{1}{2} qdx^2 + \tfrac{1}{6} rdx^3 + \tfrac{1}{24} Sdx^4 + \text{etc.}$$
$$ddy = qdx^2 + rdx^3 + \tfrac{7}{12} Sdx^4 + \tfrac{1}{4} tdx^5 + \&c.$$
$$d^3 y = rdx^3 + \tfrac{3}{2} sdx^4 + \tfrac{5}{4} tdx^5 + \&c.$$
$$d^4 y = sdx^4 + 2\, tdx^5 + \&c.$$
$$d^5 y = tdx^5 + \&c.$$

Wenn alſo die erſten Glieder in dieſen Ausdrücken nicht verſchwinden, ſo hat man in ihnen allein die Differenziation von y; wenn aber in irgend einem Falle das erſte Glied $= 0$ wird, ſo giebt das folgende das geſuchte Differenzial. Verſchwände auch das zweyte Glied, ſo würde auf ähnliche Art das dritte, und verſchwände auch das dritte Glied, ſo würde das vierte Glied dieſes Differenzial geben, u. ſ. w. Hieraus folgt, daß das erſte Differenzial einer Function von x eigentlich nie verſchwinde. Denn wird auch $p = 0$ in welchem Falle man das Differenzial von y als verſchwindend zu betrachten pflegt, ſo wird dieſes Differential durch eine höhere Poteſtät von dx ausgedruckt; z. B. durch $\frac{1}{2} qdx^2$, oder wenn auch q verſchwindet, durch $\frac{1}{6} rdx$ u. ſ. w.

4) Ob nun aber gleich in dieſen Fällen das Differenzial von y in Vergleichung mit andern erſten Differenzialien mit Recht aus der Acht gelaſſen wird, ſo iſt es doch gleichwohl öfters nützlich, den Ausdruck deſſelben zu kennen. So kann man aus dem vollſtändigen Ausdrucke eines Differenzials ſogleich beurtheilen, in welchen Fällen die gegebene Function ein Kleinſtes oder ein Größtes wird. Iſt z. B.

$$d.\, y = pdx + \tfrac{1}{2} qdx^2 + \tfrac{1}{6} rdx^3 + \&c.$$

ſo

ſo muß wenn y ein Größtes oder ein Kleinſtes werden ſoll, $p = 0$ ſeyn. In dieſem Falle iſt alſo $dy = \frac{1}{2} qdx^2$, und die Function y geht dabey, wenn man für x die Größe $x \pm dx$ ſetzt, in $y + \frac{1}{2} qdx^2$ über, und wird daher einen kleinſten Werth haben, wenn q poſitiv, und einen größten, wenn q negativ iſt. Wird aber auch $q = 0$, ſo iſt $dy = \frac{1}{6} rdx^3$ und die Function y geht durch die Subſtitution $x \pm dx$ für x in $y \pm \frac{1}{6} rdx^3$ über; es findet aber in dieſem Falle weder ein Größtes noch ein Kleinſtes ſtatt. Wird hingegen auch $r = 0$, ſo erhält man, wenn man $x \pm dx$ für x ſetzt, $y + \frac{1}{24} Sdx^4$ für y, und dieſer Ausdruck giebt ein Größtes, wenn S eine poſitive Größe iſt.

5) Wir wollen annehmen p verſchwinde, wenn $x = a$ wird, und dies geſchiehet, wenn $p = (x - a) P$ iſt. Es entſtehet aber ein ſolcher Werth, wenn $y = (x - a)^2 P + C$ iſt, wo C irgend eine beſtändige Größe bedeutet. Denn da $pdx = (x - a)^2 dP + 2 (x - a) Pdx$ iſt, ſo muß nothwendig $p = 0$ werden, wenn man $x = a$ ſetzt. Alsdenn wird folglich, da $dpdx = qdx^2 = (x - a)^2 ddP + 4 (x - a) dP.dx + 2 Pdx^2$ iſt, $d.y = Pdx^2$, es müßte denn P bey $x = a$ verſchwinden, welcher Fall nachher betrachtet werden ſoll. Der gegenwärtige kann allgemeiner auf folgende Art dargeſtellt werden. Es ſey $z = (x - a)^2 P + C$, und y irgend eine Function von z, ſo daß $dy = Zdz$ werde, wenn Z irgend eine Function von $z = (x - a)^2 P + C$ bedeutet. Alsdann iſt alſo

$$dz = (x - a)^2 dP + 2 (x - a) Pdx, \text{ und}$$
$$pdx = Z (x - a)^2 dP + 2Z (x - a) Pdx.$$

Dieſes Glied wird $= 0$, wenn $x = a$ wird, und läßt man in eben dieſem Falle die Glieder weg, welche den Faktor $x - a$ enthalten, ſo wird $qdx^2 = 2PZdx^2$, und alſo für $x = a$, nachdem man in PZ allenthalben a für x geſetzt hat, $dx = PZ dx^2$. Iſt daher y irgend eine Function von $z = (x - a)^2 P + C$ ſo daß $dy = Zdx$ iſt, ſo iſt für $x = a$ das Differenzial $dy = PZdx^2$. Es wird daher dieſe Function y für $x = a$ ein Größtes, wenn in eben dieſem Falle die Größe PZ negativ, und ein Kleinſtes, wenn PZ poſitiv iſt.

6. Wenn $p = (x - a)^2 P$, ſo verſchwindet für $x = a$ auch q; man findet aber einen ſolchen Werth für p, wenn $y = (x - a)^3 P + C$ iſt. Es iſt alſo dann

$$pdx = (x - a)^3 dP + 3 (x - a)^2 Pdx$$
$$qdx^2 = (x - a)^3 ddP + 6 (x - a)^2 dPdx + 6Pdx^2$$

und jedes dieſer beyden Glieder verſchwindet, wenn $x = a$ wird; das folgende aber iſt

$$rdx^3 = (x - a)^3 d^3P + 9 (x - a)^2 ddPdx$$
$$+ 18 (x - a) dPdx^2 + 6Pdx^3 = 6Pdx^3$$

wenn $x = a$ iſt. Da alſo p und q für $x = a$ verſchwinden, ſo wird $dy = \frac{1}{6} rdx^3 = Pdx^3$. Auf ähnliche Art findet man, wenn $z = (x - a)^3 P + C$, und y eine Function von z und $dy = Zdx$ iſt, weil alsdann $dz = (x - a)^3 dP + 3 (x - a)^2 Pdx$ iſt, $p = 0$ und $q = 0$, und $rdx^3 = 6PZdx^3$; alſo $dy = PZdx^3$ für $x = a$. Wenn daher gleich für $x = a$, $p = 0$ wird, ſo hat dennoch die Function y weder einen größten noch einen kleinſten Werth.

7. Es giebt aber einen leichtern Weg dieſe Differenzialien zu finden, welcher ſich auf die Natur der Differenzialien ſelbſt gründet. Denn da man das Differenzial von y erhält, wenn man y von ſeinem nächſten Werthe oder dem, welchen es durch die Subſtitution $x + dx$ für x bekommt, abzieht, ſo ſey,

wie im erſten Falle, $y = (x - a)^2 P + C$. Setzt man hier $x + dx$ für x, ſo wird $y' = (x - a + dx)^2 P' + C$ und folglich

$$dy = (x - a + dx)^2 P' - (x - a)^2 P.$$

Wenn alſo $x = a$ iſt, ſo wird $dy = P'dx^2$, und, da P' und P im Verhältniſſe der Gleichheit ſtehen, $dx = Pdx^2$. Ferner ſey $z = (x - a)^2 P + C$, ſo wird $dz = Pdx^2$. Wenn alſo y irgend eine Function von z, und $dy = Zdz$ iſt, ſo wird für $x = a$, $dy = PZdx^2$

Iſt nun $z = (x - a)^3 P + C$, ſo wird $z' = (x - a + dx)^3 P' + C$, und daher für $x = a$, $z' - z = dz = Pdx^3$.

Iſt demnach y irgend eine Function von z und $dy = Zdz$, ſo iſt auch für $x = a$ das Differenzial $dy = PZdx^3$, vorausgeſetzt, daß in den Functionen P und Z allenthalben a für x ſubſtituirt werde. Da aber in dieſem Falle $z = C$ und Z eine Function von z iſt, ſo wird Z eine beſtändige Größe, nähmlich eine ſolche Function von C als es vorhin von z war.

8. Wenn alſo überhaupt $y = (x - a)^n P + C$ iſt, ſo wird, weil dann $y' = (x - a + dx)^n P' + C$ wird, für $x = a$ das Differenzial $dy = Pdx^n$; und wenn alſo $n > 1$, ſo verſchwindet dieſes Differenzial in Vergleichung mit andern erſten Differenzialien, welche dx homogen ſind. Nun iſt aus dem Vorgehenden klar, daß die Function y für $x = a$ ein Größtes oder ein Kleinſtes wird, wenn n eine gerade Zahl, und dabey P für $x = a$ eine poſitive, und ein Größtes, wenn P eine negative Größe iſt. Man findet demnach auf dieſe Art die größten und kleinſten Werthe viel leichter als nach der oben beſchriebenen Methode, weil man dabey nicht nöthig hat, zu den höhern Differenzialien fortzugehen. Wenn aber $z = (x - a)^n P + C$, und y eine Function von z, und $dy = Zdz$ iſt: ſo wird für $x = a$ das Differenzial $dy = PZdx^n$. Es wird aber hier n für eine poſitive Zahl, oder eine ſolche, die größer als o iſt, genommen; denn wenn n eine negative Zahl wäre, ſo würde, wenn man $x = o$ ſetzte, $(x - a)^n$ nicht verſchwinden, ſondern ſelbſt unendlich groß werden.

9. Wir haben geſehen, daß auf dieſe Art das Differenzial viel leichter gefunden wird, als vermittelſt der Reihe, wodurch wir vorhin das vollſtändige Differenzial ausdruckten; denn iſt n eine ganze Zahl, ſo müſſen ſo viel Glieder jener Reihe durchgegangen werden als n Einheiten hat. Aber wenn n ein Bruch iſt, ſo giebt jene Reihe das wahre Differenzial nicht einmal. Es ſey z. B. $y = (x - a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, wo in Rückſicht auf die Reihe

$$dy = pdx + \tfrac{1}{2} qdx^2 + \tfrac{1}{6} rdx^3 + \tfrac{1}{24} sdx^4 + \text{ect.}$$

$$p = \tfrac{3}{2}\sqrt{(x - a)};\quad q = \frac{3}{4\sqrt{(x - a)}}$$

$$r = \frac{3}{8(x - a)\sqrt{(x - a)}} \text{ und } s = \frac{9}{16(x - a)^2\sqrt{(x - a)}} \text{ ect.}$$

Wenn man alſo $x = a$ ſetzt, ſo wird zwar $p = o$; allein alle folgenden Glieder q, r, s, ect. gehen ins Unendliche über, und es kann demnach der Werth des Differenzials in dieſem Falle gar nicht angegeben werden. Dagegen läßt die auf die Natur der Differenzialien ſelbſt gegründete Methode

gar

gar keinen Zweifel übrig. Denn da $x = (x - a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$ iſt, ſo erhält man durch die Subſtitution $x + dx$ für x, $y' = (x - a + dx)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$ und es iſt folglich, wenn $x = a$ geſetzt wird, $dy = dx\sqrt{dx}$. Dieſes Differenzial verſchwindet gegen dx, aber dagegen verſchwinden gegen daſſelbe die zweyten Differenzialien welche dx^2 homogen ſind.

10. Jetzt wollen wir die Fälle etwas genauer betrachten, wo n eine gebrochene Zahl iſt, und $y = P\sqrt[n]{(x - a)} + C$ ſetzen. Hier wird, wegen $y' = P'\sqrt[n]{(x - a + dx)} + C$ $dy = P\sqrt[n]{dx}$ für $x = a$, und es hat folglich dieſes Differenzial zu dx und allen ihm homogenen Differenzialien ein unendliches Verhältniß. Hieraus erhellet auch, wie in dieſem Falle über das Größte und Kleinſte zu urtheilen iſt. Denn da y, wenn man $x + dx$ für x ſetzt, in $P\sqrt{(x - a)} + C + P\sqrt{dx}$ übergeht, ſo hat, da $\sqrt{dx}$ beyde Zeichen zuläßt, die Function y einen doppelten Werth, den einen größer als C, und den andern kleiner, ſo daß ſie für $x = a$ weder ein Größtes noch ein Kleinſtes wird. Nimmt man ferner dx negativ, ſo wird der Werth von y ſogar imaginär. Eben dies hat man zu merken, wenn $z = P\sqrt{(x - a)} + C$, und y eine Function von z und $dy = Zdz$ iſt, indem alsdann $dy = PZ\sqrt{dx}$ für $x = a$ wird.

11. Wenn die Function, deren Differenzial für den Fall $x = a$ geſucht werden ſoll,

$$y = (x - a)^{\frac{m}{n}} P + C$$

iſt, ſo wird, wie aus dem vorhergehenden erkannt werden kann,

$$dy = P dx^{\frac{m}{n}}.$$

Wenn daher $m > n$ iſt, ſo verſchwindet dieſes Differenzial gegen dx, iſt aber $m < n$, ſo wird $\frac{dy}{dx}$ unendlich groß. Iſt ferner n eine gerade Zahl, ſo hat das Differenzial dy einen doppelten Werth, einen poſitiven und einen negativen; und wenn man daher $a + dx$ für x ſetzt, ſo bekommt die Function y, die bey $x = a$ den Werth C erhalten haben würde, einen doppelten Werth, einen der größer, und einen, der kleiner iſt als C. Setzte man hingegen $x = a - dx$, ſo würde y imaginär werden, und alſo in dieſem Falle weder ein Größtes noch ein Kleinſtes ſeyn. Nun ſey n eine ungerade Zahl, wo denn m entweder gerade oder ungerade ſeyn wird. Es ſey zuvörderſt m eine gerade Zahl. Da alsdann dy denſelben Werth erhält, man mag dx poſitiv oder negativ nehmen; ſo erhellet, daß die Function y für $x = a$ entweder ein Größtes oder ein Kleinſtes ſeyn werde, je nachdem in dieſem Falle P eine negative oder poſitive Größe iſt. Wenn aber ſowohl m als n ungerade iſt, ſo geht das Differenzial dx in das entgegengeſetzte über, wenn man dx negativ nimmt; und es hat daher in dieſem Falle die Function y weder einen größten noch einen kleinſten Werth.

12. Wenn die Function y aus mehrern durch $x - a$ theilbaren Gliedern beſteht, und z. E. $y = (x - a)^m P + (x - a)^n Q + C$ iſt, ſo iſt ihr Differenzial für den Fall $x = a$ $dy = P dx^m + Q dx^n$.

Iſt in dieſem Ausdrucke $n > m$, ſo verſchwindet das zweyte Glied gegen das erſte, und man behält bloß $dy = Pdx^m$. Iſt aber n ein Bruch mit einem geraden Nenner, ſo darf man Qdx^n, ob es gleich in Vergleichung mit Pdx^m verſchwindet, gleichwohl nicht aus der Acht laſſen. Es erhellet nähmlich daraus, daß dy negativ wird, wenn man dx negativ nimmt, welches man aus Pdx^m nicht erkennen kann. Da alſo, wenn n ein Bruch mit einem geraden Nenner iſt, dx nicht negativ genommen werden kann, das Glied Qdx^n aber, wenn man dx poſitiv nimmt, einen doppelten Werth hat: ſo wird die Function $y = (x - a)^m P + (x - a)^n Q + C$ welche für $x = a$ der beſtändigen Größe C gleich wird, durch die Subſtitution $x + dx$ für x, $y = C + Pdx^m \pm Qdx^n$ und da dieſe beyden Werthe entweder größer oder kleiner als C ſind, je nachdem P eine poſitive oder negative Größe iſt: ſo hat die Function y im Falle $x = a$ weder einen größten noch einen kleinſten Werth.

13. In dieſen Fällen laſſen ſich alſo die wahren Differenzialien der Function nicht nach den gewöhnlichen Regeln finden, weil dieſe blos gelten, wenn die dx homogenen Differenzialien der Functionen geſucht werden. Wenn hingegen in irgend einem beſondern Falle das Differenzial einer Function durch die Poteſtät dx^n ausgedruckt wird, ſo findet man dafür nach jener Regel 0, wenn n größer als 1, und ∞, wenn n kleiner als 1 iſt. Iſt z. B. $y = \sqrt{(a - x)}$ und ſoll das Differenzial von y für den Fall $x = a$ geſucht werden: ſo erhält man, da $dy = -\frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$ iſt, für $x = a$, $dy = -\frac{dx}{0}$ Und wollte man die folgenden Differenzialien zu Hülfe nehmen, ſo würden auch dieſe, weil ſie einen 0 gleichen Nenner hätten, insgeſammt unendliche Größen ſeyn. Wir haben aber geſehen, daß $dy = \sqrt{-dx}$, und alſo ſogar imaginär iſt. Setzt man hingegen $x - dx$ für x, ſo wird $dy = \sqrt{dx}$, und alſo unendlich gegen dx, ſo, daß alſo dx gegen dy verſchwindet. Es leitet daher die gewöhnliche Methode auch hier zu keinem Irrthume, indem ſie den Werth von dy unendlich groß angiebt.

14. Man muß alſo die gewöhnliche Methode zu differenziiren verlaſſen, ſo oft in der Reihe $pdx + \frac{1}{2} qdx^2 + \frac{1}{6} rdx^3 + \&c.$ wodurch das vollſtändige Differenzial der Function y ausgedruckt wird, das erſte Glied p entweder $= 0$ oder $= \infty$ wird, und alsdann das Differenzial nach den erſten Grundſätzen der Differenziation ſuchen. So oft daher das Differenzial der Function y für einen gewiſſen Werth von x gefunden werden ſoll, wobey p entweder unendlich groß oder unendlich klein wird: ſo oft muß man zu den erſten Gründen der Differenziation zurück gehen. In allen übrigen Fällen, wo weder $p = 0$ noch $p = \infty$ wird, giebt die gewöhnliche Methode die wahren Werthe des Differenzials. Doch darf der Fall (12) nicht aus der Acht gelaſſen werden, wenn y ſein Glied $(x - a)^n Q$ enthält, und n einen Bruch mit einem geraden Nenner bedeutet. Denn wenn es in dieſem Falle gleich niedrige Differenzialien giebt, gegen welche Qxd^n verſchwindet, ſo werden doch, wenn dx negativ und alſo Qdx^n imaginär iſt, durch das Glied Qdx^n alle übrige Glie-

Glieder imaginär, und dieſer Umſtand iſt bey den Linien wichtig. Dergleichen beſondere Fälle, wo das wahre Differenzial nach der gewöhnlichen Methode nicht gefunden werden kann, wollen wir nun durch einige Beyſpiele erläutern.

Erſtes Exempel. Das Differenzial der Function:
$y = a + x - \sqrt{(xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)})}$ für den Fall $x = a$ zu finden.

Daß man das Differenzial dieſer Function nicht nach der gewöhnlichen Regel finde, erhellet aus der Differenziation. Dadurch bekommt man

$$dy = dx - \frac{xdx - \frac{1}{2} adx + \frac{1}{2} dx \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)})}} + \frac{(axdx - xxdx) : \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)})}}$$

und alſo, wenn man $x = a$ ſetzt,

$$dy = dx - \frac{adx}{a} = 0.$$

Um alſo von den erſten Grundſätzen der Differenziation auszugehen, ſo wird, wenn man $x + dx$ für x ſchreibt,

$$y' = a + x + dx - \sqrt{(xx + 2xdx + dx^2 + ax + adx - (x + dx)\sqrt{(2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2)})}$$

und wenn man $x = a$ ſetzt;

$$y' = 2a + dx - \sqrt{(2aa + 3adx + dx^2 - (a + dx)\sqrt{(aa - dx^2)})}.$$

Da alſo $\sqrt{(aa - dx^2)} = a - \frac{dx^2}{2a}$ iſt, indem die folgenden Glieder ſicher aus der Acht gelaſſen werden können, ſo wird

$$y' = 2a + dx - \sqrt{(aa + 2adx + \tfrac{3}{2} dx^2)}$$

und wenn man die Quadratwurzel auszieht,

$$y' = 2a + dx - (a + dx + \frac{dx^2}{4a}) = a - \frac{dx^2}{4a}.$$

Nun iſt aber, wenn $x = a$ geſetzt wird, $y = a$, alſo da $y' = y + dy$ iſt, $dy = -\frac{dx^2}{4a}$; und hieraus erhellet zugleich, daß die Function y ein größeres wird, wenn man $x = a$ nimmt.

Zweytes Exempel. Das Differenzial der Function:
$y = 2ax - xx + a\sqrt{(aa - xx)}$ für den Fall $x = a$ zu finden.

Differenziirt man auf die gewöhnliche Art, ſo wird

$$dy = 2adx - 2xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$$

und dieſer Ausdruck wird unendlich groß, wenn man $x = a$ annimmt, und iſt folglich unbrauchbar. Es werden aber auch die Differenzialien der folgenden Ordnung unendlich große Größen, ſo daß man auch aus ihnen nach der Reihe $pdx + \frac{1}{2} qdx^2 + \frac{1}{6} rdx^3 +$ &c. das wahre Differenzial nicht findet. Man ſetze alſo $x + dx$ für x, ſo wird

$$y' = 2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2 + a\sqrt{(aa - xx - 2xdx - dx^2)}$$

und wenn man $x = a$ nimmt,

$$y' = aa - dx^2 + a\sqrt{(-2adx - dx^2)}.$$

Nun wird aber in dieſem Falle auch $y = aa$; folglich

$$dy = - dx^2 + a\sqrt{-2adx}$$

und da dx^2 gegen $\sqrt{-2adx}$ verſchwindet,

$$dy = a\sqrt{-2adx}$$

Wenn demnach dx poſitiv iſt, ſo wird dy imaginär; ſetzt man aber $x - dx$ für x, ſo erhält man $dy = a\sqrt{2adx}$, und da dieſer Ausdruck einen doppelten Werth hat, einen poſitiven nähmlich und einen negativen: ſo iſt die Function in dem Falle $x = a$ weder ein Größtes noch ein Kleinſtes.

Drittes Exempel. Das Differenzial der Function:

$y = 3aax - 3axx + x^3 + (a-x)\,2\sqrt[3]{(a^3 - x^3)}$ für den Fall $x = a$ zu finden.

Da dieſe Function ſich auf die Form bringen läßt:

$y = a^3 - (a-x)^3 + (a-y)^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{(aa + ax + xx)}$, ſo wird, wenn man $x = a + dx$ ſetzt,

$y' = a^3 + dx^3 - dx^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{3aa}$ und in eben dieſem Falle iſt $y = a^3$. Demnach iſt $dy = dx^3 - dx^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{3aa}$ und da dx^3 gegen $dx^{\frac{7}{3}}$ verſchwindet, ſo wird

$$dy = - dx^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{3aa}.$$

Wenn alſo $x = a$ genommen wird, ſo hat die Function y weder einen größten noch einen kleinſten Werth.

Viertes Exempel. Das Differenzial der Function:

$y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} = (1 + \sqrt[4]{x})\sqrt{x}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Da $x = 0$ ſeyn ſoll; und dabey $y = 0$ wird, ſo ſchreibe man bloß dz für x, wodurch man $dx = dx^{\frac{1}{2}} + dx^{\frac{3}{4}}$ oder $dy = (1 + \sqrt[4]{dx})\sqrt{dx}$ bekömmt; woraus zuvörderſt erhellet, daß dx nicht negativ genommen werden darf. Ferner kann auch $\sqrt{dx}$, ob es gleich ſonſt einen doppelten Werth, einen poſitiven und einen negativen, hat, weil $\sqrt[4]{dx}$ vorkommt, bloß poſitiv genommen werden. Aber $\sqrt[4]{dx}$ läßt einen doppelten Werth zu, und ſo wird $dy = \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$, und

$$y' = 0 + \sqrt{dx} \pm \sqrt{dx^3}$$

weil $y = 0$ iſt. Da alſo beyde Werthe von y' größer ſind als der von y, ſo iſt y für $x = 0$ ein Kleinſtes. Daß aber die Function $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ die Function $y = -\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ nicht in ſich begreife, erhellet, wenn man beyde rational macht. Verwandelt man nähmlich die erſte in $y - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x}$, und erhebt beyde Seiten zum Quadrate, ſo wird $y^2 - 2y\sqrt{x} + x = x\sqrt{x}$ oder $y^2 + x = (x + 2y)\sqrt{x}$ und quadrirt man beyde Hälften dieſer Gleichung von neuem, ſo bekommt man

$$y^4 - 2yyx - 4xxy + xx - x^3 = 0.$$

Die andere aber oder $y + \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$ giebt quadrirt

$$y^2 + x = (x - 2y)\sqrt{x}$$

und wenn dieſe Gleichung von neuem quadrirt wird, ſo findet man

$$y^4 - 2yyx + 4xxy + xx - x^3 = 0$$

eine

eine Gleichung, welche von der vorhergehenden verſchieden iſt. Aber das andere Glied $\sqrt[4]{x^3}$ behält das doppelte Zeichen. Es iſt daher dieſer Umſtand wohl zu merken, daß, wenn auch gleich die geraden Wurzeln beyde Zeichen + und — zulaſſen, doch bloß das erſte beybehalten werden kann, wenn in eben dem Ausdrucke eben derſelben Wurzeln fernere gerade Wurzeln vorkommen, denn dieſe würden imaginär werden, wenn man jene negativ nähme. Und hieraus laſſen ſich die größten und kleinſten Werthe der andern Art erkennen, wenn dergleichen nicht ſtatt zu haben ſcheinen.

Fünftes Exempel. Das Differenzial der Function:

$y = a + \sqrt{(x - f)} + (x - f)\sqrt[4]{(x - f)} + (x - f)^2\sqrt[8]{(x - f)}$ für den Fall $x = f$ zu finden.

Es ſey $x - f = t$. Da alsdann

$y = a + \sqrt{t} + t\sqrt[4]{t} + \sqrt[8]{t}$ wird, ſo iſt das Differenzial hiervon für den Fall $t = 0$ zu finden, und in dieſem Falle alſo $y = a$. Setzt man alſo $t + dt$ oder $0 + dt$ für t: ſo wird

$y' = y + dy = a + \sqrt{dt} + dt + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$ und folglich

$dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$.

Hier iſt zuvörderſt klar, daß das Differenzial dt nicht negativ genommen werden kann, wofern nicht dy imaginär werden ſoll. Ja es kann nicht bloß $\sqrt{dt}$, ſondern nicht einmal $\sqrt[4]{dt}$ negativ genommen werden, weil ſonſt $\sqrt[8]{dt}$ imaginär werden würde, und es hat daher das Differenzial dy, bloß einen doppelten Werth, nähmlich

$dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} \pm dt^2\sqrt[8]{dt}$

und da beyde größer ſind als 0, ſo folgt, daß die Function y ein Kleinſtes der zweyten Art werde, wenn man $t = 0$ oder $x = f$ ſetzt. Wenn alſo auch gleich in dieſen Fällen die Glieder $dt\sqrt[4]{dt}$ und $dt^2\sqrt[8]{dt}$ gegen das erſte $\sqrt{dt}$ verſchwinden, ſo darf man ſie doch nicht aus der Acht laſſen, wenn die Menge der Werthe beſtimmt werden ſoll, ſo daß die imaginären Größen nicht in Anſchlag kommen.

Sechſtes Exempel. Das Differenzial der Function:

$y = ax + bxx + (x - f)^n + (x - f)^{m + \frac{1}{2}n}$ für den Fall $x = f$ zu finden.

Wenn man $x = f$ ſetzt, ſo wird $y = af + bff$, und ſchreibt man $x + dx$ oder $f + dx$ für x, ſo findet man für den nächſten Werth

$y' = af + bff + adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^{m + \frac{1}{2}n}$ und folglich

$dy = adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^m\sqrt{dx^n}$.

Wofern alſo nicht n eine gerade Zahl iſt, ſo kann auch dx nicht negativ genommmen werden. Es hat aber das letzte Glied $dx^m\sqrt{dx^n}$ ein doppeltes Zeichen, und es wird daher der Werth von y' doppelt und größer als y, wenn $a + 2bf$ eine poſitive Größe, und die Exponenten n und $m + \frac{1}{2}n$ größer als 1 ſind. Es wird alſo die Function y für den Fall $x = f$ ein Kleinſtes, und dies geſchiehet, n mag eine ganze Zahl oder ein Bruch ſeyn, wenn nur der Zähler in dieſem und die Zahl in jenem nicht gerade iſt.

15.

15. Vorzüglichen Nutzen hat dieſe Methode die Differenzialien nach den erſten Gründen der Differenziation zu beſtimmen, in den tranſcendenten Functionen, wenn in gewiſſen Fällen das auf die gewöhnliche Art gefundene Differenzial entweder zu verſchwinden oder unendlich groß zu werden ſcheint. Es kommen aber hier Arten von unendlich großen und unendlich kleinen Größen vor, welche bei den algebraiſchen Functionen nie angetroffen werden. Bedeutet z. B. i eine unendlich große Zahl, ſo iſt zwar li auch unendlich groß, hat aber doch gegen i, und gegen jede Poteſtät i^n, ſo klein man auch den Exponenten n annehmen mag, ein unendlich kleines Verhältniß, und es iſt daher der Bruch $\frac{li}{i^n}$ eine unendlich kleine Größe, und kann nicht eher eine endliche Größe werden, bis der Exponent n unendlich klein wird. Es iſt daher li homogen i^n, wenn n unendlich klein iſt. Nun ſey $i = \frac{1}{\omega}$, ſo daß ω eine unendlich kleine Größe bedeute: ſo iſt $- l\omega$ homogen $\frac{1}{\omega^n}$ wenn n unendlich klein iſt, und folglich $-\frac{1}{l\omega}$ homogen ω^n; folglich $-\frac{1}{ldx}$ ein unendlich Kleines, welches mit dx^n verglichen werden kann, wenn n einen unendlich kleinen Bruch bedeutet. Iſt daher $y = -\frac{1}{lx}$, ſo iſt das Differenzial von y für den Fall $x = o = -\frac{1}{ldx} = dx^n$, und es hat folglich dy zu dx und jede Poteſtät von dx ein unendliches Verhältniß und es verſchwinden gegen $-\frac{1}{ldx}$ alle Poteſtäten von dx; ſo klein auch ihre Exponenten ſeyn mögen.

16. Auch haben wir geſehen, daß a^i, wenn a eine Zahl, die größer als 1 iſt, und i eine unendlich große Zahl bedeutet, ein unendlich großes von einem ſo hohen Grade iſt, daß dagegen nicht nur i, ſondern ſelbſt jede Poteſtät von i verſchwindet, und es wird nicht eher i^n homogen a^i, als bis n unendlich geworden iſt. Nun ſey $i = \frac{1}{\omega}$, ſo daß ω eine unendlich kleine Größe bedeute, ſo iſt $\frac{1}{a^{\omega}}$ homogen $\frac{1}{\omega^n}$, wenn n eine unendlich große Zahl iſt; und folglich $\frac{-1}{a^{\omega}}$ oder $\frac{1}{a^{1:\omega}}$ ein unendlich kleines, welches mit ω^n in Vergleichung zu ſetzen iſt. Hiernach iſt $\frac{1}{a^{1:dx}}$ ein unendlich Kleines, welches aber gegen jede Dignität von dx verſchwindet, da es dx^n homogen iſt, wenn n eine unendlich

große

große Zahl bedeutet. Wird daher das Differenzial von $y = \frac{1}{a^{1:x}}$ für den Fall $x = 0$ geſucht, ſo iſt, da $y = 0$ wird, $dy = \frac{1}{a^{1:dx}}$ und alſo unendlichmal kleiner als jede noch ſo hohe Poteſtät von dx.

17. Iſt aber a kleiner als 1, ſo iſt $\frac{1}{a}$ größer als 1, und ſo wird die Frage auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt. Hat man nähmlich den Ausdruck $\frac{1}{a^{\omega}}$, ſo ſetze man $a = \frac{1}{b}$ wodurch man $\frac{1}{b^{\omega}}$ oder $\frac{1}{b^{1:\omega}}$ bekommt, einen Ausdruck, der, da $b > 1$ iſt, ω^n homogen wird, wenn n eine unendliche Zahl bedeutet. Dies vorausgeſetzt, können wir uns zu folgenden Exempeln wenden.

Erſtes Exempel. Das Differenzial der Function $y = xx - \frac{1}{lx}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, ſo erhalten wir, wenn wir $x + dx$ oder $0 + dx$ für x ſetzen,

$$y' = dy = dx^2 - \frac{1}{ldx}$$

Da aber $-\frac{1}{ldx}$ homogen iſt dx^n, wenn n eine unendlich kleine Zahl bedeutet; ſo verſchwindet dagegen dx^2, und es wird

$$dy = -\frac{1}{ldx} = dx^n$$

Da ferner die Logarithmen der negativen Zahlen imaginär ſind, ſo kann dx nicht negativ genommen werden, und es iſt demnach y für den Fall $x = 0$ ein Kleinſtes, welches aber weder zu der erſten noch zu der andern Art gehört. Zur erſten Art gehört es nicht, weil y keine nächſte vorhergehende Werthe hat, ſondern bloß kleiner iſt, als die folgenden, wenn x größer als 0 angenommen wird. Zur andern Art aber gehört es auch nicht, weil die folgenden Werthe, mit welchen es verglichen wird, nicht doppelt ſind. Und auf dieſe Art entſteht eine dritte Gattung der größten und kleinſten Werthe, welche bloß bey den logarithmiſchen und transcendenten Functionen ſtatt hat, bey den algebraiſchen aber nie angetroffen wird, und wovon in der Lehre von den Curven oft die Rede iſt.

Zweytes Exempel. Das Differenzial der Function:

$$y = (a - x)^n - x^n)\ la - lx)^n \text{ für den Fall } x = a \text{ zu finden.}$$

Das Differenzial der Function kann man, wenn n eine ganze Zahl iſt, aus der allgemeinen Formel $dy = pdx + \frac{1}{2} qdx^2 + \frac{1}{6} rdx^3 + \&c.$ finden. Es wird nähmlich

$$pdx = -n\ (a - x)^{n-1} dx - nx^{n-1} dx$$
$$(la - lx)^n + nx^{n-1}\ (la - lx)^{n-1}\ dx$$

 und

und dieſer Werth verſchwindet allerdinges, wenn man $x = a$ ſetzt; denn wenn auch $n = 1$ iſt, ſo wird doch $pdx = - dx + dx = 0$. Gehen wir alſo weiter fort, ſo erhalten wir

$$\frac{1}{2} qdx^2 = \frac{n(n-1)}{1.2}(a-x)^{n-2}dx^2 - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^n$$
$$+ \frac{n^2}{2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-1}$$
$$- \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-2}.$$

Iſt daher $n = 1$, ſo wird $\frac{1}{2} qdx^2 = \frac{dx^2}{2a}$, wenn man $x = a$ ſetzt. Auf ähnliche Art muß man, wenn $n = 2$ iſt, das Glied $\frac{1}{6} rdx^3$ u. ſ. w. finden. Leichter wird es daher immer ſeyn, wenn wir zu den erſten Gründen der Differenziation zurückkehren, und da, wenn man $x = a$ ſetzt, $y = 0$ wird, ſo bekommt man durch die Subſtitution $x + dx$ oder $a + dx$ für x

$y' = (-dx)^n - (a + dx)^n (la - l(a - l(a + dx))^n = y +$ weil $y = 0$ iſt. Nun iſt aber

$$l(a+dx) = la + \frac{dx}{a} - \frac{dx^2}{2a^2} + \frac{dx^3}{3a^3} - \&c.$$

und alſo $dy = (-dx)^n -$

$$(a^n + na^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.2.}a^{n-2}dx^2)(-\frac{dx}{a} + \frac{dx^2}{2a^2}$$
$$- \frac{dx^3}{3a^3})^n = \frac{n}{2a}(-dx)^{n+1}$$

Wenn alſo $x = a$ iſt, ſo iſt das geſuchte Differenzial

wenn	
$n = 1$	$dy = \frac{dx^2}{2a}$, wie vorhin
$n = 2$	$dy = \frac{2dx^3}{2a}$
$n = 3$	$dy = \frac{3dx^4}{2a}$
$n = 4$	$dy = \frac{4dx^5}{2a}$
ect.	etc.

Wenn daher n eine ungerade Zahl iſt, ſo wird die Function y in dem Falle $x = a$ ein Kleinſtes. Iſt aber n eine gerade Zahl, ſo iſt ſie weder ein Größtes noch ein Kleinſtes, und eben dieſes findet ſtatt, wenn n einen Bruch mit einem ungeraden Nenner bedeutet, ſo muß dx negativ genommen werden, damit man keine imaginäre Größen bekomme, und wegen der Zweydeutigkeit der Zeichen iſt die Function weder ein Größtes noch ein Kleinſtes.

Drit-

Drittes Exempel. Das Differenzial der Function $y = x^x$ für den Fall $x = \frac{1}{e}$ zu finden, wenn e die Zahl bedeutet, deren hyperboliſcher Logarithme $= 1$ iſt.

Da überhaupt $dx = x^x dx\,(lx + 1)$ iſt, ſo verſchwindet dieſes Differenzial in dem Falle $x = \frac{1}{e}$, oder $lx = -1$. Vergleicht man demnach dieſes Differenzial mit der allgemeinen Formel $p\,dx + \frac{1}{2} q dx^2 + \frac{1}{6} r dx^3 +$ etc. ſo wird $p = x^x\,(lx + 1)$ und $q = x^x\,(lx + 1)^2 + x^{x-1}$ und wenn man $x = \frac{1}{e}$, oder $lx = -1$ annimmt.

$$q = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{e-1}{e}} = e^{\frac{e-1}{e}}$$

Hiernach iſt das geſuchte Differenzial $dy = \frac{1}{2} e\,(e - y) :^{e} dx^2$, und die Function $y = x^x$ wird ein Kleinſtes, wenn man $x = \frac{1}{e}$ ſetzt.

Viertes Exempel. Das Differenzial der Function $y = x^{n} + e^{-x:x}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Da bey $x = 0$ auch $y = 0$ iſt, ſo wird, wenn man $0 + dx$ für x ſetzt, $y' = dy = dx^n + \frac{1}{e^{1:dx}}$. Nun haben wir geſehen, daß $\frac{1}{e^{1:dx}}$ der Poteſtät dx^∞ homogen iſt, und folglich gegen dx^n verſchwindet. Alſo iſt $dy = dx^n$.

18. Was bey den erſten Differenzialien in gewiſſen Fällen ſich ereignet, daß ſich nähmlich dieſelben nach der gewöhnlichen Methode nicht finden laſſen, das hat auch bey den zweyten und höhern Differenzialien ſtatt, wenn in dem vollſtändigen Differenzial-Ausdrucke $dy = pdx + \frac{1}{2} qdx^2 + \frac{1}{6} rdx^3 + \frac{1}{24} s\,dx^4 +$ etc. von den Größen r, q, s etc. einige entweder $= 0$ oder $= \infty$ werden. Da nähmlich

$ddy = qdx^2 + rdx^3 + \frac{7}{12} sdx^4 +$ etc. iſt: ſo wird in dem Falle, wenn $q = 0$ iſt, $ddy = rdx^3$, und verſchwindet alsdann auch r, ſo wird $ddy = \frac{7}{12} sdx^4$ u. ſ. f. Wird aber q oder r, oder s unendlich, ſo läßt ſich das zweyte Differenzial aus jener Reihe gar nicht finden, ſondern man muß zu den erſten Gründen der Differenziation zurück gehen. Man ſetzt nähmlich $x + dx$ für x, und ſucht y', dann $x + 2dx$ für x, um y'' zu erhalten. Iſt dies geſchehen, ſo iſt der wahre Werth des zweyten Differenzials

$$ddy = dy' - dy = y'' - 2y' + y.$$

Auf ähnliche Art findet man den wahren Werth des dritten Differenzials, wenn man noch $x + 3dx$ für x ſetzt, und dadurch y''' ſucht, indem $d^3y = y''' - 3y'' + 3y' - y$ iſt, u. ſ. f. Auch dieſes wollen wir durch einige Beyſpiele erläutern.

Erſtes Exempel. Das Differenzial der Function $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$ für den Fall $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ zu finden.

Sucht man das vollſtändige Differenzial von y aus der Formel
$$dy = p\,dx + \tfrac{1}{2}\,q\,dx^2 + \tfrac{1}{6}\,r\,dx^3 + \tfrac{1}{24}\,s\,dx^4 + \text{ect.}$$
ſo findet man für p, q, r, ect. folgende Werthe.

$$p = -\frac{4aax}{(aa + xx)^2};$$
$$q = -\frac{4a^4 + 12aaxx}{(aa + xx)^3}$$
$$r = \frac{48a^4x - 48aaxx}{(aa + xx)^4}$$

Da nun $ddy = q\,dx^2 + r\,dx^3 + \tfrac{1}{12}\,s\,dx^4 +$ ect. iſt, ſo wird dafür $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $q = 0$ und $r = \frac{27\sqrt{3}}{8a^3}$ iſt, das geſuchte Differenzial
$$dd = \frac{27dx^3\sqrt{3}}{8a^3}.$$

Zweytes Exempel. Das Differenzial der Function $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$ für den Fall $x = a$ zu finden.

Sucht man wie vorhin das vollſtändige Differenzial, ſo wird, da $d^3y = r\,dx^3 + \tfrac{3}{2}\,s\,dx^4$ iſt, wegen $r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa + xx)^4}$ für den Fall $x = a$, $r = 0$, und man muß daher zu dem Werthe s fortgehen. Dieſer iſt
$$s = \frac{48a^4 - 144aaxx}{(aa + xx)^4} - \frac{8x\,(48a^4x - 48aax^3)}{(aa + xx)^5}.$$
Setzt man demnach $x = a$, ſo wird $s = -\frac{96a^4}{24a^8} = -\frac{6}{a^4}$, und es iſt alſo für dieſen Fall $d^3y = -\frac{9dx^4}{a^4}$.

Drittes Exempel. Das Differenzial der in Anſehung des Grades unbeſtimmten Function; $y = ax^m + bx^n$, für den Fall $x = 0$ zu finden.

Setzt man nach und nach $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$, ect. für x, ſo erhält man folgende Werthe für y

$y' = a\,(x + dx)^m + b\,(x + dx)^n$

$y'' = a\,(x + 2dx)^m + b\,(x + 2dx)^n$

$y''' = a\,(x + 3dx)^m + b\,(x + 2dx)^n$ ect.

Setzt

Setzt man daher $x = 0$, ſo wird $y = 0$, und die Differenzialien werden,

$$dy = adx^m + bdx^n$$

$$ddy = (2^m - 2)\, adx^m + (2^n - 2)\, bdx^n$$

$$d^3y = (3^m - 3.2^m + 3)\, adx^m + (3^n - 3.2^n + 3)\, bdx^n$$

$$d^4y = (4^m - 4.3^m + 6.2^m - 4)\, adx^m + (4^m - 4.3^n + 6.2^n - 4)\, bdx^n$$

Iſt alſo der Exponent n gröſser als m, ſo verſchwinden die zweyten Glieder in dieſen Ausdrücken gegen die erſten. Gleichwohl muß man darauf Rückſicht nehmen, wenn n eine gebrochene Zahl iſt, damit man die Fälle, in welchen dieſe Differenzialien entweder imaginär werden oder beyde Zeichen haben, beſtimmen kann. Die weitere Auseinanderſetzung dieſer letztern Fälle aber muß der Lehre von den Curven vorbehalten bleiben.

Eulers Anleitung zur Differenzial-Rechnung 3r Th. S. 146.

Wie die Exponential-Functionen differenziirt werden, ſiehe logarithmiſche Linie 5.

A. Entwickelung der gebrochnen reellen Functionen.

1. Es iſt bereits oben im Artickel Function umzuformen gezeiget worden, wie man eine jede gebrochene Function in ſo viel Theile auflöſen kann, als der Nenner derſelben einfache Faktoren hat. Da aber hierbey eben dieſe einfachen Faktoren, die Nenner jener Partial-Brüche werden, und alſo dieſe Brüche, wenn die Faktoren, aus welchen ſie entſpringen, imaginär ſind, ebenfalls imaginär werden müſſen; ſo kann es in dieſem Falle von keinem Nutzen ſeyn, daß man einen reellen Bruch, in imaginäre auflößt. Da alſo (im Artickel: trinomiſche Faktoren zu erforſchen) gezeiget worden iſt, daß eine jede ganze Function, dergleichen der Nenner einer jeden gebrochenen Function iſt, ſo viel einfache imaginäre Faktoren ſie auch immer enthalten mag, dennoch in doppelte reelle Faktoren aufgelöſet werden kann: ſo kann man dadurch die imaginären Gröſsen bey der Auflöſung der gebrochnen Functionen vermeiden, wenn man dabey nicht die einfachen, ſondern die doppelten reellen Faktoren des Haupt-Nenners gebraucht.

2. Iſt daher die gebrochene Function $\frac{M}{N}$ gegeben, ſo ſuche man daraus auf die im Artickel, Functionen umzuformen, erklärte Art, ſo viel einfache Brüche, als der Nenner N einfache reelle Faktoren hat. Anſtatt der imaginären Faktoren aber nehme man den Ausdruck $pp - 2pqz \cos\phi + qqzz$ zum Faktor von N an, und da man bey dieſem Geſchäfte den Zähler und Nenner in entwickelter Geſtalt betrachten muß, ſo ſey der gegebene Bruch,

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}}{(pp - 2pqz \cos\phi + qqzz)(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{ect.})}$$

Ferner ſey der Partial-Bruch, der aus dem Faktor des Nenners $pp - 2pqz \cos\phi + qqzz$ entſtehet $= \frac{\mathfrak{A} + az}{pp - 2pqz \cos\phi + qqzz}$: denn da die veränderliche Gröſse z in Nenner zwey Dimenſionen hat, ſo kann ſie im Zähler wohl eine aber nicht mehr haben, weil ſonſt der Ausdruck eine ganze Function enthielte, welche man beſonders ſuchen muß.

3. Setzt man der Kürze wegen den Zähler $A + Bz^2 + Cz^2 + \text{etc.} = M$, und den zweyten Faktor des Nenners, $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \text{etc.} = Z$; den andern Partial-Bruch aber, der aus dem Faktor des Nenners Z entſpringt, $= \frac{Y}{Z}$: ſo iſt $Y = \frac{M + \mathfrak{A}Z - aZz}{pp - 2pqz \cdot \operatorname{coſ} \phi + qqzz}$, (*) und dieſer Ausdruck muß eine ganze Function von z, und alſo durch $pp - 2pqz \times \operatorname{coſ} \phi + qqzz$ theilbar ſeyn (**). Es muß daher $M - \mathfrak{A}Z - aZz$ verſchwinden, wenn man $pp - 2qpz \operatorname{coſ} \phi + qqzz = 0$ ſeyn läßt, d. h. wenn man ſowohl $z = \frac{p}{q}(\operatorname{coſ} \phi + \sqrt{-1} \operatorname{ſin} \phi)$ als $Z = \frac{p}{q}(\operatorname{coſ} \phi - \sqrt{-1} \cdot \operatorname{ſin} \phi)$ ſetzt (trinomiſche Faktoren 4), und ſetzt man $\frac{p}{q} = f$, ſo wird $z^n = f^n(\operatorname{coſ} n\phi \pm \sqrt{-1} \cdot \operatorname{ſin} n\phi)$ (trigonometriſche Größen nach Euler 8). Durch die Subſtitution dieſes doppelten Werthes von z erhält man daher eine zwiefache Gleichung, woraus man die unbekannten beſtändigen Größen $\mathfrak{A}$ und a beſtimmen kann.

*) Da $N = (pp - 2pqz, \operatorname{coſ}. \phi + qqzz) Z$ iſt, ſo iſt

$$\frac{M}{N} = \frac{\mathfrak{A} + az}{pp - 2pqz \operatorname{coſ} \phi + qqzz} + \frac{Y}{Z}$$

$$= \frac{M}{(pp - 2pqz \operatorname{coſ} \phi + qqzz) Z}, \text{ und folglich}$$

$$\frac{Y}{Z} = \frac{M - \mathfrak{A}Z - aZz}{(pp - 2pqz \operatorname{coſ} \phi + qqzz) Z} \text{ und}$$

$$Y = \frac{M - \mathfrak{A}Z - aZz}{pp - 2pqz \cdot \operatorname{coſ} \phi + qqzz}$$

(Man vergl. §. 2. Functionen gebr. umzuformen.)

**) Denn es iſt Y nach (§. 1. c) eine ganze Function, und folglich, weil

$$\frac{M - \mathfrak{A}Z - aZz}{pp - 2pqz. \operatorname{coſ} \phi + qqzz} = Y$$

iſt, auch $\frac{M - \mathfrak{A}Z - a\,Zz}{pp - 2pqz \operatorname{coſ} \phi + qqzz}$ und daher auch $M - \mathfrak{A}Z - a\,Zz$ durch $pp - 2pqz. \operatorname{coſ} \phi + qqzz$ theilbar, weil ſonſt das vorhergehende nicht ſtatt finden könnte

4 Subſtituirt man wirklich, ſo giebt die Gleichung $M = \mathfrak{A}Z + aZz$ (*), wenn man ſie entwickelt folgende doppelte Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} A + Bf \operatorname{coſ} \phi + Cff \operatorname{coſ} 2\phi + Df^3 \operatorname{coſ} 3\phi + \text{etc.} \\ \pm (Bf \operatorname{ſin} \phi + Cff \operatorname{ſin} 2\phi + Df^3 \operatorname{ſin} 3\phi + \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A} (\alpha + \beta f \operatorname{coſ} \phi + \gamma ff \operatorname{coſ} 2\phi + \delta f^3 \operatorname{coſ} 3\phi + \text{etc.}) \\ \pm \mathfrak{A} (\beta f \operatorname{ſin} \phi + \gamma ff \operatorname{ſin} 2\phi + \delta f^3 \operatorname{ſin} 3\phi + \text{etc.}) \sqrt{-1} \\ + a (\alpha f \operatorname{coſ} \phi + \beta ff \operatorname{coſ} 2\phi + \gamma f^3 \operatorname{coſ} 3\phi + \text{etc.}) \\ \pm a (\alpha f \operatorname{ſin} \phi + \beta ff \operatorname{ſin} 2\phi + \gamma f^3 \operatorname{ſin} 3\phi + \text{etc.}) \sqrt{-1} \end{array}\right.$$

Man ſetze die Rechnung abzukürzen

$$A + Bf \operatorname{coſ} \phi + Cff \operatorname{coſ} 2\phi + Df^3 \operatorname{coſ} 3\phi + \text{etc.} = \mathfrak{P}$$

$$Bf \operatorname{ſin} \phi + Cff \operatorname{ſin} 2\phi + Df^3 \operatorname{ſin} 3\phi + \text{etc.} = \mathfrak{p}$$

a +

$\alpha + \beta f \cos \phi + \gamma ff \cos 2\varphi + \delta f^3 \cos 3\phi + \text{etc.} = \mathfrak{Q}$
$\beta f \sin \phi + \gamma ff \sin 2\phi + \delta f^3 \sin 3\phi + \text{etc.} = q$
$\alpha f \cos \varphi + \beta ff \cos 2\varphi \;\gamma f^3 \cos 3\varphi + \text{etc.} = \mathfrak{R}$
$\alpha f \sin \varphi + \beta ff \sin 2\varphi \;\gamma f^3 \sin 3\phi + \text{etc.} = r$

ſo iſt $\mathfrak{P} \pm p\,\gamma - 1 = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} \pm \mathfrak{A}q\sqrt{-1} + a\mathfrak{R} \pm ar\sqrt{-1}$.

*) Man ſetzt nähmlich zuvörderſt wieder
$M = A + Bz + Cz^3 + Dz^3 + \text{etc.}$ und
$Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.}$;
und darauf ſubſtituirt man in dieſen Werthen für z^0, z', z^2, z_3, etc. die dafür aus $z^n = f^n(\cos n\phi \pm \sqrt{-1} \sin n\varphi)$ ſich ergebende Werthe.

5. Wegen der doppelten Zeichen erhält man hieraus die beyden Gleichungen

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + a\mathfrak{R}$$
$$p = \mathfrak{A}q + ar \; (*)$$

und hieraus bekommen die unbekannten Größen $\mathfrak{A}$ und a dieſe Beſtimmung.

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}r - p\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}r - q\mathfrak{R}}, \text{ und } a = \frac{\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q}}{q\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}r} \;**).$$

Wenn alſo der Bruch

$$\frac{M}{(pp - 2pqz \cos \varphi + qqzz)\,Z}$$

gegeben iſt, ſo findet man den daher entſtehenden Partialbruch

$$\frac{\mathfrak{A} + az}{pp - 2pqz \cos \phi + qqzz}$$

auf folgende Art. Man ſetzt $f = \frac{p}{q}$, und nachdem man die einzelnen Glieder entwickelt hat, ſo ſuchet man dadurch

daß man $z^n = f^n \cos n\varphi$ ſetzt, $M = \mathfrak{P}$
. . . . $z^n = f^n \sin n\varphi$ . . . $M = p$
. . . . $z^n = f^n \cos n\varphi$ . . . $Z = \mathfrak{Q}$
. . . . $z^n = f^n \sin n\phi$ . . . $Z = q$
. . . . $z^n = f^n \cos n\varphi$ . . . $zZ = \mathfrak{R}$
. . . . $z^n = f^n \sin n\varphi$ . . . $zZ = r$.

Hat man auf dieſe Art die Werthe, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, p, q, r gefunden, ſo iſt

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}r - p\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}r - q\mathfrak{R}} \text{ und } a = \frac{\mathfrak{P}p - q\mathfrak{Q}}{q\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}r} = \frac{p\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}q}{\mathfrak{Q}r - q\mathfrak{R}}$$

*) Es iſt nähmlich

$\mathfrak{P} + p\sqrt{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + \mathfrak{A}q\sqrt{-1} + a\mathfrak{R} + ar\sqrt{-1}$
$\mathfrak{P} - p\sqrt{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + \mathfrak{A}q\sqrt{-1} + a\mathfrak{R} - ar\sqrt{-1}$
folglich $2\mathfrak{P} = 2\mathfrak{A}\mathfrak{Q} + 2a\mathfrak{R}$, und $2p = 2\mathfrak{A}q + 2ar$

**) Der aus der zweyten Gleichung iſt, $a = \frac{p - \mathfrak{A}q}{r}$ und dieſer Werth giebt, wenn man ihn in die erſte Gleichung bringt, $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + \frac{p\mathfrak{R} - \mathfrak{A}q\mathfrak{R}}{r}$, oder $\mathfrak{P}r - p\mathfrak{R} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q}r - \mathfrak{A}q\mathfrak{R}$.

Ferne

Ferner iſt aus der erſten Gleichung

$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P} - a\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}}$ und bringt man dieſen Werth in die zweyte Gleichung,

ſo bekommt man $p = \frac{\mathfrak{P}q - aq\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}} + ar$, oder $\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q} = aq\,\mathfrak{R} - a\mathfrak{Q}\,r$.

Erſtes Exempel. Es ſey die gebrochne Function

$\frac{zz}{(1 - z + zz)(1 + z^4)}$ gegeben, um daraus den Partial-Bruch, der aus dem Faktor des Nenners, $1 - z + z^2$ entſtehet, zu finden, und dieſer Partial-Bruch ſey $= \frac{\mathfrak{A} + az}{1 - z + z^2}$. Vergleicht man dieſen Faktor $1 - z + zz$ mit der allgemeinen Form $pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz$, ſo findet man $p = 1$; $q = 1$; und $\cos.\phi = \frac{1}{2}$, und daraus wird $\phi = 60 = \frac{\pi}{3}$. Da nun $M = z^2$; $Z = 1 + z^4$, und $f = 1$ iſt; ſo iſt $\mathfrak{P} = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$; $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\mathfrak{Q} = 1 + \cos\frac{4}{3}\pi = \frac{1}{2}$; $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\mathfrak{R} = \cos - \frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} = 1;\ r = 0$$

hieraus findet man $\mathfrak{A} = -1$; und $a - 0$, und der geſuchte Bruch iſt daher $\frac{-1}{1 - z + zz}$. Das Compliment hievon iſt $\frac{1 + z + zz}{1 + z^4}$ (*) und da deſſen Nenner $1 + z^4$ die Faktoren $1 + z\sqrt{2} + zz$, und $1 - z\sqrt{2} + zz$ hat, ſo kann man dabey dieſe Entwickelung von neuen vornehmen. Es wird aber alsdann $\phi = \frac{\pi}{4}$ und f im erſten Falle $= -1$, und im letztern $+ 1$.

*) Denn wenn man die beyden Brüche $\frac{-1}{1 - z + z^2}$ und $\frac{1 + z + zz}{(1 - z + zz)(1 + z^4)}$ addirt, ſo erhält man zur Summe $\frac{zz}{(1 - z + zz)(1 + z^4)}$

Zweytes Exempel. Es ſey alſo der Bruch $\frac{1 + z + zz}{(1 + z\sqrt{2} + z^2)(1 - z\sqrt{2} + z^2)}$ gegeben, wo $M = 1 + zz$, und für den erſten Faktor $f = -1$; $\phi = \frac{\pi}{4}$ und $Z = 1 - z\sqrt{2} + zz$ iſt. Hieraus ergiebt ſich

$$\mathfrak{P} = 1 - \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$p = -\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \sqrt{2}.\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$q = +\sqrt{2}\,\text{ſin}\,\frac{\pi}{4} + \text{ſin}\,\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$\mathfrak{R} = -\,\text{coſ}\,\frac{\pi}{4}\;\sqrt{2}\,\text{coſ}\,\frac{2\pi}{4} - \text{coſ}\,\frac{3\pi}{4} = 0$$

$$r = -\,\text{ſin}\,\frac{\pi}{4} - \sqrt{3}\,\frac{2\pi}{4} - \text{ſin}\,\frac{3\pi}{4} = -2\sqrt{2};$$ wo denn ferner

$\mathfrak{Q}r - q\mathfrak{R} = 4\sqrt{2}$; $\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$ und $a = 0$ wird. Es erwächſt daher aus dem Faktor des Nenners $1 + z\sqrt{2} + zz$, dieſer Partial-Bruch $\frac{(\sqrt{2}-1);\,2\sqrt{2}}{1+z\sqrt{2}+zz}$ und aus dem andern Faktor erhält man auf eine ähnliche Art dieſen, $\frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1-z\sqrt{2}+zz}$. Folglich ſind die Partialbrüche, worin die anfänglich gegebene Function $\frac{zz}{(1-z+zz)\,(1+z^4)}$ aufgelöſet werden kann, $\frac{-1}{1-z+zz} + \frac{(\sqrt{2}-1):\,2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}+zz} + \frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1-z\sqrt{2}+zz}$.

Drittes Exempel. Es ſey der Bruch $\frac{1+2z+z}{(1-\frac{8}{5}z+zz)\,(1+2z+3zz)}$ gegeben. Setzt man hier den Bruch, der aus dem Faktor des Nenners, $1 - \frac{8}{5}z + zz$, entſpringt, $= \frac{\mathfrak{A}+az}{1-\frac{8}{5}z+zz}$, ſo wird $p = 1$; $q = 1$; und $\text{coſ}\,\varphi = \frac{4}{5}$; woraus $f = 1$; $M = 1 + 2z + zz$, und $Z = 1 + 2z + 3zz$ wird. Weil aber hier das Verhältniß des Winkels φ zum rechten Winkel nicht bekannt iſt, ſo muß man die Sinus und Coſinus ſeiner Vielfachen beſonders ſuchen. Da nun

$\text{coſ}\,\varphi = \frac{4}{5}$; ſo wird $\text{ſin}\,\varphi = \frac{3}{5}$

$\text{coſ}\,2\varphi = \frac{7}{25}$; $\text{ſin}\,2\varphi = \frac{24}{25}$

$\text{coſ}\,3\varphi = \frac{44}{125}$; $\text{ſin}\,3\varphi = \frac{117}{125}$; und alſo

$\mathfrak{P} = +\,2.\frac{4}{5} + \frac{7}{25} = \frac{72}{25}$

$p = 2.\frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{54}{25}$

$\mathfrak{Q} = +\,2.\frac{4}{5} + 3.\frac{7}{25} = \frac{86}{25}$

$q = 2.\frac{3}{5} + 3.\frac{24}{25} = \frac{102}{25}$

$\mathfrak{R} = \frac{\ }{5} + 2.\frac{7}{25} - 3.\frac{44}{125} = \frac{38}{125}$

$r = \frac{3}{5} + 2.\frac{24}{25} + 3.\frac{117}{125} = \frac{666}{125}$ und folglich

$\mathfrak{Q}r - q\mathfrak{R} = \frac{53400}{25.125} = \frac{2136}{125}$. Folglich iſt

$\mathfrak{A} = \frac{1836}{2136} = \frac{153}{178}$; und $a = -\frac{540}{2136} = -\frac{45}{178}$. Es iſt alſo der Bruch, welcher aus dem Faktor $1 - \frac{8}{5}z + zz$ erwächſt $\frac{9(17-5z):178}{1-\frac{8}{5}z+zz}$.

Sucht man auf eine ähnliche Art den Bruch, der zu dem andern Faktor ge-

hört, ſo wird $p = 1$; $q = -\sqrt{3}$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $f = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $M = 1 + 2z + zz$, und $Z = 1 - \frac{8}{5}z + zz$.

Aus $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ aber findet man

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2\varphi = -\frac{1}{3};\ \sin 2.\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos 3\varphi = -\frac{5}{3\sqrt{3}};\ \sin 3\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.$$ Folglich iſt

$$\mathfrak{P} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\mathfrak{p} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \frac{8}{5\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}.-\frac{1}{3} = \frac{64}{45}$$

$$\mathfrak{q} = +\frac{8}{5\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{34\sqrt{2}}{45}$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5.3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}.-\frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{135}$$

$$\mathfrak{r} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5.3}\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = -\frac{98\sqrt{2}}{135}$$

und alſo $\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = -\frac{712\sqrt{2}}{675}$, folglich

$\mathfrak{A} = \frac{100}{712} = \frac{25}{178}$; $\mathfrak{a} = \frac{540}{712} = \frac{135}{178}$. Die Partial-Brüche, worin der Bruch $\frac{1 + 2z + zz}{(1 - \frac{8}{5}z + zz)(1 + 2z + 3zz)}$ aufgelöſet werden kann, ſind demnach $\frac{9(17 - 5z) : 178}{1 - \frac{8}{5}z + zz} + \frac{5(5 + 27z) : 187}{1 + 2z + 3zz}$

6. Es können aber die Werthe der Buchſtaben $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$ beſtimmt werden. Denn da

$$\mathfrak{Q} = \alpha + \beta f.\cos\varphi + \gamma f^2.\cos 2\varphi + \delta f^3.\cos 3\varphi + \&c.$$

$$\mathfrak{q} = \beta f.\sin\varphi + \gamma f^2.\sin 2\varphi + \delta f^3.\sin 3\varphi + \&c.$$ iſt: ſo wird

$$\mathfrak{Q}\cos\varphi - \mathfrak{q}\sin\varphi = \alpha.\cos\varphi + \beta f.\cos 2\varphi + \gamma f^2.\cos 3\varphi + \&c.$$

und alſo $\mathfrak{R} = f(\mathfrak{Q}.\cos\varphi - \mathfrak{q}.\sin\varphi)$. Ferner iſt

$$\mathfrak{Q}.\sin\varphi + \mathfrak{q}.\cos\varphi = \alpha.\sin\varphi + \beta.f\sin 2\varphi + \gamma ff.\sin 3\varphi + \&c.$$

folglich $\mathfrak{r} = f(\mathfrak{Q}.\sin\varphi + \mathfrak{q}\cos\varphi)$. Hieraus fließt weiter

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = (\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + \mathfrak{q}\mathfrak{q})f.\sin\varphi$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})f\sin\varphi + (\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})f\cos\varphi.$$

Folg

Folglich iſt $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq}{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq} + \frac{\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$

$$\mathfrak{a} = - \frac{\mathfrak{P}q + p\mathfrak{Q}}{(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq)\, f.\, \sin\varphi}$$

Es entſteht alſo aus dem Factor des Nenners $pp - 2pqz.\cos\varphi + qqzz$ dieſer Partial-Bruch.

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)\, f.\, \sin\varphi + (\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})\, (f.\cos\varphi - z)}{(pp - 2pqz.\cos\varphi + qqzz)\, (\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq)\, f.\, \sin\varphi}$$

oder da $f = \frac{p}{q}$ iſt, dieſer:

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)\, p.\, \sin\varphi + (\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})\, (p.\cos\varphi - qz)}{(pp - 2pqz.\cos\varphi + qqzz)\, (\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq)\, d.\, \sin\varphi}$$

7. Dieſer Partial-Bruch entſpringt alſo aus dem Faktor $pp - 2pqz.\cos\varphi + qqzz$ des Nenners der Function $\frac{M}{(pp - 2pqz.\cos\varphi + qqzz)\, Z}$, und die Buchſtaben $\mathfrak{P}$, p, $\mathfrak{Q}$ und q werden auf folgende Art aus den Functionen M und Z gefunden. Dadurch, daß man $Z^n = \frac{p^n}{q^n} \cos n\varphi$ ſetzt, wird $M = \mathfrak{P}$ und $Z = q$; und dadurch, daß man $Z^n = \frac{p^n}{q^n}.\sin n\varphi$ ſetzt, wird $M = p$ und $Z = q$.

Es müſſen aber die Functionen M und Z vor dieſer Subſtitution entwickelt werden, ſo daß ſie dieſe Form erhalten:

$M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$

und $Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \&c.$

und dann wird

$$\mathfrak{P} = A + B\frac{p}{q}.\cos\varphi + C.\frac{p^2}{q^2}.\cos 2\varphi + D.\frac{p^3}{q^3}.\cos 3\varphi + \&c.$$

$$p = B.\frac{p}{q}.\sin\varphi + C.\frac{p^2}{q^2}.\sin 2\varphi + D.\frac{p^3}{q^3}.\sin 3\varphi + \&c.$$

$$\mathfrak{Q} = \alpha + \beta.\frac{p}{q}.\cos\varphi + \gamma.\frac{p^2}{q^2}.\cos 2\varphi + \delta.\frac{p^3}{q^3}.\cos 3\varphi + \&c.$$

$$q = \beta.\frac{p}{b}.\sin\varphi + \gamma.\frac{p^2}{q^2}\sin 2\varphi + \delta.\frac{p^3}{q^3}\sin 3\varphi + \&c.$$

8. Es erhellet indeß aus dem Vorhergehenden, daß dieſe Aufloͤſung nicht Statt finden kann, wenn die Function Z eben denſelben Faktor $pp - 2pqz.\cos\varphi + qqzz$ in ſich enthaͤlt. Denn in dieſem Falle wuͤrde Z in der Gleichung $M = \mathfrak{A}Z + \mathfrak{a}Zz$, wenn man darin $z^n = f^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}.$ ſin

ſin nφ) ſetzte, verſchwinden, und folglich nichts weiter geſchloſſen werden können.

Wenn daher der Nenner der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ den Faktor $(pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz)^2$, oder eine noch höhere Poteſtät enthält, ſo iſt ein anderer beſonderer Weg nöthig, um die Auflöſung zu Stande zu bringen. Es ſey alſo $N = (pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz)^2 Z$, und die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz)^2$ entſpringen, ſeyen

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{(pp-2pqz.\cos\phi+qqzz)^2}+\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z}{pp-2pqz.\cos.\phi\ qqzz},$$

wo folglich die beſtändigen Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$, zu beſtimmen ſind.

9. Dieß vorausgeſetzt, ſo muß der Ausdruck

$$\frac{M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z-(\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z)Z(pp-2pqz.\cos\phi+qqzz)}{(pp-2pqz.\cos\phi+qqzz)^2}$$

eine ganze Function, und alſo der Zähler durch den Nenner theilbar ſeyn. Es iſt alſo zuvörderſt der Ausdruck $M-\mathfrak{A}Z-\mathfrak{a}zZ$ durch $pp-2pqz.\cos\phi + qqzz$ theilbar. Da dieß der vorhergehende Fall iſt, ſo werden auch hier die Buchſtaben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ eben ſo wie vorhin beſtimmt. Wenn man daher

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\cos n\phi$ ſetzt, ſo wird $M = \mathfrak{P}$ und $Z = \mathfrak{N}$; und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\sin n\phi$ ſetzt, ſo wird $M = \mathfrak{p}$ und $Z = \mathfrak{n}$.

Iſt nun dieſes geſchehen, ſo wird nach der (6) gegebenen Regel

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{N}+\mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n}-\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}.\frac{\cos\phi}{\sin\phi}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{a} = -\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n}+\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}.\frac{q}{p.\sin\phi}.$$

10. Hat man auf dieſe Art $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ gefunden, ſo wird

$$\frac{M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z}{pp+2pqz.\cos\phi+qqzz}$$

eine ganze Function, welche wir $=P$ ſetzen wollen. Nun muß ferner $P-\mathfrak{B}Z-\mathfrak{b}zZ$ durch $pp-2pqz.\cos\phi+qqzz$ theilbar ſeyn; und da dieſer Ausdruck dem vorhergehenden ähnlich iſt, ſo kann man, wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\cos n\phi$ ſetzt, $P = \mathfrak{R}$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\sin n\phi$ ſetzt, $P = \mathfrak{r}$ nehmen und dann iſt

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N}+\mathfrak{r}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}-\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}.\frac{\cos\phi}{\sin\phi}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}+\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}.\frac{q}{p.\sin\phi}.$$

11. Hier-

11. Hieraus läßt ſich ſchon allgemein einſehen, wie man bey dieſer Auflöſung verfahren muß, wenn der Nenner der gegebenen Function $\frac{M}{N}$ den Faktor $(pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz)^k$ hat. Denn es ſey $N = (pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz)^k Z$, daß alſo dieſer Bruch

$$\frac{M}{(pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz)^k Z}$$

aufzulöſen iſt. Es gebe ferner der Faktor $(pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz)^k$ die Partial-Brüche,

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{(pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz)^k} + \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z}{(pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz)^{k-1}}$$

$$+ \frac{\mathfrak{C} + \mathfrak{c}z}{(pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz)^{k-2}} + \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{d}z}{(pp - 2pqz.\cos\phi + qbzz)^{k-3}} + \text{etc.}$$

Setzt man nun, wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\cos n\phi$ nimmt, $M = \mathfrak{M}$ und $Z = \mathfrak{N}$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\sin n\phi$ nimmt, $M = m$ und $Z = n$; ſo wird

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{N} + mn}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{\mathfrak{M}n - m\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2}.\frac{\cos\phi}{\sin\phi}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{a} = -\frac{\mathfrak{M}n + m\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{q}{p.\sin\phi}.$$

Nun ſey $\frac{M - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z)Z}{pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz} = P$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\cos n\phi$ ſetzt, $P = \mathfrak{P}$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\sin n\phi$ ſetzt, $P = p$; ſo iſt

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{N} + pn}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{\mathfrak{P}n - p\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2}.\frac{\cos\phi}{\sin\phi}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{P}n + p\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2}.\frac{q}{p.\sin\phi}.$$

Dann ſey $\frac{P - (\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z)Z}{pp - 2pqz.\cos\phi + qqzz} = Q$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\cos n\phi$ ſetzt, $Q = \mathfrak{Q}$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n} . \sin n\varphi$ ſetzt, $Q = q$; ſo iſt

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{N} + q\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n} - q\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} . \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{c} = - \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n} + q\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} . \frac{q}{p . \sin\varphi}.$$

Ferner ſey $\frac{Q - (\mathfrak{C} + \mathfrak{c}z) Z}{pp - 2pqz . \cos\varphi + qqzz} = R$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n} . \cos n\varphi$ ſetzt, $R = \mathfrak{R}$, wenn man aber

$z^n = \frac{p^n}{q^n} . \sin n\varphi$ ſetzt, $R = r$; ſo iſt

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N} + r\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n} - r\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} . \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \text{ und}$$

$$\mathfrak{d} = - \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n} + r\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} . \frac{q}{p . \sin\varphi}.$$

Auf dieſe Art muß man nun fortgehen, bis man den Zähler des letzten Bruchs, deſſen Nenner $pp - 2pqz . \cos\varphi + qqzz$ iſt, gefunden hat.

Exempel. Es ſey der Bruch $\frac{z - z^3}{(1 + zz)^4 + (1 + z^4)}$ gegeben, und die Partial-Brüche, welche aus dem Faktor des Nenners, $(1 + zz)^4$, entſtehen, ſeyn

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{(1 + zz)^4} + \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z}{(1 + zz)^3} + \frac{\mathfrak{C} + \mathfrak{c}z}{(1 + zz)^2} + \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{d}z}{1 + zz}.$$

Vergleicht man nun, ſo wird $p = 1$; $q = 1$; $\cos\varphi = 0$ und alſo $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Ferner iſt $M = z - z^3$, und $Z = 1 + z^4$. Hieraus ergiebt ſich $\mathfrak{M} = 0$; $\mathfrak{m} = 2$; $\mathfrak{N} = 2$; $\mathfrak{n} 0$; und $\sin\varphi = 1$; und es wird folglich $\mathfrak{A} = - \frac{4}{4} . 0 = 0$; und $\mathfrak{a} = 1$. Nunmehr iſt alſo $\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z = z$; und daher wird denn $P = \frac{z - z^3 - z - z^5}{2 + zz} = - z^3$, und $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{p} = 1$.

Hieraus erhält man $\mathfrak{B} = 0$; und $\mathfrak{b} = \frac{1}{2}$.

Folglich iſt $\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z = \frac{1}{2}z$; und $\mathfrak{Q} = \frac{- z^3 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^5}{1 + zz} = - \frac{1}{2}z$; und

$Q = \frac{- z^3 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^5}{1 + zz} = - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3$. Hieraus wird $\mathfrak{Q} = 0$, und $q = 0$; folglich $\mathfrak{C} = 0$; und $\mathfrak{c} = 0$.

Endlich iſt nun $R = - \frac{\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3}{1 + zz} = - \frac{1}{2}z$, woraus $\mathfrak{R} = 0$; und $r = - \frac{1}{2}$ folgt, ſo daß alſo

$\mathfrak{D} =$

$\mathfrak{D} = 0$, und $\mathfrak{d} = -\frac{1}{4}$ wird. Es ſind alſo die geſuchten Brüche

$$\frac{z}{(1 + zz)^4} + \frac{z}{2(1 + zz)^3} - \frac{z}{4(1 + zz)}.$$

Der Zähler des übrigen Bruches aber iſt $= S = \frac{R - (\mathfrak{D} + \mathfrak{d}z)Z}{1 + zz}$

$= -\frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^3$, und er ſelbſt wird alſo $= \frac{-z + z^3}{4(1 + z)^4}$ ſeyn.

12. Auf dieſe Weiſe findet man daher zugleich den Bruch des Complements, welcher, mit den gefundenen Brüchen zuſammen genommen, die gegebene gebrochene Function hervorbringt. Hat man nähmlich von dem Bruche $\frac{M}{(pp - 2pqz \cos\phi + qqzz)^{k}Z}$ alle Partial-Brüche gefunden, die aus dem Faktor $(pp - 2pqz \cos\phi + qqzz)^k$ entſpringen; ſo iſt, wenn man die Reihe der Werthe P, Q, R, S, T, welche man zur Findung jener Partial-Brüche ſuchen mußte, weiter fortſetzt, derjenige von den Werthen P, Q, R, S, T, welcher dem letzten, den man zur Findung der Zähler nöthig hatte, folgt, der Zähler des übrigen Bruchs mit dem Nenner Z. Iſt nähmlich $K = 1$, ſo iſt der übrige Bruch $\frac{P}{Z}$; iſt $K = 2$, ſo iſt derſelbe $\frac{Q}{Z}$; iſt $K = 3$; ſo iſt er $\frac{R}{Z}$ u. ſ. w. Hat man aber dieſen übrigen Bruch, deſſen Nenner Z iſt, gefunden, ſo kann man ihn vermittelſt der bisherigen Regeln weiter auflöſen.

Eulers Analyſis des unendl. I 220.

Functionen durch gebrochene Reihen zu entwickeln.

1. Da die gebrochnen und irrationalen Functionen von z nicht unter der Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ u. ſ. w. begriffen ſind, wenn die Anzahl der Glieder eine endliche Zahl iſt: ſo pfleget man ähnliche ins Unendliche fortlaufende Ausdrücke zu ſuchen, welche den Werth einer jeden gebrochnen und irrationalen Function darſtellen. Ja man iſt ſelbſt die Natur der transcendenten Functionen beſſer im Stande einzuſehen, wenn man ſie durch dergleichen ins unendliche fortlaufende Formeln ausdruckt. Denn ſo wie man die Natur einer Function am leichteſten erkennet, wenn man ſie nach den in ihr vorkommenden verſchiedenen Poteſtäten von z entwickelt, und alſo auf die Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ u. ſ. w. bringt; ſo iſt auch eben dieſe Form vor allen andern geſchickt, der Seele einen deutlichen Begriff von der Natur einer jeden andern Function zu ertheilen, wenn gleich die Anzahl der darinnen vorkommenden Glieder unendlich iſt. Es fällt aber in die Augen, daß keine andern, als blos die ganzen Functionen von z durch eine endliche Menge ſolcher Glieder, $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ u. ſ. w. ausgedruckt werden können: Denn ſollte das Gegentheil möglich ſeyn, ſo würden eben dadurch die Functionen zu ganzen Functionen. Und ſollte jemand daran zweifeln, ob man die übrigen Arten der Functionen, außer den ganzen durch eine unendliche Anzahl ſolcher Glieder ausdrücken könne; ſo wird die wirkliche Entwickelung ſolcher Functionen in dergleichen unendliche Reihen dieſen

Zwei-

Zweifel hinlänglich aus dem Wege räumen. Damit aber dieſe Entwickelung einen deſto größern Umfang erhalte, ſo müſſen außer den Poteſtäten von z, deren Exponent eine ganze Zahl iſt, auch alle übrigen Poteſtäten von z zugelaſſen werden. Auf dieſe Art leidet es gar keinen Zweifel, daß eine jede Function von z durch eine unendliche Reihe von dieſer Form $Az^{\alpha} + Bz^{\beta}$ Cz^{γ} Dz^{δ} + u. ſ. w. ausgedrückt werden kann, indem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. ſ. w. ganz allgemeine Zahlzeichen ſind, und man alſo dafür, was für eine Zahl man will, ſetzen kann.

Zuſatz zu I. Es kann beym erſten Anblick auffallen, wenn hier behauptet wird daß die Natur der gebrochnen und tranſcendenten Functionen leichter erkannt werden könne, wenn man dieſe Functionen in unendliche Reihen verwandele. Allein, wenn man unendliche, das heißt, ohne Ende fortlaufende Reihen unterſucht, ſo ſtellt man ſich, wie der Herr Hofrath Käſtner, nicht nur in ſeinen Betrachtungen über die Art, wie allgemeine Begriffe im göttlichen Verſtande ſind, Göttingen 1767, ſondern auch in der Vorrede zu ſeinen Anfangsgründen der Analyſis des Unendlichen bemerkt, nicht alle einzelne Glieder dieſer Reihen, ſondern nur das Geſetz vor, welches alle dieſe Glieder gemeinſchaftlich beobachten. Auch iſt es gar nicht nothwendig, daß jede unendliche Reihe eine unendliche Größe vorſtelle, es kann vielmehr die Größe die durch eine unendliche Reihe ausgedruckt wird, in ſehr enge Gränzen eingeſchloſſen ſeyn, ſo wie z. B. die Reihe, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ + etc. ohne Ende, nie = 1 werden kann. Dieſe Anmerkung hat ſchon Leibnitz in ſeiner Abhandlung: De vera proportione circuli ad quadratum circumſcriptum in numeris rationalibus in den Actis eruditorum vom Jahr 1682 gemacht.

2. Es iſt bekannt, daß man den Bruch $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ durch eine ohne Ende fortgehende Diviſion in eine unendliche Reihe verwandeln kann: $\frac{a}{\alpha} - \frac{\alpha\beta z}{a^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5}$ — &c. Da darinnen jedes Glied zu dem unmittelbar folgenden das beſtändige Verhältniß 1 : $\frac{\beta z}{\alpha}$ hat, ſo nennet man ſelbige eine geometriſche Reihe.

Man kann aber dieſe Reihe auch auf die Art finden, daß man ſie anfangs als unbekannt betrachtet: denn ſetzt man

$$\frac{a}{\alpha+\beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$$

und ſucht man um dieſe Gleichung wirklich hervorzubringen, die Coefficienten A, B, C, D, E u. ſ. f. ſo wird

$$a = (\alpha z + \beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$$

Multipliciret man nun wirklich, ſo bekömmt man

$$a = \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \&c.$$
$$+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Ez^4 + \&c.$$

Es muß alſo $a = \alpha A$, folglich $A = \frac{a}{\alpha}$ und der Coefficient einer jeden Poteſtät von z gleich Null geſetzt werden. Dies giebt folgende Gleichungen.

αB

$$\alpha B + \beta A = 0$$
$$\alpha C + \beta B = 0$$
$$\alpha D + \beta C = 0$$
$$\alpha E + \beta D = 0 \text{ u. ſ. f.}$$

Kennet man alſo irgend einen von den Coefficienten, ſo läßt ſich daraus der folgende leicht finden. Denn ſetzt man den Coefficienten irgend eines Gliedes = P, und den Coefficienten das unmittelbar darauf folgenden Gliedes = Q; ſo iſt $\alpha Q + \beta P = 0$ und folglich $Q = -\frac{\beta P}{\alpha}$. Da alſo das erſte Glied A beſtimmt und $= \frac{a}{\alpha}$ iſt, ſo findet man daraus die folgenden Größen B, C, D u. ſ. w, eben ſo wie ſie ſich aus der Diviſion ergeben. Uebrigens ſieht man ohne Mühe, daß der Coefficient von z^n in der gefundenen unendlichen Reihe $= \pm \frac{a\beta^n}{\alpha^{n+1}}$ iſt, wobey das Zeichen + alsdann ſtatt findet, wenn n eine gerade, — aber, wenn n eine ungerade Zahl iſt; oder mit andern Worten: der Coefficient iſt allezeit

$$= \frac{a}{\alpha}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n$$

Zuſatz zu 2. Daß, wenn

$$\begin{aligned} a = \alpha A &+ \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \&c. \\ &+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \&c. \end{aligned}$$

iſt, auch $a = \alpha A$, und $\alpha B + \beta A$, ſo wie auch die übrigen Coefficienten einer jeden Poteſtät von z, = 0 ſeyn müſſe, läßt ſich auf folgende Art zeigen. Da z eine veränderliche Größe iſt, ſo muß die angeführte Gleichung, wenn ſie überhaupt richtig ſeyn ſoll, ebenfalls für jeden beſtimmten Werth von z wahr ſeyn, und es iſt daher alles das ſtreng und allezeit richtig, ohne welches dieſe Gleichung bey einem beſtimmten Werthe von z nicht beſtehen kann. Nun kann dieſelbe, wenn man $z = 0$ ſetzt, nicht anders beſtehen, als wenn $a = \alpha A$ iſt, folglich iſt $a = \alpha A$. Ferner kann, da $a = \alpha A$, und alſo

$$0 = \begin{aligned} &\alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \&c. \\ &\beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \&c. \end{aligned}$$

ſeyn muß, die obige Gleichung ebenfalls nicht beſtehen, wofern nicht $\alpha B - \beta A = \alpha C + \beta B = \alpha D + \beta C = \alpha E + \beta D = 0$ iſt, &c. und es iſt daher auch dieſes richtig. Auf eine ähnliche Art kann man bey andern ähnlichen Fällen verfahren, oder auch die Beweisart brauchen, die im Artickel Reihen wiederkehrende § 4 iſt gebraucht worden.

3. Auf eine ähnliche Art kann der Bruch $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$ durch eine ohne Ende fortlaufende Diviſion in eine unendliche Reihe verwandelt werden.

Da inzwiſchen dieſe Diviſion mühſam iſt, und man dabey die Natur der gefundenen unendlichen Reihe nicht ſo leicht überſiehet: ſo iſt es vortheilhafter, die geſuchte Reihe willkührlich anzunehmen, und ſie dann auf eben die Art wie vorhin zu beſtimmen. Es ſey alſo

$$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma zz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$$

Multipliciret man hier auf beyden Seiten, durch $\alpha + \beta z + \gamma zz$; ſo erhält man $a + bz =$

$$\begin{aligned} &\alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \&c. \\ &\quad + \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \&c. \\ &\qquad + \gamma Az^2 + \gamma\beta z^3 + \gamma Cz^4 + \&c. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt ſich $\alpha A = a$; $\beta B + \beta A = b$; und folglich iſt $A = \frac{a}{\alpha}$, und $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{\alpha\beta}{\alpha^2}$. Die übrigen Buchſtaben erhalten ihre Beſtimmung aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\alpha C + \beta B + \gamma A = 0 \\ &\alpha D + \beta C + \gamma B = 0 \\ &\alpha E + \beta D + \gamma C = 0 \\ &\alpha F + \beta E + \gamma D = 0 \text{ u. ſ. w.} \end{aligned}$$

Man findet hier alſo aus den Coefficienten jeder zwey unmittelbar auf einander folgenden Glieder den Coefficienten des nächſten Gliedes. Sind z. B. die Coefficienten zweyer unmittelbar auf einander folgenden Glieder P und Q, und der Coefficient des nächſten Gliedes R: ſo iſt $\alpha R + \beta Q + \gamma P = 0$, oder $R = \frac{-\beta Q - \gamma P}{\alpha}$; da nun die beyden erſten Buchſtaben A und B bereits bekannt ſind, ſo findet man aus ihnen nach und nach alle folgenden C, D, E, F u ſ. w. und auf dieſe Weiſe erhält man $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \,\&c. = \frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$

Exempel. Es ſey der Bruch $\frac{1+2z}{1-z-z^2}$ gegeben, und ihm werde die Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$ gleichgeſetzt. Alsdann iſt, da $a = 1$ $b = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, und $\gamma = -1$ iſt, $A = 1$, $B = 3$; und folglich

$$\begin{aligned} C &= B + A \\ D &= C + B \\ E &= D + C \\ F &= E + D \\ &\text{u. ſ. w} \end{aligned}$$

Ein jeder Coefficient iſt alſo die Summe der beyden vorhergehenden; und kennt man daher die Coefficienten zweyer unmittelbar auf einander folgenden Glieder P und Q, ſo iſt der nächſte $R = P + Q$. Da nun die beyden erſten Coefficienten A und B bekannt ſind, ſo giebt der Bruch $\frac{1+2z}{1-z-z^2}$ folgende unendliche Reihe: $1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5$ u. ſ. w. die man ohne Mühe weiter fortſetzen kann.

4. Hieraus iſt man bereits im Stande, die Natur der unendlichen Reihen, worein gebrochne Functionen verwandelt werden können, zu begreifen. Es findet nähmlich bey denſelben ein ſolches Geſetz ſtatt, daß ein jedes

ihrer Glieder aus einem oder einigen von der vorhergehenden gefunden werden kann. Iſt z. B. der Nenner des gegebenen Bruchs $= \alpha + \beta z$, und ſetzt man die unendliche Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + \&c.$; ſo wird jeder Coefficient Q aus den unmittelbar vor ihm hergehenden allein auf die Art beſtimmt daß $\alpha Q + \beta P = 0$ wird. Beſtände der Nenner aus drey Theilen, $\alpha + \beta z + \gamma zz$; ſo würde jeder Coefficient, in der unendlichen Reihe, R, aus den beyden vorhergehenden gefunden werden, wenn man $\alpha R + \beta Q + \gamma P = 0$ ſetzte. Wäre der Nenner viertheilig, $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$; ſo würde jeder Coefficient in der unendlichen Reihe, S, erhalten werden, wenn man ihn ſo annähme, daß $\alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P = 0$ würde; und ſo gehet dies immer weiter fort. Es wird dahero in dieſen unendlichen Reihen, jedes Glied aus einem oder einigen von den unmittelbar vorhergehenden Gliedern, nach einem gewiſſen beſtändigen Geſetze beſtimmt, und dieſes Geſetze läßt ſich aus dem Nenner des Bruchs, der in eine unendliche Reihe verwandelt werden ſoll, ohne Mühe erkennen. Man nennt aber dieſe Reihen mit dem berühmten Moivre, der ſich mit der Unterſuchung derſelben vorzüglich beſchäftiget hat, wiederkehrende Reihen, weil man bey denſelben immer zu den vorhergehenden Gliedern zurückkehren muß, wenn man die folgenden beſtimmen will.

5. Es iſt aber zur Erhaltung ſolcher Reihen nothwendig, daß der beſtändige Theil des Nenners nicht $= 0$ ſey: denn da das erſte Glied derſelben $A = \frac{a}{\alpha}$ (2. 3) iſt, ſo würde nicht nur dieſes Glied, ſondern auch alle folgenden unendlich werden, wenn $\alpha = 0$ wäre. Dieſen Fall alſo ausgenommen, der nachhero betrachtet werden ſoll, ſo läßt ſich jede gebrochne Function, die in eine unendliche Reihe verwandelt werden ſoll, auf dieſe Form bringen.

$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \&c.}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \&c.}$ wo das erſte Glied des Nenners $= 1$ geſetzt worden iſt, weil ſich auf dieſe Art alle Brüche ausdrücken laſſen, ſobald das gedachte Glied nicht $= 0$ iſt; die übrigen Theile des Nenners haben deswegen alle das Zeichen —, damit alle Glieder der Reihe poſitiv werden. Denn ſetzt man die daraus entſpringende Reihe $= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$ ſo werden die Coefficienten auf die Art beſtimmt, daß

$$A = a$$
$$B = \alpha A + b$$
$$C = \alpha B + \beta A + c$$
$$D = \alpha C + \beta B + \gamma A + d$$
$$E = \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e \text{ u. ſ. w.}$$

iſt. Ein jeder Coefficient iſt alſo ein Aggregat des Vielfachen eines oder mehrerer vorhergehenden Coefficienten, und einer gewiſſen Zahl, welche der Zähler an die Hand giebt. Wenn indeß der Zähler nicht aus einer unendlichen Menge von Theilen beſteht, ſo hört das Hinzukommen dieſer Zahl bald auf, und dann wird jeder folgende Coefficient nach einem beſtändigen Geſetze blos aus den vorhergehenden Coefficienten beſtimmt. Damit nun die Folge unter den Gliedern der Reihe ununterbrochen fortgehe; ſo muß man zu der gegenwärtigen Verwandlung ächte gebrochene Functionen nehmen; denn bey den

 unäch-

unächten gebrochenen Functionen ändert die darin enthaltene ganze Function in den Gliedern, in welche ſie kommt, das Fortſchreiten der Reihe. So giebt z. B. der unächte Bruch $\frac{1 + 2z - z^3}{1 - z - zz}$ dieſe Reihe: $1 + 3z + 4zz + 6z^3 + 10z^4 + 16z^5 + 26z^6 + 42z^7 +$ u. ſ. f.; es macht aber das vierte Glied $6z^3$ eine Ausnahme von der Regel, nach welcher jeder Coefficient die Summe der beyden vorhergehenden iſt.

6. Unter den wiederkehrenden Reihen, die man durch die bisher beſchriebene Entwickelung der Functionen erhält, verdienen diejenigen, die aus Brüchen entſpringen, deren Nenner eine Poteſtät iſt, eine beſondere Betrachtung. So findet man z. B. wenn man den Bruch $\frac{a + bz}{(1 - \alpha z)^2}$ in eine ſolche Reihe auflöſet, dieſe:

$$a + 2\alpha az + 3\alpha^2 az^2 + 4\alpha^3 az^3 + 5\alpha^4 az^4 + \&c.$$
$$+ b + 2\alpha b + 3\alpha^2 b + 4\alpha^3 b + \&c.$$

und der Coefficient von der Poteſtät z^n iſt $(n+1)\alpha^n a + n\alpha^{n-1} b$. Es iſt indeß auch dieſe Reihe eine wiederkehrende, weil darin ein jedes Glied durch die beyden vorhergehenden beſtimmt wird; und man erkennet das Geſetz, nach welchem ſolches geſchiehet, aus dem entwickelten Nenner, der $1 - 2\alpha z + \alpha\alpha zz$ iſt. Setzt man $\alpha = 1$ und $z = 1$; ſo geht die Reihe in eine allgemeine arithmetiſche Progreſſion, $a + (2a + b) + (3a + 2b) + (4a + 3b) +$ u. ſ. f. über, deren Differenzen unveränderlich oder einander gleich ſind. Es iſt daher eine jede arithmetiſche Progreſſion eine wiederkehrende Reihe. Denn drückt man dieſelbe auf dieſe Art aus: $A + B + C + D + E + F$ &c. ſo iſt $C = 2B - A$; $D = 2C - B$; $E = 2D - C$; u. ſ. f.

7. Ferner wird der Bruch $\frac{a + bz + czz}{(1 - \alpha)^3}$, da $\frac{1}{(1 - \alpha z)^3} =$

$(1 - \alpha z)^{-3} = 1 + 3\alpha z + 6\alpha^2 z^2 + 10\alpha^3 z^3 + 15\alpha^4 z^4 +$ u. ſ. f. iſt, in dieſe unendliche Reihe verwandelt:

$$a + 3\alpha az + 6\alpha^2 az^2 + 10\alpha^3 az^3 + 15\alpha^4 az^4 + \text{u. ſ. f.}$$
$$+ b + 3\alpha b + 6\alpha^2 b + 10\alpha^3 b + \ldots$$
$$+ c + 3\alpha c + 6\alpha^2 c + \ldots$$

worin der Coefficient der Poteſtät $z^n = \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2.} \alpha^n a + \frac{n(n+1)}{1.\ 2.} a^{n-1} b + \frac{(n-1)n}{1.\ 2.} \alpha^{n-2} c$ iſt. Setzt man aber $a = 1$, und $z = 1$; ſo geht dieſe Reihe in eine allgemeine Progreſſion der zweyten Ordnung über, deren zweyte Differenzen unveränderlich ſind. Es bezeichne $A + B + C + D + E$ &c. eine ſolche Progreſſion, ſo wird dieſelbe zugleich eine wiederkehrende Reihe ſeyn, worin jedes Glied aus den drey vorhergehenden auf die Art beſtimmt wird, daß $D = 3C - 3B + A$; $E = 3D - 3C + B$; $F = 3E - 2D + C$; u. ſ. f. iſt. Da in einer arithmetiſchen Progreſſion die zweyten Differenzen ebenfalls einander gleich ſind, indem dieſelben $= 0$ werden: ſo kommt dieſe Eigenſchaft auch den arithmetiſchen Progreſſionen zu.

S.

8. Auf eine ähnliche Art giebt der Bruch $\frac{a+bz+czz+dz^3}{(1-\alpha z)^4}$ eine unendliche Reihe, in welcher die Poteſtät z^n den Coefficienten

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\;\;2.\;\;3.}\alpha^n a + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\;\;2.\;\;3.}\alpha^{n-1} b$$

$$+\frac{(n-1)\,n\,(n+3)}{1.\;\;2.\;\;3.}\alpha^{n-2} c + \frac{(n-2)(n-1)n}{1.\;\;2.\;\;3.}\alpha^{n-3} d$$ hat. Setzt

Setzt man daher $\alpha = 1$, und $z = 1$; ſo begreift dieſe Reihe alle algebraiſche Progreſſionen der dritten Ordnung, deren dritte Differenzen unveränderlich ſind, unter ſich. Alle Progreſſionen von dieſer Ordnung, dergleichen hier wieder $A + B + C + D + E + F +$ u. ſ. f. vorſtellen mag, ſind daher zugleich wiederkehrende Reihen, die aus dem Nenner $1 - 4z + 6zz - 4z^3 + z^4$ entſpringen. Es iſt folglich $E = 4D - 6C + 4B - A$; $F = 4E - 6D + 4C - B$; u. ſ. f., und dieſe Eigenſchaft kommt zugleich allen Progreſſionen der niedern Ordnungen zu.

9. Auf dieſe Art läßt ſich zeigen, daß alle algebraiſche Progreſſionen einer jeden Ordnung, welche zuletzt auf unveränderliche Differenzen führen, wiederkehrende Reihen ſind, und daß das Geſetz, nach welchem jedes Glied aus den vorhergehenden gemacht wird, durch den Nenner $(1 - z)^n$ gegeben wird, wobey n eine größere Zahl iſt, als diejenige, welche die Ordnung der Progreſſion anzeigt. Da alſo $a^m + (a+b)^m + (a+2b)^m + (a+3b)^m +$ u. ſ. w. eine Progreſſion von der Ordnung m darſtellt: ſo iſt wegen der Natur der wiederkehrenden Reihen

$$0 = a^m - \frac{n}{1}(a+b)^m + \frac{n(n+1)}{1.\;\;2.}(a+2b)^m$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;\;2.\;\;3.}(a+3b)^m + \ldots \pm \frac{n}{1}(a + (n-1)b)^m$$

$\mp (a + nb)^m$: wo die obern Zeichen gelten, wenn n eine gerade, die untern aber, wenn n eine ungerade Zahl iſt. Dieſe Gleichung iſt allgemein wahr, wenn n eine ganze Zahl und größer als m iſt. Hieraus läßt ſich beurtheilen, von was für einem weiten Umfange die Lehre von den wiederkehrenden Reihen iſt.

10. Wenn der Nenner eine Poteſtät, nicht einer zweytheiligen, ſondern einer vieltheiligen Wurzel iſt: ſo läßt ſich die Natur der daraus entſtehenden wiederkehrenden Reihe auch auf eine andere Art erklären. Es ſey nähmlich der Bruch $\frac{1}{(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\text{etc.})^{m+1}}$ gegeben; ſo iſt die daher entſpringende unendliche Reihe

$$1 + \frac{(m+1)}{1}\alpha z + \frac{(m+1)(m+2)}{1.\;\;2.}\alpha^2 \quad + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.\;\;2.\;\;3.}\alpha^3$$
$$z^2$$
$$+\frac{(m+1)}{1}\beta + \frac{(m+1)(m+2)}{1.\;\;2.}2\alpha\beta z^3 + \&c.$$
$$+\frac{(m+1)}{1}\gamma$$

 Um

Um die Natur dieſer Reihe deſto beſſer einzuſehen, drücke man ſie durch allgemeine Buchſtaben aus. Man erhält alsdann

$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \&c.$

und ein jeder Coefficient N wird auf die Art aus ſo viel vorhergehenden, als Buchſtaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. ſ. f. da ſind, beſtimmt, daß N

$$\frac{m+n}{n}\alpha M + \frac{2m+n}{n}\beta L + \frac{3m+n}{n}\gamma K + \frac{4m+n}{n}\delta I + \&c. \text{ iſt.}$$

Ob nun gleich hier das Geſetz der Fortſchreitung nicht beſtändig iſt, ſondern von dem Exponenten der Poteſtät z abhängt; ſo richtet ſich doch gleichwohl eben dieſe Reihe nach einem andern beſtändigen Geſetze, welches man aus dem entwickelten Nenner findet, und welches der Natur der wiederkehrenden Reihen gemäß iſt. Jenes nicht beſtändige Geſetz hat aber nur alsdann ſtatt, wenn der Zähler des Bruchs die Einheit oder eine beſtändige Größe iſt; denn wenn er zugleich Poteſtäten von z enthält, ſo wird daſſelbe noch viel zuſammengeſetzter. Dies wird ſich nach der Erklärung der Anfangsgründe der Differenzial-Rechnung mit größerer Leichtigkeit zeigen laſſen.

11. Bisher haben wir angenommen, daß der erſte und beſtändige Theil des Nenners nicht = o ſey; und haben an ſeiner Stelle die Einheit geſetzt. Nun wollen wir unterſuchen, was man für Reihen erhält, wenn das beſtändige Glied des Nenners verſchwindet. In dieſem Falle hat die gebrochene Function folgende Form: $\frac{a+bz+czz+\&c}{z(1-\alpha z-\beta zz-\&c.)}$

Läßt man hier den Faktor des Nenners z aus der Acht, ſo giebt der Bruch, $\frac{a+bz+czz+\&c.}{1-\alpha z-\beta zz-\&c.}$ der dann übrig bleibt, die Reihe $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\&c.$ und iſt offenbar, daß $\frac{a+bz+cz\&c.}{z(1-\alpha z-\beta zz-\gamma z^3-\&c.)}$ $= \frac{A}{z} + B + Cz + Dz^2 + Ez^3 + \&c.$ ſeyn werde. Auf ähnliche Art wird

$$\frac{1-\alpha z-\beta z^2-\&c.}{z^2(a+bz+cz^2+\&c.)} = \frac{A}{zz} + \frac{B}{z} + C + Dz + Ez^2 + \&c. \text{ und}$$

überhaupt iſt $\frac{a+bz+cz^2+\&c.}{z^m(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\&c)} = \frac{A}{z^m} + \frac{B}{z^{m-1}} + \frac{C}{z^{m-2}} + \frac{D}{z^{m-3}} + \&c.$ m mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will.

12. Da man durch die Subſtitution eine andere veränderliche Größe x anſtatt der z in die gebrochenen Functionen einführen, und alſo jede gebrochene Function auf unzählige Arten ausdrucken kann: ſo kann man auch eine und dieſelbe gebrochene Function auf unendlich viele Arten durch wiederkehrende Reihen darſtellen. Iſt z. B. der Bruch $y = \frac{1+z}{1-z-zz}$ gegeben, wo

alſo

alſo $y = 1 + 2z + 3z^2 + 5z^3 + 8z^4 + \&c.$ wird: ſo erhält man, wenn man $z = \frac{1}{x}$ ſetzt, $y = \frac{xx + x}{xx - x - 1} = \frac{-x(1+x)}{1+x-xx}$; und da $\frac{1+x}{1+x-xx}$ $= 1 + 0x + xx - x^3 + 2x^4 - 3x^5 + 5x^6 - \&c.$ ſo wird nun $y = -x - 0x^2 - x^3 + x^4 - 2x^5 + 3x^6 - 5x^7 + \&c.$ Setzt man ferner $Z = \frac{1-x}{1-x}$, ſo wird $y = \frac{-2-2x}{1-4x-x^2}$ und daraus $y = -2 - 10x - 42xx - 178x^3 - 754x^4 - \&c.$ und auf dieſe Weiſe laſſen ſich für y unzählige wiederkehrende Reihen finden. —

Euler Anal. des Unendl. 1 B S. 68. d. Ub.

Zuſatz zu 6. 1. Dieſer und die folgenden §§ ſetzen den binomiſchen Lehrſatz in ſeinem ganzen Umfange, oder den Satz voraus, daß

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 + \&c.$$

ſey, nicht nur, wenn n eine ganze poſitive, ſondern auch, wenn es eine ganze negative, und auch, wenn es eine gebrochene, poſitive oder negative, Zahl bedeutet. Da dieſer Lehrſatz in den Anfangsgründen der gemeinen Algebra gewöhnlich nur für den Fall bewieſen wird, wenn n eine ganze poſitive Zahl iſt, ſo wird die Mittheilung des Euleriſchen Beweiſes für die übrigen Fälle in dem neunzehnten Bande der neuen Commentarien der Petersburgiſchen Akademie der Wiſſenſchaften vom Jahr 1774 nicht überflüßig ſeyn. Die Abhandlung, woraus das folgende genommen iſt, führt den Titel: Demonſtratio theorematis Newtoniani de evolutione poteſtatum binomii pro caſibus, quibus exponentes uon ſunt numeri integri, und fängt S. 103. an.

2. Vorläufig ſchickt Euler darin zuförderſt einiges über die Nothwendigkeit des Beweiſes des binomiſchen Lehrſatzes für die Fälle, wenn n keine ganze poſitive Zahl iſt, voraus. Dieſe Nothwendigkeit erhellet unter andern daraus, weil es ähnliche Sätze giebt, z. B.

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \&c.$$

welche nur in den Fällen wahr ſind, wenn n eine ganze poſitive Zahl bedeutet. Ferner gedenket er des Beweiſes, den der Staatsrath Aepinus im achten Bande der neuen Commentarien der Petersburgiſchen Akademie der Wiſſenſchaften vom Jahr 1763 gegeben hat, und bemerkt darauf, daß man, um den binomiſchen Lehrſatz in ſeinem ganzen Umfange zu beweiſen, nur nöthig habe zu zeigen, daß für jeden Werth für n

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2}{2} x^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^3 + \text{etc.}$$

ſey, weil nähmlich $(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$ iſt, und es alſo nur auf

die

die Entwickelung des Ausdrucks $(1+\frac{b}{a})^n$ ankommt, der ſich, wenn man $\frac{b}{a} = x$ ſetzt, in $(1+x)^n$ verwandelt.

Nach dieſen vorläufigen Sätzen iſt der Beweis des binonimiſchen Lehrſatzes ſelbſt folgender.

3. Es ſey $[n] = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} x^2 + \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} x^3$ + &c. ſo iſt, wenn n eine ganze poſitive Zahl bedeutet, $[n] = (1+x)^n$

Dieſes wird aus den Anfangsgründen der gemeinen Algebra vorausgeſetzt, und kann daraus auch allerdings mit Recht vorausgeſetzt werden. Ferner ſey $[m] = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m}{1} . \frac{m-1}{2} x^2 + \frac{m}{1} . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} x^3$ + etc.
und alſo $[m] . [n] = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5$ + &c. wenn die Buchſtaben A, B, C, D, E &c. gehörig beſtimmt werden.

4. Um die Buchſtaben A, B, C, D, ect. zu beſtimmen, müßte man eigentlich die beyden durch die unbekannten Größen [m] und [n] ausgedruckten Reihen mit einander multipliciren, und das Produkt mit der Reihe $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$ + ect. vergleichen. Allein es iſt auch ohne daß man ſolches wirklich thut, nicht ſchwer, ſich davon zu überzeugen, einmal, daß die Buchſtaben A, B, C, D, ect. durch die beyden Buchſtaben m und n beſtimmt werden, und zweytens, daß die Art, wie ſolches geſchiehet, ſie mag auch ſeyn, welche ſie will, keinesweges von der Beſchaffenheit der Buchſtaben m und n abhange, und alſo immer dieſelbe ſeyn werde, es mögen nun dieſe Buchſtaben ganze oder gebrochene, poſitive oder negative Zahlen bedeuten. Und dieſes iſt zu der gegenwärtigen Abſicht hinlänglich.

5. Denn da der binomiſche Lehrſatz für den Fall, wenn n eine ganze poſitive Zahl iſt, in der gemeinen Algebra aus der Lehre von den Combinationen hinlänglich bewieſen, und alſo für dieſen Fall als ausgemacht vorausgeſetzt werden kann: ſo iſt daher klar, daß, wenn m und n ganze poſitive Zahlen bedeuten,

$$[m] = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m}{1} . \frac{m-1}{2} x^2 + \frac{m}{1} . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} x^3 + \text{ect.} = (1+x)^m$$ und

$$[n] = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} x^2 + \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} x^3 + \text{ect} = (1+x)^n$$ und folglich

$$[m] . [n] = (1+x)^{m+n} = [m+n] = [r] = 1 + \frac{r}{1} x + \frac{r}{1} . \frac{r-1}{2} x^2 + \frac{r}{1} . \frac{r-1}{2} . \frac{r-2}{3} x^3 + \text{ect.}$$ iſt, wenn man $m + n = r$ ſetzt. Da nun hieraus

$$A = \frac{r}{1}$$

$$B = \frac{r}{1} . \frac{r-1}{2}$$

C

$$C = \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3}$$

$$D = \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r-3}{4} \text{ ect.}$$

wird, und dieſe Buchſtaben aus den Buchſtaben m und n, was man ſich hierunter auch für Zahlen gedenken mag, nach Abſatz 4 doch immer auf eine und dieſelbe Art beſtimmt werden: ſo erhellet nunmehr, daß für jeden Werth von m und n allemal $[m].[n] = [m+n]$ iſt.

6. Da alſo, was auch m und n für Zahlen bedeuten, allemal $[m].[n] = [m+n]$ iſt, ſo iſt ferner, und zwar auch für jeden Werth von m, n, p, q ect.

$$[m].[n].[p] = [m+n+p]$$

$$[m].[n].[p].[q] = [m+n+p+q] \text{ ect.}$$

und, da man dabey auch $m = n = p = q$ ect. annehmen kann, ebenfalls $[m]^2 = [2m]$; $[m]^3 = [3m]$; $[m]^4 = [4m]$; ect. und überhaupt

$[m]^a = [am]$ wenn a irgend eine ganze poſitive Zahl bedeutet.

7. Nun ſey i irgend eine ganze poſitive Zahl, und dabey ſey zugleich $am = i$, und folglich $m = \frac{i}{a}$. Hier fließt aus der letzten Formel des vorhergehenden Abſatzes $[\frac{i}{a}]^a = [i] = (1+x)^i$ weil i eine ganze poſitive Zahl iſt. Hieraus aber folgt weiter $[\frac{i}{a}] = (1+x)^{\frac{i}{a}}$ ſo daß alſo hierdurch der binomiſche Lehrſatz auch für den Fall bewieſen wird, wenn n eine gebrochene Zahl iſt.

8. Da auf dieſe Art, wenn m nur eine poſitive, übrigens aber entweder eine ganze oder eine gebrochene Zahl bedeutet, allemal $[m] = (1+x)^m$ iſt, ſo ſey nunmehr $n = -m$. Alsdenn wird $m + n = 0$, und folglich $[0] = (1+x)^0 = 1$. Setzt man aber dieſe Werthe in die Formel $[m].[n] = [m+n]$, ſo wird $(1+x)^m . [-m] = 1$, und folglich $[-m] = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m}$ wodurch denn der binomiſche Lehrſatz auch für den Fall erwieſen iſt, wenn n eine gebrochene Zahl bedeutet.

9. Wenn p und q die beyden Gränzen vorſtellen, zwiſchen welchen die irrationale Größe $\sqrt[r]{e}$ liegt, ſo iſt nach dem bisher Erwieſenen, wie groß oder wie klein auch der Unterſchied zwiſchen p und q ſeyn mag, allemal

$$[p] = (1+x)^p \text{; und}$$

$$[q] = (1+x)^q.$$

Da nun das, was von jeder der beyden Gränzen einer Irrational-Größe gilt, auch von dieſer Irrational-Größe ſelbſt behauptet werden kann, ſo erhellet hieraus die Wahrheit des binomiſchen Lehrſatzes für den Fall, wenn n eine Irrational-Zahl iſt; oder es iſt nunmehr auch $[\sqrt[r]{e}] = (1+x)^{\sqrt[r]{2}}$.

10. Ob aber gleich bey dieſem letzten Satze $\sqrt[r]{e}$ ſowohl poſitiv als negativ ſeyn kann, ſo iſt doch bey dem Beweiſe deſſelben e als eine abſolute Zahl betrachtet worden, und man darf daher, wenn e eine poſitive oder negative Zahl iſt, davon weiter keinen Gebrauch machen, als wenn ſowohl im erſten Falle von $\sqrt[r]{+e}$ als im andern von $\sqrt[r]{-e}$ bloß die reellen Werthe genommen werden. Wenn daher r eine ungerade Zahl iſt, und die unmöglichen Werthe von $\sqrt[r]{\pm e}$ ausgeſchloſſen werden, ſo iſt allemal $[\sqrt[r]{\pm e}] = (1+x)^{\sqrt[r]{\pm e}}$; wenn aber r eine gerade Zahl iſt, ſo iſt bloß $[\sqrt[r]{+e}] = (1+x)^{\sqrt[r]{+e}}$ erwieſen, und der Fall, wo $\sqrt[r]{-e}$ vorkommt, iſt in der obigen Formel gar nicht begriffen.

11. Vermittelſt der Differenzial-Rechnung läßt ſich die Wahrheit des binomiſchen Lehrſatzes ſelbſt für den Fall darthun, wenn n eine unmögliche Zahl iſt, aber für die gegenwärtige Abſicht reicht ſchon das im dritten bis zum achten Abſatze Enthaltene hin, und ſo weit hat auch Euler nur den Beweis geführt. Da ſich indeſſen der Satz im neunten und zehnten Abſatze leicht mit den vorhergehenden verbinden ließ, ſo ſchien es uns nicht unzweckmäßig, auch ihn herzuſetzen. Und beſonders weil dieſer Vortrag, welcher als der 9te anzuſehen iſt, in dem Artickel binomiſcher Lehrſatz nicht befindlich iſt.

Functionen zu verwandeln durch Subſtitution.

1. Wenn y irgend eine Function von z iſt, und z durch eine neue veränderliche Größe x beſtimmt wird, ſo kann auch y durch x beſtimmt werden.

Durch die Einführung einer ſolchen neuen veränderlichen Größe x kann man daher, wenn y eine Function von z iſt, ſowohl y als z beſtimmen. Iſt z. B. $y = \frac{1-zz}{1+zz}$, ſo wird, wenn man $z = \frac{1-x}{1+x}$ ſetzt, und dieſen Werth von z in $\frac{1-zz}{1+zz}$ anſtatt z bringt $y = \frac{2x}{1+xx}$. Setzt man daher irgend einen beſtimmten Werth für x, ſo findet man dadurch nicht nur für z, ſondern auch für y einen beſtimmten Werth; und der Werth, den man für y erhält, iſt zugleich der Werth, welchen y durch z bekommt, wenn man dafür ſeinen auf dieſem Wege gefundenen beſtimmten Werth ſetzt. Nimmt man z. B. $x = \frac{1}{2}$, ſo wird $z = \frac{1}{3}$, und $y = \frac{4}{5}$; aber eben dieſen Werth erhält y auch, wenn man in dem Ausdrucke, $\frac{1-zz}{1+zz}$, dem y gleich iſt, $z = \frac{1}{3}$ ſetzt.

Man bedient ſich aber dieſer Einführung einer neuen veränderlichen Größe in einer doppelten Abſicht. Denn einmal ſchaft man dadurch die Irrationalität weg, wenn ſich dergleichen in dem Ausdrucke, worin y durch z beſtimmt wird, befindet; und zweytens kann man, wenn das Verhältniß zwiſchen y und z in einer Gleichung von einem ſo hohen Grade gegeben wird, daß man daraus keine entwickelte y gleiche Function von z abzuleiten im Stande iſt, durch die Einführung einer andern veränderlichen Größe x aus der gegebenen

eine

eine andere Gleichung machen, aus welcher ſich y und z bequem finden laſſen. Schon hieraus erhellet der außerordentliche Nutzen dieſer Subſtitution; es wird aber derſelbe durch das folgende noch viel deutlicher dargeſtellt werden.

2. Wenn $y = \sqrt{(a + bz)}$; ſo findet man die neue veränderliche Größe x, wodurch ſowohl z als y rational ausgedruckt werden kann, auf folgende Art.

Da ſowohl z als y eine rationale Function von x werden ſoll; ſo ſetze man $\sqrt{(a + bz)} = bx$; wobey leicht einzuſehen iſt, daß man dadurch ſeine Abſicht erhalten werde. Denn es wird alsdann einmahl $y = bx$, und zweytens $a + bz = bbxx$; folglich $z = bxx - \frac{a}{b}$. Es wird daher ſowohl z als y durch eine rationale Function von x ausgedrückt; und man darf dazu nur, wenn $y = \sqrt{(a + bz)}$ iſt, $z = bxx - \frac{a}{b}$ ſetzen, indem alsdann $y = bx$ wird.

3. Wenn $y = (a + bz)^{\frac{m}{n}}$ iſt; ſo findet man die neue veränderliche Größe x, wodurch ſowohl y als z rational ausgedruckt werden kann, auf folgende Art.

Man ſetze $y = x^m$, ſo wird $(a + bz)^{\frac{m}{n}} = x^m$, und $(a + bz)^{\frac{1}{n}} = x$; folglich $a + bz = x^n$, und $z = \frac{x^n - a}{b}$. Es wird daher in der gegebenen Function ſowohl y als z rational ausgedrückt, wenn man $z = \frac{x^n - a}{b}$ ſetzt, indem dieſe Subſtitution $y = x^m$ giebt. Ohnerachtet man alſo weder y durch z, noch z durch y rational ausdrücken kann; ſo ſind dennoch beyde Functionen durch die Einführung der veränderlichen Größe x rational gemacht worden, ſo wie ſolches der Endzweck der Subſtitution erforderte.

4. Es iſt $y = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{\frac{m}{n}}$; man ſoll eine neue veränderliche Größe x finden, wodurch ſowohl y als z rational ausgedruckt werden kann.

Zuvörderſt fällt hier bald in die Augen, daß man der Aufgabe ein Genüge thun werde, wenn man $y = x^m$ ſetzt. Denn es wird alsdann $\left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{\frac{m}{n}} = x^m$, folglich $\frac{a + bz}{f + gz} = x^n$; und aus dieſer Gleichung ergiebt ſich $z = \frac{a - fx^n}{gx^n - b}$, ſo wie dieſe Subſtitution hinwiederum $y = x^m$ giebt.

Zum andern aber läßt ſich nun auch leicht einſehen; daß man ſowohl y als z, wenn $\left(\frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y}\right)^n = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^m$ iſt, rational werde ausdrücken können, wenn man beyde gegebene Ausdrücke $= x^{mn}$ ſetzt. Denn es wird alsdann $y = \frac{\alpha - \gamma x^m}{\delta x^m - \beta}$ und $z = \frac{a - f x^n}{g x^n - b}$.

5. Wenn $y = \sqrt{(a + bz)(c + dz)}$; ſo findet man die Subſtitution, wodurch y und z rational ausgedrückt werden können, auf folgende Art.

Man ſetze $\sqrt{((a + bz)(c + dz))} = (a + bz)x$; denn es iſt leicht einzuſehen, daß z daher einen rationalen Werth bekommen werde, weil der Werth von z in einer einfachen Gleichung gegeben iſt. Alsdann $c + dz = (a + bz)xx$, und hieraus $z = \frac{c - axx}{bxx - d}$. Ferner iſt nunmehr $a + bz = \frac{bc - ad}{bxx - d}$; und wegen $y = \sqrt{((a + bz)(c + dz))} = (a + bz)x$, $y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}$. Es wird alſo die irrationale Function $y = \sqrt{((a + bz)(c + dz))}$ durch die Subſtitution $z = \frac{c - axx}{bxx - d}$ zur Rationalität gebracht, indem dieſelbe $y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}$ giebt. Iſt z. B. $y = \sqrt{(aa - zz)} = \sqrt{((a + z)(a - z))}$: ſo ſetze man, da $b = 1$, $c = a$, und $d = -1$ iſt, $z = \frac{a - axx}{1 + xx}$, wo denn $y = \frac{2ax}{1 + xx}$ ſeyn wird. So oft daher die Größe unter dem Zeichen $\sqrt{}$ zwey einfache reelle Faktoren hat, kann man ſich dieſer Art, ſie auf die Rationalform zu bringen, bedienen; wenn aber die beyden einfachen Faktoren imaginär ſind, ſo iſt folgender Weg vorzüglicher.

6. Es iſt $y = \sqrt{(p + qz + rzz)}$; man ſoll eine Subſtitution für z finden; wodurch der Werth von y rational wird.

Es kann dies auf mehrere Arten geſchehen, je nachdem p und q poſitive oder negative Größen ſind. Es ſey zuvörderſt p poſitiv und $= aa$; denn wenn auch p kein Quadrat iſt, ſo verurſacht doch bey dem gegenwärtigen Geſchäfte die Irrationalität der beſtändigen Größen keine Schwierigkeit. Es ſey alſo

1. $y = \sqrt{(aa + bz + czz)}$. Setzt man hier $\sqrt{(aa + bz + czz)} = a + xz$, ſo wird $b + cz = 2ax + xxz$; und alſo $z = \frac{b - 2ax}{xx - c}$: folglich $y = a + xz = \frac{bx - axx - ac}{xx - c}$, wo z und y rationale Functionen von x ſind. Ferner ſey

2. $y = \sqrt{(aazz + bz + c)}$. Setzt man nun $\sqrt{(aazz + bz + c)} = az + x$, ſo wird $bz + c = 2axz + xx$, und $z = \frac{xx - c}{b - 2ax}$. Dann aber iſt $y = az + x = \frac{-ac + bx - axx}{b - 2ax}$

3. Wenn p und r negativ ſind, ſo iſt der Werth von y, wofern nicht qq größer als 4pr iſt, allezeit imaginär. Iſt aber qq größer als 4pr; ſo kann der Ausdruck $p + qz + rzz$ in zwey Faktoren aufgelöſet werden, und dann gehört dieſer Fall unter den vorhergehenden. Oft kann man aber denſelben bequemer auf dieſe Form bringen, $y = \sqrt{(aa + (b + cz)(d + cz))}$; und um dieſen Ausdruck rational zu machen, ſetze man $y = a + (b + cz)x$. Dann iſt $d + ez = 2ax + bxx + cxxz$, und daher $z = \frac{d - 2ax - bxx}{cxx - e}$, und $y = \frac{-ae + (cd - be)x - acxx}{cxx - e}$. Oft iſt die Reduction auf dieſe Form leichter, $y = \sqrt{(aazz + (b + cz)(d + ez))}$. Dann ſetze man $y = az + (b + cz)x$, wo $d + ez = 2axz + bxx + cxxz$, und $z = \frac{bxx - d}{e - 2ax - cxx}$, und $y = \frac{-ad + (be - cd)x - abxx}{e - 2ax - cxx}$ wird.

Exempel. Hätte man die irrationale Function von z, $y = \sqrt{(-1 + 3z - zz)}$; ſo könnte man dieſelbe auf die Form, $y = \sqrt{(1 - 2 + 3z - zz} = \sqrt{(1 - (1 - z)(2 - z))}$ bringen. Setzt man aber darauf $y = 1 - (1 - z)x$; ſo wird $-2 + z = -2x + xx - xxz$, und $z = \frac{2 - 2x + xx}{1 + xx}$; und dann iſt $1 - z = \frac{1 + 2x}{1 + xx}$, und $y = 1 - (1 - z)x = \frac{1 + x - xx}{1 + xx}$. Und dies ſind ohngefähr die Fälle, welche die unbeſtimmte Analytik, oder die Diophantäiſche Analyſis darbietet; denn es laſſen ſich keine andere irrationale Formeln, die nicht unter den erwogenen begriffen wären, durch die Subſtitution rational machen. Es ſoll daher nunmehr von dem andern Nutzen der Subſtitution geredet werden.

7. Es iſt y eine ſolche Function von z, daß $ay^\alpha + bz^\beta + cy^\gamma z^\delta = 0$: man ſoll eine neue veränderliche Größe x finden, wodurch man die Werthe von y und z entwickelt darſtellen kann.

Da man keine allgemeine Regel für die Auflöſung der Gleichungen hat; ſo kann aus dieſer Gleichung weder y durch z, noch z durch y entwickelt dargeſtellt werden. Um alſo dieſer Unbequemlichkeit abzuhelfen, ſetze man $y = x^m z^n$, wo dann $ax^{\alpha m} z^{\alpha n} + bz^\beta + cx^{\gamma m} z^{\gamma n + \delta} = 0$ ſeyn wird, und beſtimme darauf den Exponenten n ſo, daß der Werth von z aus dieſer letzten Gleichung entwickelt werden kann. Dies kann auf dreyerley Arten geſchehen.

1. Es $\alpha n = \beta$, und alſo $n = \frac{\beta}{\alpha}$; ſo iſt, wenn man die gedachte Gleichung durch $z^{\alpha n} = z^\beta$ dividiret, $ax^{\alpha m} + b + cx^{\gamma m} z^{\gamma n - \beta + \delta} = 0$.

Hieraus ergiebt ſich

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{1}{\gamma n - \beta + \delta}},$$ oder

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}, \text{ und}$$

$$y = x^{m}\left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\beta}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}$$

2. Es ſey $\beta = \gamma n + \delta$, oder $n = \frac{\beta - \delta}{\gamma}$; ſo iſt, wenn man die obige Gleichung durch $z^{\beta} = z^{\gamma n + \delta}$ dividirt, $ax^{\alpha m}z^{\alpha n - \beta} + b + cx^{\gamma m} = 0$. Hieraus ergiebt ſich

$$z = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{1}{\alpha n - \beta}}, \text{ oder}$$

$$z = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}, \text{ und}$$

$$y = x^{m}\left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\beta - \delta}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}$$

3. Es ſey $\alpha n = \gamma n + \delta$, oder $n = \frac{\delta}{\alpha - \gamma}$; ſo iſt, wenn man dieſelbe Gleichung durch $z^{\alpha n} = z^{\gamma n + \delta}$ dividirt, $ax^{\alpha m} + bz^{\beta - \alpha n} + cx^{\gamma m} = 0$. Hieraus ergiebt ſich

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{1}{\beta - \alpha n}}, \text{ oder}$$

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}},$$

Hier ſind alſo auf drey verſchiedene Arten Functionen von x gefunden worden, die z und y gleich ſind. Uebrigens kann man für m eine Zahl ſetzen, was für eine man will, bloß die Null ausgenommen; und auf dieſe Art laſſen ſich die Formeln auf die bequemſte Form bringen.

Exempel. Es ſey die Natur der Function y durch die Gleichung $y^3 + z^3 - cyz = 0$ gegeben, und es werde verlangt, daß man Functionen von x finden ſoll, die den Functionen y und z gleich ſind.

Hier iſt alſo $a = 1$; $b = -1$; $\alpha = 3$; $\beta = 3$; $\gamma = 1$; und $\delta = 1$. Folglich giebt die erſte Beſtimmungsart, wenn man $m = 1$ ſetzt, $z = \left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1}$, und $y = x\left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1}$ oder $z = \frac{cx}{1 + x^3}$ und $y = \frac{cxx}{1 + x^3}$: wo ſo gar beyde Formeln rational ſind.

Die

Die andere Art führt zu folgenden Werthen:

$$z = \left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{und } y = x\left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}; \text{ oder}$$

$$z = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)} \text{ und } y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)^2}.$$

Die dritte endlich giebt

$$z = (cx = x^3)^{\frac{2}{3}}, \text{ und } y = x\,(cx = z^3)^{\frac{1}{3}}.$$

8. Hieraus läßt sich rückwärts urtheilen, wie die Gleichungen, in welchen y durch z gegeben ist, beschaffen seyn müssen, wenn sie durch die Einführung einer neuen veränderlichen Größe x sollen entwickelt werden können.

Denn nimmt man an, daß man durch eine bereits vorgenommene Auflösung

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx + Cx^\nu + \&c.}\right)^{p:r} \text{ und}$$

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^m + Cx^\nu + \&c.}\right)^{q:r}$$

erhalten habe; so wird daher $y^p = x^p z^q$, (weil hieraus $z^q = (\frac{y}{x})^p$ wird) und also $x = yz^{-q:p}$. Da also

$$z^{r:p} = \frac{\alpha x^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \&c.}$$

so wird, wenn man in diese Gleichung den Werth $yz^{-q:p}$ von x anstatt x setzt,

$$z^{r:p} = \frac{ay^\alpha z^{-\alpha q:p} + by^\beta z^{-\beta b:p} + cy^\gamma z^{-\gamma q:p} + \text{etc.}}{A + By^\mu z^{-\mu q:p} + Cy^\nu z^{-\nu q:p} + \text{etc.}}$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich ferner

$$Az^{r:p} + By^\mu z^{(r-\mu q):p} + Cy^\nu z^{(r-\nu q):p} + \text{etc.}$$

$$= ay^\alpha z^{-\alpha q:p} + by^\beta z^{-\beta q:p} + cy^\gamma z^{-\gamma q:p} + \text{etc.}$$

so wie hieraus wenn man mit $z^{\alpha q:p}$ multiplicirt,

$$Az^{(\alpha q + r):q} + By^\mu z^{(\alpha q - \mu q + r):p} + Cy^\nu z^{(\alpha q - \nu q + r):p} + \text{etc.}$$

$$= ay^\alpha + by^\beta z^{(\alpha q - \beta q):p} + cy^\gamma z^{(\alpha q - \gamma q):p} + \text{etc.}$$

Setzt man nun $\frac{aq + r}{p} = m$, und $\frac{\alpha q - \beta q}{p} = n$; so wird

$$Az^m + By^\mu z^{m - \mu n:(\alpha - \beta)} + Cy^\nu z^{m - \nu n:(\alpha - \beta)} + \text{etc.}$$

$$= ay^\alpha + by^\beta z^n \div cy^\gamma z^{(\alpha - \gamma)n:(\alpha - \beta)} + \text{etc.}$$

und

und dies iſt die Gleichung, aus welcher man bey der Auflöſung

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \&c.}\right)^{\frac{\alpha - \beta}{\alpha m - \beta m - \alpha n}} \text{ und}$$

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \&c.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \&c.}\right)^{\frac{n}{\alpha m - \beta m - \alpha n}} \text{ erhält.}$$

Oder man ſetze $\frac{\alpha q + r}{p} = m$, und $\frac{\alpha q - \mu q + r}{p} = n$; ſo wird $m - n = \frac{\mu q}{p}$; $\frac{q}{p} = \frac{m - n}{\mu}$, und $\frac{r}{p} = m - \frac{\alpha m + \alpha n}{\mu}$; ferner $p = \mu$, $q = m - n$ und $r = \mu m - \alpha m + \alpha n$.

Vermittelſt dieſer Werthe aber wird $Az^m + By^\mu z^n + Cy^\nu z^{\nu \mu m - \nu (m - n) : \mu} +$ u. ſ. f. $= ay^\alpha + by^\beta z^{(\alpha - \beta)(m - n) : \mu} + cy^\gamma z^{(\alpha - \gamma)(m - n) : \mu} +$ u. ſ. f. und dies iſt nunmehr die Gleichung, welche bey der Auflöſung

$$Z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{u. ſ. f.}}{A + Bx^\mu\ Cx^\nu + \text{u. ſ. f.}}\right)^{\frac{\mu}{\mu m - \alpha m + \alpha n}} \text{ und}$$

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{u. ſ. f.}}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \text{u. ſ. f.}}\right)^{\frac{m - n}{\mu m - \alpha m + \alpha n}} \text{ giebt}$$

9. Wenn y auf die Art mit z verbunden iſt, daß $ayy + byz + czz + dy + ez = 0$ iſt: ſo findet man mit Hülfe einer neuen veränderlichen Größe x ſowohl für y als für z auf folgendem Wege einen rationalen Ausdruck.

Man ſetzet $y = xz$, und dividirt die dadurch aus $ayy + byz + czz + dy + ez = 0$ entſtehende Gleichung durch z. Alsdann hat man $axxz + bxz + cz + dx + e = 0$; und hieraus

$$z = \frac{-dx - e}{axx + bx + c} \text{ und } y = \frac{-dxx - ex}{axx + bx + c}.$$

Auf die gegebene Form kann man aber auch dieſe Gleichung zwiſchen y und z, $ayy + byz + czz + dy + ez + f = 0$ bringen; wenn man beyde veränderliche Größen um eine gewiſſe beſtändige Größe vermehrt oder vermindert; daher ſich auch dieſe Gleichung durch eine neue veränderliche Größe x entwickeln läßt.

10.

10. Wenn y auf die Art von z abhängt, daß $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 + eyy + fyz + gzz = 0$ iſt: ſo läßt ſich ſowohl y als z auf folgende Art rational ausdrucken.

Man ſetzet $y = xz$, und dividirt, wenn man hiernach die gegebene Gleichung verändert hat, dieſelbe durch zz. Dadurch erhält man $ax^3z + bxxz + cxz + dz + exx + fx + g = 0$; und hieraus wird

$$z = \frac{-exx - fx - g}{ax^3 + bxx + cx + d} \text{ und } y = \frac{-ex^3 - fxx - gx}{ax^3 + bxx + cx + d}.$$

Aus dieſen Beyſpielen läßt ſich leicht erkennen, wie die Gleichungen von höhern Graden zwiſchen y und z beſchaffen ſeyn müſſen, wenn eine ähnliche Auflöſung ſtatt finden ſoll. Uebrigens ſind dieſelben unter den Formeln von (8) begriffen; aber wegen der Schwierigkeit, womit die Anwendung der allgemeinen Formeln auf dieſe öfters vorkommende Fälle verknüpft iſt, ſchien es zweckmäßig, einige davon beſonders zu entwickeln.

11. Wenn das Verhältniß zwiſchen y und z durch die Gleichung $ayy + byz + czz = d$ gegeben iſt: ſo laſſen ſich beyde Größen y und z auf folgende Art durch eine neue veränderliche Größe x beſtimmen.

Man ſetzt $y = xz$, und da dadurch $(axx + bx + c) \times zz = d$ wird, ſo bekommt man

$$z = \sqrt{\frac{d}{axx + bx + c}} \text{ und } y = x\sqrt{\frac{d}{axx + bx + c}}.$$

Auf eine ähnliche Art erhält man, wenn $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = ey + fx$ iſt, durch die Subſtitution $y = xz$ und durch die Diviſion der daher entſtandenen Gleichung durch z, $(ax^3 + bxx + cx + d)\, zz = ex + f$; und folglich

$$z = \sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bxx + cx + d}}, \text{ und } y = x\sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bxx + cx + d}}.$$

Es ſind aber dieſe, ſo wie auch alle übrigen Fälle, die eine ähnliche Auflöſung zulaſſen, unter dem allgemeinen Falle des folgenden (12) begriffen.

12. Wenn das Verhältniß zwiſchen y und z durch die Gleichung $ay^m + by^{m-1}z + cy^{m-2}z^2 + dy^{m-3}z^3 + \&c. = \alpha y^n + \beta y^{n-1}z + \gamma y^{n-2}zz + \delta y^{n-3}z^3 + \&c.$ gegeben iſt: ſo läßt ſich ſowohl y als z auf folgende Art bequem durch eine neue veränderliche Größe x darſtellen.

Man ſetze $y = xz$, ſo kann man, nachdem man vermittelſt dieſer Subſtitution die gegebene Gleichung abgeändert hat, die ganze veränderte Gleichung, vorausgeſetzt, daß der Exponent m größer als n iſt, durch z^n dividiren, und dadurch erhält man $(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.) \times z^{m-n} = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \&c.$ Hieraus aber fließt:

$$z = \left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \&c.}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

$$\text{und } y = x\left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \&c.}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

Es findet nähmlich dieſe Auflöſung alsdann ſtatt, wenn in der ganzen, zwiſchen y und z gegebenen Gleichung nicht mehr als eine doppelte Menge von Dimenſionen beyder veränderlicher Größen y und z vorkommt; ſo wie in dem betrachteten Falle die Anzahl dieſer Dimenſionen in jedem einzelnen Gliede der Gleichung entweder m oder n iſt.

13. Wenn in einer Gleichung zwiſchen y und z dreyerley Dimenſionen vorkommen, ſo daß die höchſte die mittelſte in Anſehung der Höhe um eben ſo viel überſteigt, als die niedrigſte unter der mittelſten iſt: ſo kann man mit Hülfe der Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen die veränderlichen Größen y und z durch eine neue veränderliche Größe x ausdrücken.

Denn ſetzt man $y = xz$, und dividirt man die durch dieſe Subſtitution erhaltene Gleichung durch die niedrigſte Poteſtät von z; ſo läßt ſich nun der Werth von z, durch x beſtimmt, vermittelſt der Extraction der Quadratwurzel erhalten. Folgende Beyſpiele werden dieſes deutlich machen.

Erſtes Exempel. Es ſey $ay^3 + by^2z + cyzz + dz^3 = 2eyy + 2fyz + 2gzz + hy + iz$. Setzt man nun $y = xz$, und dividirt man die dadurch erhaltene Gleichung durch z; ſo bekommt man

$(ax^3 + bxx + cx + d)zz = 2(exx + fx + g)z + hx + i$; und hieraus

$$z = \frac{exx + fx + g \pm \sqrt{((exx + fx + g)^2 + (ax^3 + bxx + cx + d)(hx + i))}}{ax^3 + bxx + cx + d}$$

Hat man aber z gefunden, ſo iſt $y = xz$.

Zweytes Exempel. Es ſey $y^5 = 2az^3 + by + cz$. Setzt man nun wieder $y = xz$, ſo wird $x^5z^4 = 2azz + bx + c$; und hieraus findet man

$$zz = \frac{a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)}}{x^5}$$ ſo wie hieraus

$$z = \frac{\sqrt{(a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)})}}{xx\sqrt{x}}$$ und

$$y = \frac{\sqrt{(a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5}}}{x\sqrt{x}}.$$

Drittes Exempel. Es ſey $y^{10} = 2ay_z^6 + byz^3 + cy^4$; wo man alſo die Dimenſionen 10, 7 und 4 hat. Setzt man $y = xz$, und dividirt man die dadurch erhaltene Gleichung durch z^4; ſo erhält man, $x^{10}z^6 = 2axz^3 + bx + c$, oder $z^6 = \frac{2axz^3 \div bx + c}{x^{10}}$. Hieraus ergiebt ſich

$$z^3 = \frac{ax \pm x\sqrt{(aa + bx^9 + cx^8}}{x^{10}},$$ und folglich iſt

$$z = \frac{\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)})}}{x^3},$$ und

$$y = \frac{\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)})}}{x^2}.$$

Nun

Aus dieſen Beyſpielen läßt ſich die Art des Gebrauchs dieſer Subſtitutionen zur Genüge einſehen.

Eulers Einleitung in die Analyſis des unendlichen I. 53.

Functionen zu verwandeln in Reihen, ſiehe Reihen aus Functionen herzuſtellen.

Fund (Markſcheider): ſo heißt der Punkt wo das Anhalten der Fundgrube genommen wird. M. ſ. Vermeſſen 6 u. ſ. w.

Fund auf höhere Strecken bringen, ſiehe Vermeſſen (42b)

Fund in die Grube fallen, ſiehe Vermeſſen 42b.

Fund zu Tage ausbringen, ſiehe Vermeſſen 41.

Fundgrube, *Champs primitif d'un filor*, ein Stück Feld an demjenigen Orte, wo der Gang zuerſt entblößet iſt, und Kübel und Seil eingeworfen wird. Das Maaß derſelben iſt nicht allenthalben gleich, ſo wie auch dieß Maaß auf Gängen von dem auf gevierten Feld unterſchieden iſt. Z. B. in dem freybergiſchen Revier hält eine Fundgrube 60 Lachter, im Obergebirge 42 Lachter, in Ungarn 28 Lachter, oder 4 Lehen. Gewöhnlich wird die Fundgrube halb über halb unter dem Fund geſteckt, es ſtehet aber dem Finder frey, daß er, wenn es ohne Nachtheil der Feldnachbarn geſchehen kann, ſolche ganz das Gebürge hinauf oder herunter, vom Ort der Entblößung ſtrecken kann. Auf Gängen wird das Maaß nur der Länge nach, wie der Gang ſtreichet, genommen, auf Flözen aber wird in die Länge und Breite nach dem Quadratmaaß gemeſſen und ſie iſt 28 Lachter lang und breit.

Fundgrube ſtrecken, wenn der Fundgrübner ſich vor dem Bergamte erkläret, ob die Fundgrube dergeſtalt gemeſſen werden ſoll, daß der Fundſchlacht das Mittel oder Mittelpunkt ſeyn, oder von demſelben ganz den Berg hinauf, oder ganz hinunter gemeſſen werden ſoll.

Fünfeck, *Quinq-angular*, *Pentagonal*, iſt eine Figur, die in fünf gerade Linien eingeſchloſſen iſt. Sind darin die Seiten und Winkel gleich, ſo iſt es regulär, ſind ſie nicht gleich, ſo iſt es irregulär. Die Summe aller ſeiner Winkel iſt 540°, daher hält jeder im regulären 108°, und der Centriwinkel 72°.

Fünfeck auf der Kugel, ſiehe Sphäriſche Vielecke.

Fünfeck im Kreiſe.

Wenn der Halbmeſſer gegeben iſt, die Seite des Fünfecks zu finden. Fig. 1155.

Auflöſung. Es ſey BE die Seite des VEcks, und BC die Seite des Zehnecks, ſo iſt (ſ. d.)

$$BC = \frac{\sqrt{5}\,AB - AB}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 - \tfrac{1}{2}BE}$$

$$AD = \sqrt{(AB^2 - BD^2)}$$

oder $AD = \sqrt{(AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2)}$

folglich $CD = CA - AD = AB - \sqrt{(AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2)}$

und $CD^2 = 2AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2 - 2AB\sqrt{(AB^2 - \tfrac{1}{4}EB^2)}$

$BD^2 = \tfrac{1}{4}EB^2$

$$CD^2 + BD^2 = 2AB^2 - 2AB\sqrt{(AB^2 - BD^2)}$$

Es iſt aber $CD^2 + BD^2 = CB^2$

alſo $CB^2 = 2AB^2 - 2AB\sqrt{(AB^2 - BD)^2}$

Es iſt aber auch $CB = \sqrt{\frac{5}{4}AB^2}\ \frac{1}{2}AB$

folglich $CB^2 = \frac{6}{4}AB^2 - AB\sqrt{\frac{5}{4}AB}$

Vergleicht man beyde Werthe von CB^2 ſo iſt

$$2AB^2 - 2AB\sqrt{(AB^2 - \frac{1}{4}EB^2)} = \frac{6}{4}AB^2 - AB\sqrt{\frac{5}{4}AB^2}$$
$$2AB^2 - \frac{6}{4}AB^2 + AB\sqrt{\frac{5}{4}AB^2} = 2AB\sqrt{(AB^2 - \frac{1}{4}EB^2)}$$
$$\frac{1}{2}AB^2 + AB\sqrt{\frac{5}{4}AB^2} = 2AB\sqrt{(AB^2 - \frac{1}{4}EB^2)}$$
$$\frac{1}{2}AB + \sqrt{\frac{5}{4}AB^2} = 2\sqrt{(AB^2 - \frac{1}{4}EB^2)}$$

Man quadrire beyderſeits ſo kommt

$$\frac{6}{4}AB^2 + AB\sqrt{\frac{5}{4}AB^2} = 4AB^2 - EB^2$$

bringe EB alleine linker Hand, ſo iſt

$$EB^2 = 4AB^2 - \frac{6}{4}AB^2 - AB\sqrt{\frac{5}{4}AB^2}$$
$$EB^2 = \frac{10}{4}AB^2 - AB\sqrt{\frac{5}{4}AB^2}$$
$$EB^2 = AB^2 + (\frac{6}{4}AB^2 - AB\sqrt{\frac{5}{4}AB^2})$$

Es iſt aber $\frac{6}{4}AB^2 - AB\sqrt{(\frac{5}{4}AB^2)} = CB^2$.

Alſo iſt $EB^2 = AB^2 + CB^2$

$$EB = \sqrt{(AB^2 + CB^2)}$$

das heißt, das Quadrat der Seite der 5ecks, iſt gleich dem Quadrate des Halbmeſſers, nebſt dem Quadrate der Seite des Zehnecks.

1. Fig. 1156. Man ſetze den Halbmeſſer CF winkelrecht auf dem Durchmeſſer AE, nehme $CD = \frac{1}{2}CE$, beſchreibe aus D durch F den Bogen FGB, ſo iſt CB die Seite des Zehnecks, und CF der Halbmeſſer oder die Seite des Sechsecks, hingegen die gerade Linie BF iſt die Seite des Fünfecks, weil $BF^2 = CF^2 + BC^2$ oder $BF = \sqrt{(CF^2 + BC^2)}$.

Man theile den Halbmeſſer KA des gegebenen Kreiſes P, Fig. 1157, in B nach dem äußern und mittlern Verhältniſſe: ſo iſt das größere Stück KB die Seite des in dem Kreiſe P möglichen regulären Zehnecks.

Beweis. Man lege von A aus AC = KB in den Kreis, und ziehe KC und BC. Da auf dieſe Art KCA = KAC oder BAC wird, und nach der gegebenen Auflöſung BA : KB = KB : KA oder

BA : AC = AC : KC iſt: ſo ſind die Dreyecke KAC und BAC einander ähnlich, und folglich CBA = BAC, und BCA = AKC.

Alſo wegen des erſten BC = AC = KB; und hierdurch

BKC oder AKC = BCK = BCA; folglich

KAC = ACK = 2CKA.

Es iſt aber eine blos dem regulären Zehnecke weſentliche Eigenſchaft, daß der halbe Polygonwinkel noch einmal ſo groß iſt, als der Centriwinkel.

Geometriſch algebraiſche Auflöſung.

Es ſey AB = x, Fig. 1158, die Seite des verlangten Zehnecks, und AK = BK = r gezogen. Man verlängere AB, bis BD = KB = KA iſt, und ziehe KD. Alsdann iſt BKD = BDK = AKB und alſo die Dreyecke ABK und AKD, weil ſie auſſerdem den Winkel A gemein haben, einander ähnlich. Folglich

AK : AB = AD : AK d. h.

$r : x = r + x : r$.

Hier-

Hierauf beruhet die folgende erſte geometriſche Conſtruction. Es fließt aber auch daraus $x^2 + rx = r^2$, und dieſe Gleichung giebt

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4} r^2} - \tfrac{1}{2} r.$$

Erſte geometriſche Conſtruction.

Man nehme auf der unbegrenzten geraden Linie MN, Fig. 1159 von K aus KA = KB = r, und, auf der auf BA in K ſenkrechten Linie, KD = $\tfrac{1}{2}$ r, und beſchreibe aus D mit der Entfernung dieſes Punctes von A oder von B einen Kreis: ſo ſchneidet derſelbe die gehörig verlängerte CK in E ſo, daß KE = x wird.

Beweis. Nach einem bekannten Satze aus der Lehre von den Proportional-Linien beym Kreiſe iſt KA : KE = KC : KB, das iſt

$$r : x = r + x : r.$$

Zweyte geometriſche Conſtruction.

Man ziehe Fig. 1160. CG = r auf CF = $\tfrac{1}{2}$ r ſenkrecht, und beſchreibe aus F mit FG = $\sqrt{\tfrac{5}{4} r^2}$ den Bogen GH, welcher die verlängerte FG begränze; ſo iſt

$$CH = FH - FC = FG - FC = \sqrt{\tfrac{5}{4} r^2} - \tfrac{1}{2} r.$$

Hat man auf eine von den beſchriebenen Arten die Seite des Zehnecks gefunden: ſo iſt es von ſelbſt klar, wie man durch Zeichnung die Seite des Fünfecks finde; und durch Zeichnung der Aufgabe ein Genüge thun zu lehren, iſt jetzt die Abſicht.

Anmerkungen. Wenn die Auflöſung, welche Euclides von der erſten Aufgabe im zweyten Buche ſeiner Elemente gegeben hat, und daneben die Sätze von der Vergleichung der Rechtecke, womit er ſein drittes Buch beſchließt, vorausgeſetzt werden können, ſo läßt ſich der erſte Beweis auf folgende Art abändern.

Da Fig. 1157. BA. KA = $KB^2 = AC^2$ iſt, ſo wird, wenn man durch C, B und K einen Kreis legt, AC eine Tangente dieſes Kreiſes, und BC eine Sehne deſſelben.

Demnach iſt BCA = CKB; folglich, da

CBA = CKB + BCK iſt, auch

CBA = BCA + BCK = KCA = KAC; folglich

BC = AC = KB, und daher

CKB = BCK = BCA, und

KCA = KAC = 2CKB.

Wenn es lediglich darum zu thun iſt, die Seite des Zehnecks oder des Fünfecks zu finden: ſo verfährt man am leichteſten und bequemſten auf folgende Art. Man ziehet aus dem Mittelpunkte K Fig. 1161. auf einen Durchmeſſer AB einen ſenkrechten Halbmeſſer KC, theilt KA in D in zwey gleiche Theile, und ſchneidet aus D mit der Entfernung DC auf AB das Stück DE ab. Iſt dieſes geſchehen, ſo iſt KE die Seite des Zehnecks und die gerade Linie zwiſchen C und E die Seite des Fünfecks. Von der Linie KE iſt das Geſagte aus dem Vorhergehenden klar.

Auflöſung vom Herrn von Tempelhof.

Wenn DC Fig. 1162. die Seite eines regulairen Zehnecks und AC = AF der Halbmeſſer des Kreiſes iſt, in welchem daſſelbe beſchrieben werden kann: ſo iſt die Seite des in eben dieſem Kreiſe beſchriebenen regulären Fünfecks =

$FB = \sqrt{(AF^2 + AB^2)}$

wobey vorausgeſetzt wird, daß AB = DC ſey

Beweis. Wenn DC die Seite des Zehnecks iſt: ſo iſt der Winkel am Mittelpunkte oder der Winkel $DAC = \frac{2}{5}R$, und der halbe Polygonwinkel oder $ADC = ACD = \frac{4}{5}R$. Theilt man daher den Winkel ADC durch die gerade Linie DB in zwey gleiche Theile, ſo wird

$BDC = \frac{2}{5}R = DAC = ADB$, und

$DBC = \frac{4}{5}R = ADC = ACB$,

folglich ſind die Dreyecke BDC und ABD gleichſchenklich, und

$BD = DC$; $AB = BD = DC$, und

$\triangle BDC \sim \triangle ADC$.

Hieraus fließt $DB : BC = AC : DC$, oder

1. $AB : BC = AC : AB$, und daraus
2. $AB^2 = BC.AC$, ſo wie auch
3. $AB : AC = AC : AC + AB$.

Nun ziehe man DL auf BC ſenkrecht: ſo theilt ſie den Winkel $BDC = DAC$, ſo wie auch die Linie BC in zwey gleiche Theile. Ferner iſt wegen der Natur des Kreiſes

$CL : DL = DL : LE$, oder

$\frac{1}{2}BC : DL = DL : AC + AB + \frac{1}{2}BC$, alſo

4. $BC : 2DL = 2DL : 2AC + 2AB + BE$.

Weil auch, nach No. 1, $AB : BC = AC : AB$ iſt, ſo hat man

$AB + BC : + AB = AB : AC$, und alſo

5. $AC + 2AB + BC : AC + AB$
$= AB + AC : AC$, und, weil nach No. 3.

$AC : AB = AB + AC : AC$ iſt,

6. $AC + 2AB + BC : AC + AB = AC : AB$, folglich

7. $2A + 2AB + BC : AC + AB + AB = AC : AB$

und weil nach Nr. 1. $AC : AB = AB : BC$ iſt,

8. $2AC + 2AB + BC : AC + AB + AB = AB : BC$

Nun folgt aus Nr. 4.

$2AC + 2AB + BC : 2DL = 2DL : BC$, und alſo iſt

9. $AC + AB + AB : 2DL = 2DL : AB$, folglich

10. $4DL^2 = (AC + AB + AB)\, AB$

Verbindet man nunmehr mit der verſetzten dritten Proportion

$AC + AB : AC = AC : AB$

$AC : AB = AC : AB$, ſo bekommt man

11.

11. $AC + AB : AB = AC^2 : AB^2$ und hieraus

12. $AC + AB + AB : AB$
$= AC^2 + AB^2 : AB^2$.

Da ſich nun Rechtecke, die gleiche Höhe haben, wie ihre Grundlinien verhalten, ſo iſt

13. $(AC + AB + AB)\ AB : AB^2$
$+ AC^2 + AB^2 : AB^2$ und daher

14. $(AC + AB + AB)\ AB = AC^2 + AB^2$

Nun war Nr. 10.
$(AC + AB + AB)\ AB = 4\ DL^2$ alſo iſt

15. $4DL^2 = AC^2 + AB^2$
und folglich die geſuchte Seite des Fünfecks.

16. $2DL = \sqrt{(AC^2 + AB^2)} = \sqrt{(AF^2 + AB^2)} = FB.$

Wie man ein regulaires Fünfeck auf einer gegebenen Linie beſchreibt wird im Artickel, Vieleck regulär. über eine ꝛc. III. und wie man ſolches in den Cirkel beſchreibet in dem Artickel Vielecke in den Cirkel III. gezeiget.

Fünfeck irreguläres.

Es iſt der Inhalt des Fünfecks ABCDE. Fig. 1576 eine Seite AB der Lage und Größe nach, das auf dieſe Seite von der gegenüberſtehenden Spitze gefällte Perpendikel DF der Größe nach, ferner das Verhältniß der Seiten DE, EA und der Winkel DEA, und eben ſo das Verhältniß der Seiten DC, CB und der Winkel DCB gegeben: das Fünfeck zu finden.

Auflöſung. Weil AB, DF der Größe nach gegeben ſind; ſo iſt das Rechteck AB. DF, d. h. der doppelte Inhalt des Dreyecks ADB, mithin dieſer Inhalt ſelbſt der Größe nach gegeben, folglich berührt der Punkt D, weil auch die Lage von AB gegeben iſt, eine der Lage nach gegebene mit AB gleichlaufende gerade Linie (Oerter ebene 3 S. I.) Und weil der Winkel bey E, und das Verhältniß der ihn einſchließenden Seiten, und eben ſo der Winkel bey C und das Verhältniß der ihn einſchließenden Seiten gegeben ſind; ſo ſind die Dreyecke AED, BCD der Gattung nach gegeben (Dreyeck. Data). Endlich da der Inhalt des Fünfecks gegeben iſt; ſo iſt auch der Ueberſchuß des Fünfecks über das gegebene Dreyeck ABD gegeben, d. h. es iſt die Summe der über AD, BD beſchriebenen der Gattung nach gegebenen Dreyecke gegeben, folglich berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis (Oerter ebene II. 5 S.) Mithin iſt dieſer Punkt gegeben, folglich ſind die Linien AD, BD der Lage und Größe nach gegeben, und weil die Winkel EAD, EDA, DBC, BDC gegeben ſind; ſo ſind die Linien AE, DE, BC, DC der Lage nach, mithin die Punkte E, C, folglich auch die Linien AE, DE, BC, DC der Größe nach gegeben.

Kompoſition und Beſtimmung. Es ſey M der Ueberſchuß des gegebenen Inhalts des Fünfecks über die Hälfte des Rechtecks AB, FD und man beſchreibe den Ort (Ort ebener II. 5) ſo, daß die Summe der der Gattung nach gegebenen über AD, BD beſchriebenen Figuren, gleich ſey dem Raum M. (Die weitere Entwickelung befindet ſich a. a. O.) Wir bemerken nur noch um des folgenden willen, daß in der Figur P den Mittelpunkt des Kreiſes bedeuten ſoll, welches der der Ort iſt). Eben ſo beſchreibe man den Ort (Ort ebener I. 3 S.) ſo, daß der Inhalt des Dreyecks gleich ſey der Hälfte des Rechtecks AB $\times$ DF, D

ſey

ſey der Punkt, in welchem ſich beyde Oerter einander begegnen. Man ziehe AD, BD und auf dieſen Linien beſchreibe man die Dreyecke AED, BCD ſo, daß ſie die gegebenen Winkel E, C haben, und daß die Seiten EC, AC und eben ſo auch die Seiten BC, DC, das gegebene Verhältniß unter einander haben, ſo iſt ABCDE das verlangte Fünfeck. Der Beweis erhellet von ſelbſt. Weil aber erfordert wird, daß der aus P mit dem Halbmeſſer PD beſchriebene Kreis der Linie FD in D begegne, ſo darf PD nicht kleiner ſeyn, als FD, d. h. das Quadrat über DP, oder eine Figur, die ſich zu dem Raume N (Ort ebener II. 5 Satz 1ſter Fall 3) verhält, wie das dort vorkommende Quadrat über GH, zu der Summe der Räume, die dort K, L heißen, darf nicht kleiner ſeyn, als das Quadrat über DF.

Berechnung. Man findet AP, BP, PD durch die Berechnung vom ang. Ort. Da nun DF gegeben iſt, ſo findet man in dem rechtwinklichten Dreyeck PFD leicht den Winkel DPD, mithin kennt man nun in den Dreyecken APD, BPD die Seiten AP, PD und BP, BD nebſt den eingeſchloſſenen Winkeln, und findet hieraus AD, BD, woraus ſich alles übrige leicht ergiebt.

Es iſt begreiflich, daß bey Vielecken von mehrern Seiten ähnliche Aufgaben vorkommen, und auf ähnliche Art aufgelöſet werden können.

Fünfeckigte Zahlen, ſiehe Pentagonalzahlen.

Funfzehneck, regulaires in den Cirkel zu beſchreiben, ſiehe Vielecke in den Cirkel zu beſchreiben. VIII.

Funicularium Problema, ſiehe Strickaufgabe.

Fuß, Schuh, *Pied*, ein gewöhnliches Längenmaaß, womit Körper nach ihren ſämmtlichen Ausdehnungen ausgemeſſen werden können. Er iſt ohngefähr ſo lang als der Unterfuß, oder der Schuh eines völlig ausgewachſenen Mannes, daher er auch ſeinen Nahmen führt.

Fuß

Fuß, deren Größe.

Oerter.	Linien.	Pariſer Fuß.
Aachen	12850	0,8923604
Amſterdam	12570	0,8729160
Anſpach	13200	0,9166664
Antiochia	18920	1,3138880
Antwerpen	12660	0,8791660
Augsburg	13129	0,9117354
Avignon	11000	0,7638888
Baſel	13260	0,9208328
Bayern	12938	0,8984712
Berlin	13730	0,8534716
Bern	13150	0,9131940
Beſançon	13710	0,9520828
Bologna	16860	1,1708324
Braunſchweig	12650	0,8784716
Bremen	12820	0,8892772
Breslau	12600	0,8749996
Briel	14860	1,0319436
Brück	12260	0,8513884
Brüſſel	12900	0,8958328
Calenberg	12916	0,8969436
	12990	0,9020824
	12953	0,8995130
Caſtilien	12530	0,8701384
China		
Kramer	15000	1,0416664
mathem.	14770	1,0256936
Baufuß	14310	0,9937496
Cleve	13100	0,9097220
Cölln	12190	0,8465272
Conſtantinopel	31400	2,1805548
Coppenhagen	13910	0,9659716
Cracau	15800	1,0972216
Dännemark	13910	0,9659716
	14034	0,9745828
Danzig	12715	0,8829854
Dijon	13920	0,9666660
Dortrecht	15960	1,1083324
Dresden	12550	0,8715272
Emden	13130	0,9118052
England	13510	0,9381940
gemeine	13500	0.9374996
Erfurt	12510	0,8687496
Eßlingen		
Stadt	12800	0,8888884
Feld	12203	0,8474302
Eyderſtadt	13130	0,9118052

Oerter.	Linien.	Pariſer Fuß.
Florenz		
Bracci	25845	1,7947902
Frankfurt am Mayn	12700	0,8819440
Genev	21630	1,5020824
Gibraltar	12530	0,8701384
Gieſſen	13200	0,9166664
Goes	13290	0,9229160
Grenoble	15120	1,0499996
Griechiſcher	13656	0,9483324
Gröningen	12950	0,8993048
Haag	14400	0,9999996
Halle	13200	0,9166664
Hamburg	12700	0,8819440
Hannover	12953	0,9895130
Harlem	12670	0,8798604
Hebräiſch	15900	1,1041660
Herford	13100	0,9097220
Heydelberg	12275	0 8524298
Hildesheim	12445	0,8642354
Holſtein	13376	0,9288980
Inſpruck	14080	0,9777772
Königsberg	13640	0,9472216
Leiden	13900	0,9652772
Leipzig	12520	0,8694440
Lion	15150	1,0520828
Liſſabon	13875	0,9635406
London	13512	0,9383328
	13516	0,9386104
	13513	0,9384022
Lothringen	12910	0,8965272
Lübeck	12870	0,8937492
Lüttich	12750	0,8854160
Manheim	12865	0,8934018
Maſſon	14820	0,9291650
Maſtrich	12450	0,8645828
Mayntz	13350	0,9270828
Mecheln	12390	0,8604160
Mecklenburg	12890	0,8951380
Middelburg	13300	0,9236108
Milano	17600	1,2222216
Mümpelgard	12740	0,8847216
München	12825	0,8906242
Neapolis	11615	0,8065966
Nürnberg	13467	0,9352074
Oldenburg	13130	0,9118052
Osnabrück	12375	0,8593742

Oerter.	Linien.	Pariſer Fuß.
Padua	18990	1,3187388
Paris	14400	0,9999996
Pavia	20800	1,4444436
Pommern	12950	0,8993048
Prag	13360	0,9277772
Reval	11870	0,8243048
Rheinländiſch	13910	0,9659716
Riga	12160	0,8444440
Rom, alter	13090	0,9090272
	13060	0,9069440
neuer	19903	0,6877074
Roſtock	12820	0,8902772
Rotterdam	13835	0,9607630
Rouen	12000	0,8333332
Rußland	23856	1,6566634
Samos	15340	1,0652772
Savoyen	12000	0,8333332
Schweden	13159	0,9138186
Sedam	12300	0,8541664
Spanien	12530	0,8701384
Stettin	12530	0,8701384
Strasburg	12821	0,8903466
Toledo	12530	0,8701384
Turin	22770	1,5810488
Ulm	12953	0,8995120
Urbano	15700	0,8819440
Utrecht	12100	0,8402776
Venedig	15400	1,0694440
Verona	15400	1,0694442
Vienne	14300	0,9930552
Wien	14012	0,9730550
Wittenberg	14850	1,0312492
Zelle	12920	0,8972216
Ziriczа	13760	0,9915548
Zürch	13300	0,9236108

Ge

Gebrauch dieſer Tafel. Man fragt wie viel betragen 125 Rhlfuß nach Londner. Die Größe des Rhlfuß iſt nach der Tafel 13910 des Londner 13512 ſo ſind 13910 Londner 13512 Rheinländiſche, alſo $\frac{13910}{13512}$ Londner Fuß = 1 Rhl. folglich $\frac{13910}{13512}$ 125 Londner = 125 Rhl. Um nun dieſes zu berechnen, kann man mit Vortheil die Logarithmen gebrauchen

$$\begin{array}{rl} \text{Log } 13910 = & 4{,}1433271 \\ 125 = & 2{,}0969100 \\ \hline & 6{,}2402371 \\ 13512 = & 4{,}1307196 \\ \hline & 2{,}1095175 \end{array}$$

hierzu gehört 128, 68, als ſo viel Londner Fuß, 125 Rhl. gleich ſind.

Eintheilung der Fußmaße Um die Abmeſſungen noch in kleinen Theilen als Fußen angeben zu können, ſo theilet der Geometer in dieſer Abſicht, den Fuß ferner in 10 gleiche Theile, und nennet dieſes Zolle; der zehnte Theil eines Zolles heißt eine Linie, der zehnte Theil einer Linie, ein Scrupel u. ſ. w.

Dieſe Decimal-Eintheilung hat man durchgängig in der praktiſchen Geometrie eingeführt; und man erhält dadurch beſondere Bequemlichkeiten und Vortheile.

Im gemeinen Leben pflegt man ſonſt auch die 12 oder 16theilige Eintheilung zu gebrauchen, dergeſtalt, daß z. E. der Fuß in 12 Zolle, der Zoll in 12 Linien ꝛc. eingetheilt wird.

Weil nähmlich 1 Fuß = 12 Zoll = 12. 12 Linien = 144. 12 = 1728 Scrupel iſt, ſo muß man mit den Zahlen 12; 144; 1728 multipliciren, wenn man den Fuß auf Zolle, Linien oder Scrupel bringen will; und umgekehrt, muß man mit dieſen Zahlen dividiren, wenn man die niedrigen Einheiten auf die höhern bringen will. Ueberhaupt muß man bey der Reduktion der höhern Einheiten auf die nächſt niedern, oder umgekehrt, allemal mit 12 multipliciren oder dividiren, und dieſes iſt etwas beſchwerlich. Hingegen bey der zehntheiligen Eintheilung der Feldmeſſer, hat man nur die Multiplication und Diviſion mit 10 zu verrichten; und dieſes iſt weit bequemer, als mit 12 ſolches vorzunehmen. Auch iſt die Decimaleintheilung deswegen ſehr vortheilhaft, weil die niedrigern Einheiten lauter Decimalbrüche der höhern ſind

Ex. 3 Zoll = $\frac{3}{10}$ Fuß = 0,3 Fuß
253 L. = 25, 3 Zoll = 2,53 Fuß

Reduction des Fußmaßes.

1. Da bey der Decimal-Eintheilung der Fuß in 10 Theile; bey der Duodecimal-Eintheilung aber die nähmliche Länge in 12 Theile getheilet wird, ſo muß man wiſſen, wie beyde Eintheilungen auf einander reducirt werden können.

2. Da nähmlich der Decimalzoll $\frac{1}{10}$ eines Fußes und der Duodecimalzoll $\frac{1}{12}$ eines Fußes iſt; ſo erhellet von ſelbſten, daß der Decimalzoll größer ſeyn müſſe

müſſe als der 12theilige, und man kann daher fragen; was eine gewiſſe Anzahl von Duodecimalzollen an Decimal beträgt und umgekehrt.

3. Dieſe Aufgabe bequem aufzulöſen, überlege man, folgende Betrachtung.

Man bezeichne den Decimalfuß, die Zolle, Linien, Scrupel und Quarten u. ſ. w. mit den großen Buchſtaben, Z, L, S, Q. Beym Duodecimalmaaß mit kleinen Buchſtaben z. l. ſ. q. u. ſ. w.

4. So hat man aus den vorhergehenden erſtlich folgende Gleichungen

1 Fuß $= 10\,Z = 12\,z$
1 Fuß $= 100\,L = 144\,l$
1 Fuß $= 1000\,S = 1728\,ſ$. u. ſ. w.

5. Alſo $Z = \frac{12}{10}\,z = z + \frac{2}{10}\,z$.

Weil aber $z = 12\,l$ iſt, ſo wird

$$Z = z + \tfrac{2}{10}.\,12\,l$$
$$= z + \tfrac{24}{10}\,l$$
$$= z + 2l + \tfrac{4}{10}\,l$$

und eben ſo wegen $l = 12\,ſ$; wird ferner

$$Z = z + 2l + 4ſ + \tfrac{8}{10}\,ſ$$

alſo endlich wenn man bis auf Quarten gehen will, findet ſich

$$Z = z + 2l + 4ſ + 9.6q,$$

6. Nach eben dem Verfahren wird aus der Gleichung $10\,L = 144\,l$; gefunden

$$L = l + 5\,ſ + 3,39.$$

Und aus $1000\,S = 1728\,ſ$.

7. $S = ſ + 8,79$.

8. So drücken alſo die gefundenen Formeln, für Z. L. S. u. ſ. w. das Decimalmaaß in Theilen des Duodecimalmaaßes aus.

Wenn man alſo eine gewiſſe Menge von Decimalzollen u. ſ. w. in Duodecimaltheilen ausdrücken will, ſo braucht man nur, das was rechter Hand des Gleichheitszeichens in den Formeln für Z. L. S. ſtehet, mit der gegebenen Zahl von Decimalzollen u. ſ. w. zu multipliciren.

Ex. Man ſoll $9Z + 8L + 4S$ auf Duodecimaltheile bringen.

$$9Z = 10z + 9l + 7ſ + 2,4q. \quad (5)$$
$$8L = 11l + 6ſ + 2,4q. \quad (6)$$
$$4S = 6ſ + 10,8q. \quad (7)$$
$$9Z\,8L\,4S = 11z + 9l + 8ſ + 3,6q \text{ oder}$$

9 Dec. Zoll + 8 Dec. L. + 4 Dec. Sc. machen 11 Duodz. + 9 Duod. L + 8 Duod. S. + 3,6 Duod. q.

 Die-

Dieſes iſt die bequemſte Methode die Decimaleintheilung auf die 12theilige zu bringen.

Man kann ſich aber auch folgender Methode bedienen.

Weil 1000 Decim. Sc. = 1728 Duodec. Sc., ſo ſchließe man nach der Regel de tri, für die Zahlen des vorigen Exempels 1000S : 1728ſ = 984S : xſ alſo $x = \frac{1728 \cdot 984}{1000}$

Man muß alſo hier im Zähler die beyden Zahlen 1728; 984 mit einander multipliciren und vom Produkt drey Decimalſtellen abſchneiden — Man kann aber auch um den Werth x zu berechnen, ſich der Logarithmen bedienen.

$$\begin{array}{r} \log 1728 = 3{,}2375437 \\ \log 984 = 2{,}9929951 \\ \hline 6{,}2305388 \\ \log 1000 = 3 \\ \hline \log x = 3{,}2305388 \end{array}$$

$\log x = 1700$

folgl. 984S = 1700ſ = 11z + 9l + 8ſ wie vorhin, wenn man nähmlich die 1700ſ durch eine fortgeſetzte Diviſion auf die höhern Einheiten bringt.

So kann man auch umgekehrt, die Duodecimaleintheilung auf die zehntheilige bringen.

Denn aus $10Z = 12z$ folget $\frac{10}{12} Z = z$ oder $\frac{10}{12} \cdot 10L = z$; wenn man nun ſo weiter fortgehet und L durch 10S; S durch 10Q u. ſ. w. ausdrückt, ſo findet ſich endlich $z = 8L + 3S + 3{,}3Q$

und aus $100L = 144l$.

wird $l = 6S + 9{,}4Q$.

und aus 1000S = 1728ſ findet ſich ſ = 5,7Q

Der Gebrauch dieſer Formeln iſt der nähmliche wie oben.

Exempel. Geſetzt man habe 8z + 3l + 5ſ ins Decimalmaß zu verwandeln, ſo wird

8z = 6Z + 6L + 6S + 6,4Q
3l = 2L + 0S + 8,2Q
5ſ = 2S + 8,5Q

8z + 3l + 5ſ = 6Z + 9L + 0S + 3,1Q

So erhellet wie man ſich überhaupt Formeln, für jede beliebige Eintheilung des Fußmaßes verfertigen könne, und es würde daher ſehr überflüßig ſeyn, eine dergleichen für die Reduction der 16theiligen Eintheilung auf die zehntheilige zu machen.

Da aber öfters vorfällt, daß man Theile des Fußes zu vergleichen hat, wo nicht allein die Abtheilung, ſondern auch ihre Größe ſelbſt verſchieden iſt, ſo wollen wir auch zeigen, wie in dieſem Falle zu verfahren iſt.

Geſetzt man ſell finden was 5′ 1″ 2‴ rheinländiſches Decimalmaß an Londner Duodecimalmaaß beträgt. Hier verwandelt man alſo erſtlich, die 5′ 1″ 2‴ oder 5,12 rheinländiſche Fuß in Londner

log 13918, 30 = 4, 1435861
log 5, 12 = 0, 7075702
Summa = 4, 8511563
— log 13511,54 = 4, 1308048
Reſt = 0, 7204515

Zu dieſem log gehört die Zahl 5, 253 und ſo viel Londner Fuß betragen 5, 12 Rhl.

Dieſe gefundenen 5, 253 Londner Fuß ſind aber Decimaltheile, und bedeuten 5 Fuß 2 Zoll 5 L. 3 S. oder nach der bisherigen Bezeichnung 5 F + 2 Z + 5 L + 3 S. Dieſe Größe muß man noch, wie oben gezeigt, ins Duodecimalmaß verwandeln.

5 F = 5 F.
2 Z = 2 z + 4 l + 9 ſ + 7, 2 q
5 L = 7 l + 2 ſ + 4, 5 q
3 S = 5 ſ + 2, 1 q
5F 2Z 5L 3S = 5F + 2z + 11l + 16ſ + 13, 8 q

Weil man aber für jede 12 q ein ſ, für jede 12 ſ ein l u. ſ. w. ſetzen kann, ſo wird

5 F + 2 Z + 5 L + 3 S = 5 F + 3 Z + 0 l + 5 ſ + 1, 8 q folglich ſind 5′ 1″ 2‴ rheinl. dec. M. = 5′ 2″ 5‴ 3⁗ Londner dec. M. oder = 5′ 3″ 0‴ 5⁗ 1′′′′′, 8 Londner duod. M.

Man hat längſt daran gedacht, etwas ausfindig zu machen, das durchaus eine beſtändige Größe habe, um die Länge des Fußes darnach zu beſtimmen, und ihn daher aller Orten genau davon abnehmen zu können, ſtatt daß man jetzo ihn auf Meßing u. dgl. geſtochen kommen laſſen muß. Schon die alten Araber haben den Zoll nach der Dicke der Gerſtenkörner, oder wie ſie fanden, daß dieſe ſehr ungleich waren, nach der Dicke der Pferdehaare abmeßen wollen. Allein auch dieſe ſind nicht gleich und überhaupt iſt es nicht ſicher, etwas ſehr kleines, daß oft wiederholt werden muß, zum Grund zu legen, weil der geringſte Fehler durch die öftere Wiederhohlung ſehr groß wird. Wenigſtens in Anſehung dieſes Umſtandes verdient unſers Landsmanns Jacob Köbels Vorſchlag, den er in ſeiner Geometrie (4 Frankf. 1608) S. 4 giebt, ſo lächerlich er ſonſt iſt, noch den Vorzug vor den Arabiſchen. Er ſpricht: „Eine Masruthe nach rechter Art und künſtlichem gemeinen Gebrauche ſoll alſo gemacht werden. Es ſollen ſechzehn Mann groß und klein, wie ſie ohngefähr nach einander aus der Kirche gehen, ein jeder vor den andern einen Schuh ſtellen und damit eine Länge, die da grad ſechszehn Schüh

begreift,

begreift, meſſen. Dieſelbige Länge iſt und ſoll ſeyn, ein gerecht, gemein Maßrute, damit man das Feld meſſen ſoll. — — So nun — — die ſechzehn Perſonen nach einander, jeder einen Fuß fürgeſetzt hat, und die Rut recht gemeſſen iſt, und aber einer größer Füß oder Schuh denn der andre hätte; ſo alsdenn dieſelbig gemeßne Rut in ſechzehn gleiches Theil mit einem Zirkel ausgetheilt, und unterſchieden wird, ſoll ſie künftig vor ein recht Maßrut gehalten werden — — — und helt in der Leng ſechzehn gleicher Theil, die aus ſechzehn Vergleicher Schuh verglichen iſt." In neuern Zeiten iſt man auf ein überaus viel beſſeres und vernünftigeres Mittel verfallen, die Länge eines Schuhes zu beſtimmen. Man hat nähmlich befunden, daß das Pendel eine genaue Länge haben muß, die um nichts größer als kleiner ſeyn darf, wenn es Secunden vibriren ſoll. Hugenius hat deswegen in ſeinem Horologio oſcillatorio vorgeſchlagen, den dritten Theil dieſer Länge, zu welcher ſich der Pariſer Fuß verhält, wie 864 zu 881, zum Fuße anzunehmen und ihm den Nahmen des Stundenfußes gegeben. Allein die nachherige Erfahrung lehrete, daß das Pendel, je weiter man vom Aequator wegkommt, je länger ſeyn müſſe, und folglich, wenn man aller Orten den dritten Theil zum Fuß annehmen wollte, doch nicht einerley Fuß auf dem ganzen Erdboden ſtatt finden würde. De la Contamine ſchlägt deswegen in der Voyage de la riviere des Amazones den dritten Theil der Länge des Pendels unter dem Aequator, wozu ſich der Pariſer Fuß verhält wie 1440 : 1465, zum allgemeinen Maße vor. Bouguer aber in ſeinem Tractate von der Figur der Erde hält die Länge des Pendels unter der Breite von 45 Graden vor dienlicher, weil jedermann die letztere Länge leichter haben könne, und ſie durch die Hitze nicht ſo viel verändert werde. In dieſem Falle würde ſich der Pariſer Fuß zum Stundenfuße verhalten wie 1440 : 1468. Weil man aus der Länge des Pendels in jeder gegebenen Breite, die Länge deſſelben unter dem Aequator berechnen kann, und der Aequator ein Strich iſt, der auf dem Erdboden ſeines gleichen nicht hat, ſo würden wir, wenn wir den Streit zu ſchlichten hätten, dem de la Contamine beytreten. Als eine Nachahmung hievon könnte man einen Fallſchuh vorſchlagen. Nähmlich die Körper fallen, vermöge der Schwere, im leeren Raum innerhalb einer Secunde 15, 597 rheinländiſche Fuß unter dem Aequator und 15,674 unter den Polen. Bliebe man abermals bey der erſten Höhe, die am franzöſiſchen Maaße 15,069 beträgt, und gäbe dem Fallfuße den funfzehnten Theil davon, ſo betrüge er 1,0046, käme alſo dem franzöſiſchen über alle Maßen nahe, und wäre daher vorzüglich würdig, eingeführt zu werden. Wir merken bey dieſer Gelegenheit noch an, daß ein 5 franzöſiſche Fuß langes Pendel 1846 einfache Vibrationen innerhalb einer Stunde zu Paris macht.

Neuere Bemühungen, ein unveränderliches Maß zu finden, ſind ſeit 1774 durch eine Preißaufgabe der Societät zu Aufmunterung der Künſte, Manufacturen und Handlung in Adelphi's Buildings in London veranlaßet worden. Ein gewiſſer Thomas Hatton, Maßſtabmacher (ſcale-Maker) in London, erhielt 1779 einen Theil des Preiſes, für die Erfindung eines Apparats zu genauer Beſtimmung der Länge des Secundenpendels. Den Gedanken, der dabey zum Grunde liegt, hat nachher Whitehurſt weiter benutzt, und auf genaue Ausmeßungen der Pendellänge einen Vorſchlag zu Einführung beſtimmter Maße gegründet. (An Attempt towards obtaining invariable mea-

meaſures of Lengtli, Capaciy and Weight from the menſuration of Time. London, 1787. Verſuch, durch Zeitmeßung unveränderliche Längen- Körper- und Gewichtmaße zu erhalten, von Joh. Whitehurſt, a. d. engl. mit Anm. von J. H. Wiedemann Nürnberg. 1790 gr. 4. Die franzöſiſchen Mathematiker hingegen haben ihr neu eingeführtes Maß auf Längenmeßung nähmlich auf die Größe des 45ten Meridiangrades in Frankreich, gegründet, ſ. unten den Art. Mètre.

Eine neuere Schrift welche über die Vergleichung alter und neuer Maße, und die Beſtimmung der Maße überhaupt ſchätzbare Unterſuchungen enthält, haben wir von Romé de l'Isle (metrologie à Paris, 1789. 4. Metrologiſche Tafeln über die alten Maaße, Gewichte und Münzen Roms und Griechenlands, nebſt den Verhalten: derſ. zu den bekannten frz. und deutſchen, nach den franz. des Romé de l'Isle von G. Große, Braunſchw. 1790. gr. 8.) erhalten.

Vorſchlag einen in allen Stücken richtigen geometriſchen Schuh zu erhalten, nach welchem man die übrigen in Europa gebräuchlichen Maaße in ein Verhältniß bringen kann. Hannov. gelehrte Anz. 1750. S. 212.

Vergleichung des alten römiſchen Schuhes mit dem Fuße des Chatelat in Paris. In IV B. der Abhandl. der Pariſer Ak. überſetzt von Steinwehr S. 611.

Ueber die richtige Beſtimmung der Verhältniß des rheinländiſchen Fußes zum Londner vor Herrn Piel. In den Göttinger gemeinnützl. Abh. 1775. S. 46.

Celſii (And.) Vergleichung zwiſchen dem ſchwediſchen und ausländiſchen Fußmaße. Abh. der ſchwediſchen Ak. 1 B. S. 255.

Beantwortung der Fragen 1) wie ſich das franzöſiſche Fußmaß zu den handveriſchen und rheinländiſchen verhält? 2) Wie groß eine Meile, deren 15 auf einen Grad gehen, nach handveriſchen Fußmaße ſey, und wie viel Quadratruthen ein hanoverſcher Morgen Land, nach rheinländiſchen Maße hält. Hanover'ſche nützliche Samml. 1756. St. 42.

Meſures priſes ſur Originaux et comparées avec le Pied du chatelet de Paris. Par Ms. Auzout. Memoir de l'acad roy. Paris Tom VI. 1666 — 1699 p. 537.

C. Arbuthnoths Tables of ancient Coins, Wheigts and Meaſures. London 1727.

Fuß einer geraden Linie, ſo heißt der Punkt, wo die gerade Linie eine Fläche erreicht.

Fuſti oder *Gerbelut* oder *Refactio*, heißt, was vom Gewicht einer Waare deswegen abgezogen wird, weil ſie etwa durch Waſſer u. d. g. Schaden gelitten. Es wird auch durch Procent des Gewichts angegeben, Alſo wenn das Gewicht Brutto gegeben iſt, muß man nach vorigen beyden Procenten Netto berechnen, und das gehörige Procent hievon, iſt Refactie, welches dann vom vorigen Netto abgezogen, den Reſt läßt der bezahlt wird.

2. Exempel. Eine Waare, die auf der See Schaden gelitten hat, wiegt Brutto 4288 Pf. Zu berechnen iſt: Thara 10 pc. wegen der Fäſſer, wegen gut Gewicht $\frac{3}{4}$ pc. = 0, 0075. Wegen des Waſſerſchadens 6 Procent.

	4288
ab Thara	428,8
bleibt	3859,2
mult. mit	0,0075
	192960
	270144
Product	28,94400
ab von	3859,2
	3830,256
mult. mit	0,06
Refactie	229,81536
ab von	3830,256
	3600,44064

3. Iſt die Refactie ein Procent, ſo findet ſich was bezahlt werden ſoll $\frac{(100-w)\,(100-m)\,(100-r)}{1000000}$, welches ſich durch Logarithmen leicht, und ſo ſcharf, als man fordert, berechnen läſſet.

Im Exempel wäre es = 4288. 90. 99, 25. 99, 0,000001.

4. Die Abſicht dieſer Rechnungen iſt, zu wiſſen, was für die Waare ſoll gezahlt werden. Wenn alſo a der Preis eines Pfundes iſt, ſo muß man ohne Zweifel abrechnen, was von dem erſt angegebenen Gewichte der Waare = p wegen gut Gewicht, Thara und Refactie, abgeht, und multipliciret mit a den Reſt, das iſt, was (3.) angegeben iſt.

5. Die Rechenmeiſter nennen das bisherige Thara: u. ſ. w. In oder Von, und geben eine Rechnung für Thara Auf an, die ſich kurz ſo vorſtellen läſſet.

6. Man ſetze r = o = m oder man rechne nur Thara, ohne das übrige.

7. Aus p Brutto, berechnet man nach dieſem Verfahren $\frac{100.\,p}{100+w}$; und das mit a multipliciret, ſoll der Werth der Waare ſeyn.

8. Iſt aber das Verhältniß von Brutto zur Thara, wie angenommen wird = 100 : w; ſo liefert der Verkäufer in der That nur

$$p\,\frac{100-w}{100}\ \text{Netto. Nun iſt}\ \frac{100}{100+w}-\frac{100-w}{100}=\frac{+w^2}{(100+w)\,100}$$

Was dieſer Bruch, mit p multipliciret, beträgt, das bekömmt in (7.) der Verkäufer bezahlt, ohne es zu liefern.

9. So iſt die Thara Auf dem Verkäufer zuträglicher als die Thara Von. Welches Tobias Beutel erinnert: zum ſiebentenmal neu aufgelegte Arithmetica Leipz. 1693. 12. 194. S.

10.

10. Das Verfahren (7.) iſt Nachahmung der einfachen Zinsrechnung, und wäre richtig wenn w Procent Thara hieße: Brutto: Netto = 100 + w : 100.

11. Da Thara u. ſ. w. doch aus Anfangs unterſuchten Erfahrungen ſind beſtimmt worden, ſo kömmt es darauf an, wie man den Erfolg dieſer Erfahrungen ausgedrückt hat, ob man ihn ſo angegeben hat: Wenn Waare mit ihren Fäſſern u. ſ. w. 100 Pfund wiegt, ſo iſt das Gewicht der Fäſſer 5 Pf. und der lautern Waare ihres 95 Pf.

Oder: Wenn die Waare mit den Fäſſern 105 Pf. wiegt, iſt der Fäſſer Gewicht 5; der Waare ihres 100. Das erſte wäre Thara von, das andere auf.

Man muß alſo annehmen, die Erfahrungen ſind nach der erſten Art gebraucht worden, welches wenigſtens Clausberg zum Grunde ſeiner Behauptung legen muß. Auf 998 S. erinnert er ausdrücklich, daß Thara von 100 abgezogen, aber was man Procent rabattiren nennt, nicht in, ſondern auf 100 gekürzt, ſtatt 100 + w; 100 gerechnet wird.

Erfurt,

gedruckt bey Johann Philipp Chriſtian Reuß

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rosenthal, Gottfried Erich, 1745-1813

Encyklopädie der reinen Mathematik und praktischen Geometrie Das ist: Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie, Analysis, Feldmeßkunst, Forstgeometrie und Markscheidekunst. ihre Geschichte und Literatur in alphabetischer Ordnung
Bd.: Vierter Band

Gotha 1796

4 Math.u. 104 m-1,3/4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10525740-5
VD18 80054188